

CHAPITRE 29

Produit scalaire

Hugo SALOU MP2I

Dernière mise à jour le 15 juin 2022

TABLE DES MATIÈRES

I	Définitions	2
II	Quelques formules	5
III	Familles orthogonales	8
IV	Projection orthogonale	15
V	Annexe	22
V.1	Produit vectoriel	23
V.2	Calcul différentiel	24
V.3	Séries de Fourier	25
V.4	Espace-temps de Minkowsky	26

Dans ce chapitre, E désigne un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

On sait déjà calculer le produit scalaire en dimension 2 et 3 mais l'objectif de ce chapitre est de le généraliser en dimension potentiellement infinie.

Première partie

Définitions

Définition: Un produit scalaire sur E est une forme bilinéaire symétrique définie positive :

$$f : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$$

1. $\forall (u_1, u_2, v) \in E^3, \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, f(\alpha u_1 + \beta u_2, v) = \alpha f(u_1, v) + \beta f(u_2, v)$, (bilinéaire)
2. $\forall (u, v) \in E^2, f(u, v) = f(v, u)$, (symétrie)
3. $\forall u \in E, f(u, u) \geq 0$, (positive)
4. $\forall u \in E, (f(u, u) = 0 \iff u = 0_E)$. (définie)

On dit alors que (E, f) est un espace préhilbertien. Si, de plus, E est de dimension finie, alors on dit que (E, f) est un espace euclidien.

En général, on note $\langle u | v \rangle$, $\langle u, v \rangle$ ou $(u | v)$ à la place de $f(u, v)$.

REMARQUE:

Même si elle est utilisée (notamment au lycée), la notation $u \cdot v$ est dangeureuse car elle peut être facilement confondue par la multiplication.

EXEMPLE: 1. Avec $E = \mathbb{R}^2$, on a $\langle (x, y) | (x', y') \rangle = xx' + yy'$.

2. Avec $E = \mathbb{R}^n$, on a $\langle (x_1, \dots, x_n) | (y_1, \dots, y_n) \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$.

3. Avec $E = \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$, on a $\langle f | g \rangle = \int_a^b f(t)g(t) dt$.

4. Avec $E = \ell^1(\mathbb{R}) = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \sum |u_n| \text{ converge}\}$, on a $\langle u | v \rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n$. En effet, $v \in E$ donc $\sum |v_n|$ converge et donc $v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. On a donc

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |v_n| \leq 1$$

donc

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n v_n| \leq |u_n|.$$

Comme $\sum |u_n|$ converge, on en déduit que $\sum |u_n v_n|$ aussi.

5. Avec $E = \mathbb{R}^2$, on a $\langle (x, y) | (x', y') \rangle = xx' + 2xy' + 2yx' + 5yy'$.

— On fixe $(x', y') \in E$. Soient $(x_1, y_1) \in E, (x_2, y_2) \in E$ et $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} \langle \lambda_1(x_1, y_1) + \lambda_2(x_2, y_2) | (x', y') \rangle &= \langle (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) | (x', y') \rangle \\ &= (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)x' + 2(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)y' \\ &\quad + 2(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2)x' + 5(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2)y' \\ &= \lambda_1(x_1 x' + 2x_1 y' + 2y_1 x' + 5y_1 y') \\ &\quad + \lambda_2(x_2 x' + 2x_2 y' + 2y_2 x' + 5y_2 y') \\ &= \lambda_1 \langle (x_1, y_1) | (x', y') \rangle + \lambda_2 \langle (x_2, y_2) | (x', y') \rangle \end{aligned}$$

— Soit $(x, y) \in E$ et $(x', y') \in E$.

$$\begin{aligned} \langle (x', y') | (x, y) \rangle &= x'x + 2x'y + 2y'x + 3y'y \\ &= \langle (x, y) | (x', y') \rangle \end{aligned}$$

— Soit $(x, y) \in E$.

$$\begin{aligned} \langle (x, y) | (x, y) \rangle &= x^2 + 4xy + 5y^2 \\ &= (x + 2y)^2 + y^2 \geq 0 \end{aligned}$$

— Soit $(x, y) \in E$.

$$\begin{aligned} \langle (x, y) \mid (x, y) \rangle = 0 &\iff (x + 2y)^2 + y^2 = 0 \\ &\iff \begin{cases} y^2 = 0 \\ (x + 2y)^2 = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Définition: Soit $(E, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien. Soit $x \in E$.

La norme (euclidienne) de x est

$$\sqrt{\langle x \mid x \rangle} = \|x\|.$$

- Proposition:**
1. $\forall x \in E, \|x\| = 0 \iff x = 0_E$ (séparation)
 2. $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ (homogénéité positive)
 3. $\forall (x, y) \in E^2, \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (inégalité triangulaire)

□

L'inégalité triangulaire sera prouvée dans la suite du chapitre (paragraphe 2.).

Définition: Soit $(x, y) \in E^2$. On dit que x et y sont orthogonaux si $\langle x \mid y \rangle = 0$. On note cette situation $x \perp y$.

EXEMPLE:

Avec $E = \mathcal{C}^0([-1, 1], \mathbb{R})$ et $\langle f \mid g \rangle = \int_{-1}^1 f(t) g(t) dt$. Soit f paire et g impaire. Alors $f \perp g$.

Dans ce cas, on peut appliquer le théorème de Pythagore (vu dans la suite du chapitre) :

$$\|f + g\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2.$$

Deuxième partie

Quelques formules

Dans ce paragraphe, $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ est un espace préhilbertien.

Proposition: Soient $x, y \in E$.

1. $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 \langle x | y \rangle$.
2. $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$. (identité du parallélogramme)
3. $\langle x | y \rangle = \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)$. (polarisation)

Preuve: 1.

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \langle x + y | x + y \rangle \\ &= \langle x | x + y \rangle + \langle y | x + y \rangle \\ &= \langle x | x \rangle + \langle x | y \rangle + \langle y | x \rangle + \langle y | y \rangle \\ &= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 \langle x | y \rangle \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 &= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 \langle x | y \rangle \\ &\quad + \|x\|^2 + \|-y\|^2 + 2 \langle x | -y \rangle \\ &= 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \end{aligned}$$

3.

□

Théorème (inégalité de Cauchy-Schwarz): Soient $x, y \in E$. Alors

$$|\langle x | y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$$

et

$$|\langle x | y \rangle| = \|x\| \|y\| \iff x \text{ et } y \text{ sont colinéaires.}$$

Preuve:

On fixe $(x, y) \in E^2$.

— On suppose $y \neq 0_E$. Soit

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto \|x + ty\|. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}, f(t) &= \|x\|^2 + 2 \langle x | ty \rangle + \|ty\|^2 \\ &= \|x\|^2 + 2t \langle x | y \rangle + t^2 \|y\|^2. \end{aligned}$$

Comme $y \neq 0_E$, $\|y\|^2 \neq 0$ et f est donc une fonction polynomiale de degré 2.
En outre,

$$\forall t \in \mathbb{R}, f(t) \geq 0.$$

Donc le discriminant Δ de f est négatif ou nul. Or,

$$\Delta = 4 \langle x | y \rangle^2 - 4 \|x\|^2 \|y\|^2.$$

Ainsi

$$\langle x | y \rangle^2 \leq \|x\|^2 \|y\|^2$$

et donc

$$|\langle x | y \rangle| \leq \|x\| \|y\|.$$

On suppose que $|\langle x | y \rangle| = \|x\| \|y\|$. Dans ce cas, $\Delta = 0$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f(\lambda) = 0$, i.e. $\|x + \lambda y\| = 0$ et donc $x = -\lambda y$, donc x et y sont colinéaires.

La réciproque est immédiate.

— On suppose $y = 0_E$.

$$|\langle x | y \rangle| = |\langle x | 0_E \rangle| = 0 \quad \text{et} \quad \|x\| \|y\| = \|x\| \times 0 = 0.$$

On a bien

$$\begin{cases} |\langle x | y \rangle| \leq \|x\| \|y\|; \\ y \text{ et } x \text{ sont colinéaires.} \end{cases}$$

□

Corollaire (inégalité triangulaire): Soit $(x, y) \in E^2$.

1. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.
2. $\|x + y\| = \|x\| + \|y\| \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}^+, (x = \lambda y \text{ ou } y = \lambda x).$

Preuve: 1.

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 \langle x | y \rangle \\ &\leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 |\langle x | y \rangle| \\ &\leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 \|x\| \|y\| \\ &\leq (\|x\| + \|y\|)^2. \end{aligned}$$

D'où

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

2.

$$\begin{aligned} \|x + y\| = \|x\| + \|y\| &\iff \|x + y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2 \\ &\iff \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 \langle x | y \rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 \|x\| \|y\| \\ &\iff \langle x | y \rangle = \|x\| \|y\| \\ &\iff \begin{cases} \langle x | y \rangle \geq 0 \\ |\langle x | y \rangle| = \|x\| \|y\| \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \exists \lambda \in \mathbb{R}, x = \lambda y \text{ ou } y = \lambda x \\ \langle x | y \rangle \geq 0 \end{cases} \\ &\iff \exists \lambda \in \mathbb{R}^+, x = \lambda y \text{ ou } y = \lambda x. \end{aligned}$$

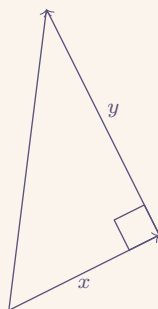
□

Troisième partie

Familles orthogonales

Théorème (Pythagore): Soit $(x, y) \in E^2$.

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \iff x \perp y.$$



Preuve:

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \iff 2\langle x | y \rangle = 0 \iff x \perp y.$$

□

Définition: Soit $(e_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs. On dit que cette famille est orthogonale si

$$\forall i \neq j, e_i \perp e_j.$$

Si, en plus, on a

$$\forall i \in I, \|e_i\| = 1,$$

alors on dit que la famille est orthonormale ou orthonormée.

Proposition (Pythagore): Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une famille orthogonale. Alors

$$\left\| \sum_{i=1}^n e_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^n \|e_i\|^2.$$

Théorème: Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre.

Preuve:

Soit $(e_i)_{i \in I}$ une famille orthogonale telle que

$$\forall i \in I, e_i \neq 0_E.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$. On suppose

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k e_{i_k} = 0_E.$$

Soit $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

$$\begin{aligned} 0 &= \left\langle \sum_{k=1}^n \lambda_k e_{i_k} \mid e_{i_j} \right\rangle \\ &= \sum_{k=1}^n \lambda_k \langle e_{i_k} \mid e_{i_j} \rangle \\ &= \lambda_j \underbrace{\|e_{i_j}\|^2}_{\neq 0} \end{aligned}$$

donc $\lambda_j = 0$.

□

Algorithme (Orthonormalisation de Gram-Schmidt): On suppose E de dimension finie. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E .

— Étape 1 : On pose $v_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|}$ de sorte que $\|v_1\| = 1$.

— Étape 2 : On pose

$$u_2 = e_2 - \langle e_2 \mid v_1 \rangle v_1.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \langle u_2 \mid v_1 \rangle &= \langle e_2 - \langle e_2 \mid v_1 \rangle v_1 \mid v_1 \rangle \\ &= \langle e_2 \mid v_1 \rangle - \langle e_2 \mid v_1 \rangle \langle v_1 \mid v_1 \rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

On pose $v_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|}$ donc $v_2 \perp v_1$ et $\|v_2\| = 1$.

— Étape 3 : On pose

$$u_3 = e_3 - \langle e_3 \mid v_1 \rangle v_1 - \langle e_3 \mid v_2 \rangle v_2.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \langle u_3 \mid v_1 \rangle &= \langle e_3 \mid v_1 \rangle - \langle e_3 \mid v_1 \rangle \underbrace{\langle v_1 \mid v_1 \rangle}_{=1} - \langle e_3 \mid v_2 \rangle \underbrace{\langle v_2 \mid v_1 \rangle}_{=0} \\ &= 0 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \langle u_3 \mid v_2 \rangle &= \langle e_3 \mid v_2 \rangle - \langle e_3 \mid v_1 \rangle \underbrace{\langle v_1 \mid v_2 \rangle}_{=0} - \langle e_3 \mid v_2 \rangle \underbrace{\langle v_2 \mid v_2 \rangle}_{=1} \\ &= 0. \end{aligned}$$

On pose $v_3 = \frac{u_3}{\|u_3\|}$ de sorte que $v_3 \perp v_1$, $v_3 \perp v_2$ et $\|v_3\| = 1$.

— Étape $i+1$: On pose

$$u_{i+1} = e_{i+1} - \sum_{k=1}^i \langle e_{i+1} \mid v_k \rangle v_k.$$

Ainsi, pour tout $j \in \llbracket 1, i \rrbracket$, on a

$$\begin{aligned}\langle u_{i+1} \mid v_j \rangle &= \langle e_{i+1} \mid v_j \rangle - \sum_{k=1}^i \langle e_{i+1} \mid v_k \rangle \langle v_k \mid v_j \rangle \\ &= \langle e_{i+1} \mid v_j \rangle - \langle e_{i+1} \mid v_j \rangle \|v_j\|^2 \\ &= 0.\end{aligned}$$

On pose $v_{i+1} = \frac{u_{i+1}}{\|u_{i+1}\|}$.

EXEMPLE:

Avec $E = \mathbb{R}_3[X]$, $\langle P \mid Q \rangle = \int_0^1 P(t) Q(t) \, dt$ et $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3)$.

1. $\|1\|^2 = \langle 1 \mid 1 \rangle = \int_0^1 1 \, dt = 1$ et donc $v_1 = 1$.
2. $u_2 = X - \langle X \mid v_1 \rangle v_1$. Or, $\langle X \mid v_1 \rangle = \int_0^1 t \, dt = \frac{1}{2}$. D'où $u_2 = X - \frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned}\|u_2\|^2 &= \int_0^1 \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 \, dt \\ &= \int_0^1 \left(t^2 - t + \frac{1}{4}\right) \, dt \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{12}\end{aligned}$$

On en déduit que $v_2 = \sqrt{12} \left(X - \frac{1}{2}\right)$.

3. $u_3 = X^2 - \langle X^2 \mid v_1 \rangle v_1 - \langle X^2 \mid v_2 \rangle v_2$. On a

$$\langle X^2 \mid v_1 \rangle = \int_0^1 t^2 \, dt = \frac{1}{3}$$

et

$$\begin{aligned}\langle X^2 \mid v_2 \rangle &= \sqrt{12} \int_0^1 t^2 \left(t - \frac{1}{2}\right) \, dt \\ &= \frac{\sqrt{12}}{12}.\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}u_3 &= X^2 - \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{12}}{12} \sqrt{12} \left(X - \frac{1}{2}\right) \\ &= X^2 - \frac{1}{3} - X + \frac{1}{2} \\ &= X^2 - X + \frac{1}{6}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|u_3\|^2 &= \int_0^1 \left(t^2 - t + \frac{1}{6} \right) dt \\
&= \int_0^1 \left(t^4 + t^2 + \frac{1}{36} - 2t^3 + \frac{t^2}{3} - \frac{t}{3} \right) dt \\
&= \frac{1}{5} + \frac{1}{3} + \frac{1}{36} - \frac{1}{2} + \frac{1}{9} - \frac{1}{6} \\
&= \frac{36 + 60 + 5 - 90 + 20 - 30}{180} \\
&= \frac{1}{180}
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$v_3 = 6\sqrt{5} \left(X^2 - X + \frac{1}{6} \right).$$

4. Exercice : calculer v_4 .

Proposition: Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $\mathcal{C}$ la base obtenue par le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt. Alors,

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \text{Vect}(e_1, \dots, e_i) = \text{Vect}(v_1, \dots, v_i).$$

□

EXEMPLE (orthogonalisation): — $u_1 = 1$.

$$\begin{aligned}
\left. \begin{array}{l} u_2 \in \text{Vect}(e_1, e_2) \\ u_2 \perp u_1 \end{array} \right\} &\iff \begin{cases} u_2 = ae_1 + be_2 & (a, b) \in \mathbb{R}^2 \\ \langle u_1 | u_2 \rangle = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} u_2 = a + bX \\ \int_0^1 (a + bt) dt = 0. \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^1 (a + bt) dt = 0 &\iff a + \frac{b}{2} = 0 \\
&\iff a = -\frac{b}{2} \\
&\iff u_2 = -\frac{b}{2} + bX.
\end{aligned}$$

Par exemple, $u_2 = -1 + 2X$.

$$— \begin{cases} u_3 \in \text{Vect}(e_1, e_2, e_3) \\ u_3 \perp u_1 \\ u_3 \perp u_2 \end{cases}$$

On pose $u_3 = a + bX + cX^2$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned}
\left. \begin{array}{l} \int_0^1 (a + bt + ct^2) dt = 0 \\ \int_0^1 (a + bt + ct^2) (2t - 1) dt = 0 \end{array} \right\} &\iff \begin{cases} a + \frac{b}{2} + \frac{c}{3} = 0 \\ \int_0^1 (2ct^3 + (-c + 2b)t^2 + (2a - b)t - a) dt = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} a + \frac{b}{2} + \frac{c}{3} = 0 \\ \frac{c}{2} + \frac{2b - c}{3} + \frac{2a - b}{2} - a = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} a = -\frac{b}{2} - \frac{c}{3} = \frac{c}{2} - \frac{c}{3} = \frac{c}{6} \\ b = -c. \end{cases}
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$u_3 = 1 - 6X + 6X^2.$$

Corollaire (théorème de la base orthonormée incomplète): Soit $(e_1, \dots, e_k)$ une base orthonormée d'un espace euclidien. On peut trouver $e_{k+1}, \dots, e_n$ tels que $(e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n)$ soit une base orthonormée de E .

Preuve:

On sait que $(e_1, \dots, e_k)$ est libre. On complète $(e_1, \dots, e_k)$ en une base $\mathcal{B}$ de E . On orthonormalise $\mathcal{B}$: on obtient une base orthonormée $\mathcal{C}$ de E . En détaillant l'algorithme de Gram-Schmidt, on s'aperçoit que les k premiers vecteurs de $\mathcal{C}$ sont ceux de $\mathcal{B}$. $\square$

Théorème: Soit E un espace euclidien et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E . Soit $(x, y) \in E^2$. On pose $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que

$$x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \quad y = \sum_{i=1}^n y_i e_i.$$

Alors

$$\langle x | y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$. Alors,

$$\langle x | y \rangle = X^\top Y.$$

Preuve:

$$\begin{aligned} \langle x | y \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^n x_i e_i \mid y \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^n x_i \langle e_i \mid y \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n x_i \left\langle e_i \mid \sum_{j=1}^n y_j e_j \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^n x_i \sum_{j=1}^n y_j \underbrace{\langle e_i \mid e_j \rangle}_{\delta_i^j} \\ &= \sum_{i=1}^n x_i y_i. \end{aligned}$$

$\square$

Proposition: Soit E un espace euclidien et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E . Alors,

$$\forall x \in E, x = \sum_{i=1}^n \langle x | e_i \rangle e_i.$$

Preuve:

Soit $x \in E$. On pose

$$x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$$

avec $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Soit $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On a

$$\begin{aligned} \langle x | e_j \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^n x_i e_i | e_j \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^n x_i \langle e_i | e_j \rangle \\ &= x_j. \end{aligned}$$

□

Quatrième partie

Projection orthogonale

Dans ce paragraphe, $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ est un espace préhilbertien (de dimension quelconque).

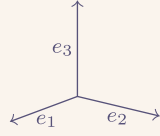
Définition: Soit $A \in \mathcal{P}(E)$. L'orthogonal de A est

$$A^\perp = \{u \in E \mid \forall a \in A, a \perp u\}.$$

EXEMPLE: 1. $\emptyset^\perp = E$; $\{0_E\}^\perp = E$; $E^\perp = \{0_E\}$.

Attention $\underline{\Delta}$, $(\emptyset^\perp)^\perp = \{0_E\} \neq \emptyset$.

2. Avec $E = \mathbb{R}^3$, et $A = \{e_3\}$.



$$A^\perp = \text{Vect}(e_1, e_2)$$

et

$$A^{\perp\perp} = \text{Vect}(e_1, e_2)^\perp = \text{Vect}(e_3) \neq A.$$

Proposition:

$\forall A \in \mathcal{P}(E)$, $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E .

Preuve:

Soit $A \in \mathcal{P}(E)$.

- $\forall a \in A, \langle a | 0_E \rangle = 0$ donc $0_E \in A^\perp$ et donc $A^\perp \neq \emptyset$.
- Soient $(u, v) \in A^\perp$, $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Soit $a \in A$.

$$\begin{aligned} \langle \alpha u + \beta v | a \rangle &= \alpha \langle u | a \rangle + \beta \langle v | a \rangle \\ &= \alpha \times 0 + \beta \times 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

Théorème: Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E . Alors

$$F \oplus F^\perp = E.$$

Preuve:

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base orthonormée de F .

ANALYSE Soit $x \in E$. On suppose $x = u + v$ avec $u \in F$ et $v \in F^\perp$. On pose

$$u = \sum_{i=1}^p u_i e_i. \text{ De plus,}$$

$$\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, \langle v | e_i \rangle = 0.$$

Soit $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$.

$$\begin{aligned}
 \langle x \mid e_i \rangle &= \langle u + v \mid e_i \rangle \\
 &= \langle u \mid e_i \rangle + \langle v \mid e_i \rangle \\
 &= \left\langle \sum_{j=1}^p u_j e_j \mid e_i \right\rangle \\
 &= \sum_{j=1}^p u_j \langle e_j \mid e_i \rangle \\
 &= u_i
 \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{cases} u = \sum_{i=1}^p \langle x \mid e_i \rangle e_i \\ v = x - \sum_{i=1}^p \langle x \mid e_i \rangle e_i. \end{cases}$$

SYNTHÈSE Soit $x \in E$. On pose

$$\begin{cases} u = \sum_{i=1}^p \langle x \mid e_i \rangle e_i \\ v = x - \sum_{i=1}^p \langle x \mid e_i \rangle e_i \end{cases}$$

On a clairement $u + v = x$ et $u \in F$.

Soit $a \in F$. On pose $a = \sum_{i=1}^p a_i e_i$.

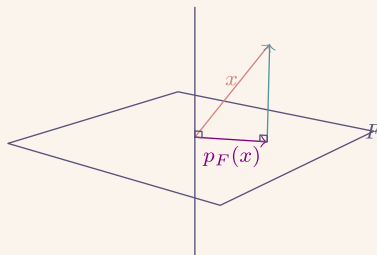
$$\begin{aligned}
 \langle v \mid a \rangle &= \langle x \mid a \rangle - \sum_{i=1}^p \langle x \mid e_i \rangle \underbrace{\langle e_i \mid a \rangle}_{=a_i} \\
 &= \sum_{i=1}^p a_i \langle x \mid e_i \rangle - \sum_{i=1}^p a_i \langle x \mid e_i \rangle \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

donc $v \in F^\perp$.

□

Définition: Dans les conditions précédentes, $F^\perp$ est appelé le supplémentaire orthogonal de F .

La projection sur F parallèlement à $F^\perp$ est appelée projection orthogonale sur F . On la note p_F .



Proposition (inégalité de Bessel): Soit F de dimension finie. Alors,

$$\forall x \in E, \|p_F(x)\| \leq \|x\|.$$

Preuve:

Comme F est de dimension finie :

$$F \oplus F^\perp = E.$$

Soit $x \in E$. On a

$$x = p_F(x) + (x - p_F(x)) \text{ car } p_F(x) \in F \text{ et } x - p_F(x) \in F^\perp.$$

Donc, $x - p_F(x) \perp p_F(x)$ car $p_F(x) \in F$ et $x - p_F(x) \in F^\perp$.

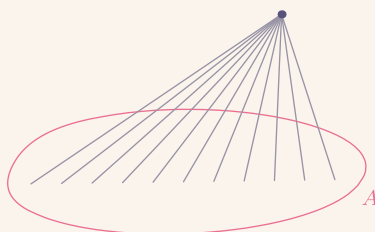
D'après le théorème de Pythagore,

$$\begin{aligned} \|x\|^2 &= \|p_F(x)\|^2 + \underbrace{\|x - p_F(x)\|^2}_{\geq 0} \\ &\geq \|p_F(x)\|^2. \end{aligned}$$

□

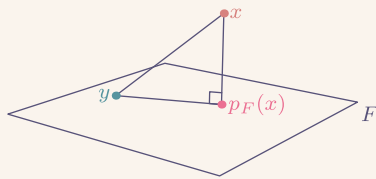
Définition: Soit $A \in \mathcal{P}(E)$ non vide et $x \in E$. La distance de x à A est

$$d(x, A) = \inf \{ \|x - a\| \mid a \in A \}.$$



Théorème: Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie et $x \in E$. Alors,

$$d(x, F) = \|x - p_F(x)\|.$$



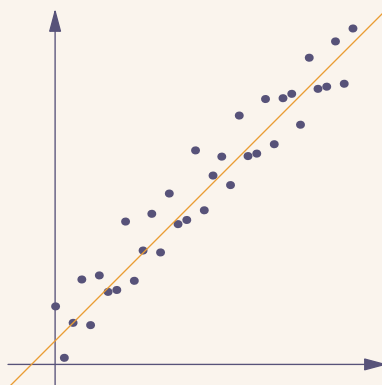
Preuve:

Soit $y \in F$.

$$\begin{aligned} \|x - y\|^2 &= \left\| \underbrace{x - p_F(x)}_{\in F^\perp} + \underbrace{p_F(x) - y}_{\in F} \right\|^2 \\ &= \|x - p_F(x)\|^2 + \|p_F(x) - y\|^2 \\ &\geq \|x - p_F(x)\|^2. \end{aligned}$$

□

EXEMPLE (droite des moindres carrés – régression linéaire):



On cherche $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ qui minimise $\sum_{i=1}^n (y_i - (ax_i - b))^2$.

On pose $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $\mathbf{1} = (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^n$. On suppose que x et $\mathbf{1}$ ne sont pas colinéaires.

Soit $\langle \cdot | \cdot \rangle$ le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (y_i - (ax_i - b))^2 &= \|y - \underbrace{(ax - b\mathbf{1})}_{\in \text{Vect}(x, \mathbf{1}) = F}\|^2. \\ \min_{(a, b) \in \mathbb{R}^2} \sum_{i=1}^n (y_i - (ax_i + b))^2 &= \|y - p_F(y)\|^2. \end{aligned}$$

On veut les coordonnées de $p_F(y)$ dans la base $(x, \mathbf{1})$ de F .

Proposition: Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base orthonormée de F . Alors,

$$\forall x \in E, p_F(x) = \sum_{i=1}^p \langle x | e_i \rangle e_i.$$

Preuve: — $\sum_{i=1}^p \langle x | e_i \rangle e_i \in F$ car $e_1, \dots, e_p \in F$.

— On pose $u = x - \sum_{i=1}^p \langle x | e_i \rangle e_i$. Montrons que $u \in F^\perp$. Soit $a \in F$. On peut écrire

$$a = \sum_{i=1}^p \langle a | e_i \rangle e_i.$$

$$\begin{aligned} \langle u | a \rangle &= \langle x | a \rangle - \langle p_F(x) | a \rangle \\ &= \sum_{i=1}^p \langle a | e_i \rangle \langle x | e_i \rangle - \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \langle a | e_i \rangle \langle x | e_j \rangle \langle e_i | e_j \rangle \\ &= \sum_{i=1}^p \langle a | e_i \rangle \langle x | e_i \rangle - \sum_{i=1}^p \langle a | e_i \rangle \langle x | e_i \rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

EXEMPLE (suite de l'exemple précédent – régression linéaire):
On orthonormalise la base $(\mathbf{1}, x)$ de F .

$$\|\mathbf{1}\|^2 = \sum_{i=1}^n 1^2 = n.$$

On pose donc $v_1 = \frac{\mathbf{1}}{\|\mathbf{1}\|} = \frac{1}{\sqrt{n}}(1, \dots, 1)$.

Soit $u_2 = x - \langle x | v_1 \rangle v_1$.

$$\langle x | v_1 \rangle = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n x_i = \sqrt{n} \bar{x} \text{ où } \bar{x} = \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i.$$

D'où,

$$\begin{aligned} u_2 &= (x_1, \dots, x_n) - \bar{x}(1, \dots, 1) \\ &= (x_1 - \bar{x}, \dots, x_n - \bar{x}). \end{aligned}$$

On a $\|u_2\|^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = n\sigma_x^2$. On en déduit donc que

$$v_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|} = \frac{1}{\sqrt{n}\sigma_x}(x_1 - \bar{x}, \dots, x_n - \bar{x}).$$

$$\begin{aligned}
p_F(y) &= \langle y \mid v_1 \rangle v_1 + \langle y \mid v_2 \rangle v_2 \\
&= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i (1, \dots, 1) + \frac{1}{n\sigma_x^2} \sum_{i=1}^n y_i (x_i - \bar{x}) (x_1 - \bar{x}, \dots, x_n - \bar{x}) \\
&= (\bar{y}, \dots, \bar{y}) - \frac{1}{n\sigma_x^2} \left(\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})(x_i - \bar{x}) + \bar{y} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) \right) (x_1 - \bar{x}, \dots, x_n - \bar{x}) \\
&= (\bar{y}, \dots, \bar{y}) + \frac{1}{\sigma_x^2} \text{Cov}(x, y) (x_1 - \bar{x}, \dots, x_n - \bar{x}) \\
&= \left(\bar{y} - \frac{\text{Cov}(x, y)}{\sigma_x^2} \bar{x} \right) (1, \dots, 1) + \frac{\text{Cov}(x, y)}{\sigma_x^2} (x_1, \dots, x_n).
\end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{cases} a = \frac{\text{Cov}(x, y)}{\sigma_x^2}; \\ b = \bar{y} - a\bar{x}. \end{cases}$$

Proposition: Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie. Alors,

$$(F^\perp)^\perp = F.$$

Preuve:

Clairement, $F \subset (F^\perp)^\perp$.

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base orthonormée de F et $x \in (F^\perp)^\perp$.

On sait que

$$\begin{cases} x = \underbrace{p_F(x)}_{\in F} + \underbrace{x - p_F(x)}_{\in F^\perp} \\ p_F(x) = \sum_{i=1}^p \langle x \mid e_i \rangle e_i \end{cases}.$$

$$\begin{aligned}
x - p_F(x) &\in F^\perp \text{ donc } x \perp (x - p_F(x)) \\
&\text{donc } \langle x \mid x - p_F(x) \rangle = 0 \\
&\text{donc } \|x\|^2 - \langle x \mid p_F(x) \rangle = 0 \\
&\text{donc } \|x\|^2 = \sum_{i=1}^p \langle x \mid e_i \rangle \langle x \mid e_i \rangle = \|p_F(x)\|^2
\end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned}
\|x\|^2 &= \|p_F(x)\|^2 + \|x - p_F(x)\|^2 \\
&\text{donc } \|x - p_F(x)\| = 0 \\
&\text{donc } x = p_F(x) \in F.
\end{aligned}$$

□

Cinquième partie

Annexe

Dans ce chapitre, beaucoup des résultats ne seront pas prouvés, et sont, en grande majorité, hors-programme (pour l'année de *MP2I*).

V.1 Produit vectoriel

Théorème (Riesz): Soit $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace euclidien. L'application

$$\begin{aligned}\varphi : E &\longrightarrow E^* \\ a &\longmapsto \langle a | \cdot \rangle\end{aligned}$$

est un isomorphisme.

Preuve:

Soient $(a, b) \in E^2$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}\forall x \in E, \varphi(\alpha a + \beta b)(x) &= \langle \alpha a + \beta b | x \rangle \\ &= \alpha \langle a | x \rangle + \beta \langle b | x \rangle \\ &= \alpha \varphi(a)(x) + \beta \varphi(b)(x) \\ &= (\alpha \varphi(a) + \beta \varphi(b))(x)\end{aligned}$$

Donc $\varphi \in \mathcal{L}(E, E^*)$.

Soit $a \in \text{Ker}(\varphi)$, alors $\varphi(a) = 0_{E^*}$ et donc,

$$\forall x \in E, \varphi(a)(x) = 0$$

donc

$$\forall x \in E, \langle a | x \rangle = 0.$$

On a donc $\langle a | a \rangle = 0$ et donc $a = 0_E$.

On en déduit que φ est injective.

Comme $\dim(E) = \dim(E^*) < +\infty$ et donc $\varphi \in \text{GL}(E, E^*)$. □

EXEMPLE:

Soit P un plan de $\mathbb{R}^3$ et $n \in P^\perp$.

$$\begin{aligned}u \in P &\iff u \perp n \\ &\iff \langle u | n \rangle = 0.\end{aligned}$$

Ici, $E = \mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire canonique.

Définition: Soient u et v linéairement indépendants dans E . Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de E .

L'application

$$\begin{aligned}f : E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ w &\longmapsto \det_{\mathcal{B}}(u, v, w)\end{aligned}$$

est linéaire. D'après le théorème de Riesz,

$$\exists! a \in E, f = \langle a | \cdot \rangle.$$

On considère un tel vecteur $a \in E$. Donc,

$$\forall w \in E, \det_{\mathcal{B}}(u, v, w) = \langle a | w \rangle.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} (u, v, w) \text{ base de } E &\iff \langle a \mid w \rangle \neq 0 \\ &\iff w \not\perp a. \end{aligned}$$

Comme $a \not\perp a$, (u, v, a) est une base de E . a est le produit vectoriel de u et v et est noté $u \wedge v$.

$$\forall w \in E, \det_{\mathcal{B}}(u, v, w) = \underbrace{\langle u \wedge v \mid w \rangle}_{\text{produit mixte noté } [u, v, w]}.$$

Proposition: Soit $(u, v) \in E^2$ avec u et v linéairement indépendants.

1. $(u \wedge v) \perp u$;
2. $(u \wedge v) \perp v$;
3. $(u, v, u \wedge v)$ est une base directe (i.e. $\det(u, v, u \wedge v) > 0$);
4. $\|u \wedge v\| = \|u\| \|v\| \sin(\widehat{u, v})$.

Preuve: 1. $\langle u \wedge v \mid u \rangle = \det_{\mathcal{B}}(u, v, u) = 0$.

2. $\langle u \wedge v \mid v \rangle = \det_{\mathcal{B}}(u, v, v) = 0$.

3. $\det_{\mathcal{B}}(u, v, u \wedge v) = \langle u \wedge v \mid u \wedge v \rangle = \|u \wedge v\|^2 > 0$.

4. $\|u \wedge v\|^2 = \det_{\mathcal{B}}(u, v, u \wedge v) = \|u \wedge v\| \|u\| \|v\| \sin(\widehat{u, v})$.

□

Proposition: Soient $u = (a, b, c)$ et $v = (\alpha, \beta, \gamma)$. Alors,

$$u \wedge v = (b\gamma - c\beta, \alpha c - \gamma a, a\beta - b\alpha).$$

Preuve:

On pose $u \wedge v = (x, y, z)$. Comme (e_1, e_2, e_3) est orthonormée, on a

$$x = \langle u \wedge v \mid e_1 \rangle = \det_{\mathcal{B}}(u, v, e_1) = \begin{vmatrix} a & \alpha & 1 \\ b & \beta & 0 \\ c & \gamma & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & \beta \\ c & \gamma \end{vmatrix};$$

$$y = \langle u \wedge v \mid e_2 \rangle = \begin{vmatrix} a & \alpha & 0 \\ b & \beta & 1 \\ c & \gamma & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a & \alpha \\ c & \gamma \end{vmatrix};$$

$$z = \langle u \wedge v \mid e_3 \rangle = \begin{vmatrix} a & \alpha & 0 \\ b & \beta & 0 \\ c & \gamma & 1 \end{vmatrix} = a\beta - b\alpha.$$

□

V.2 Calcul différentiel

Définition: Soit $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ où D est un ouvert. Soit $a \in D$. S'il existe $\ell_a \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ telle que

$$\forall h \in \mathbb{R}^n \text{ avec } \|h\| \text{ assez petite, } f(a+h) = f(a) + \ell_a(h) + \mathfrak{o}(\|h\|)$$

alors on dit que f est différentiable en a et ℓ_a est la différentielle de f en a . Si c'est le cas, alors

$$\exists! g_a \in \mathbb{R}^n, \forall h, \ell_a(h) = \langle g_a \mid h \rangle.$$

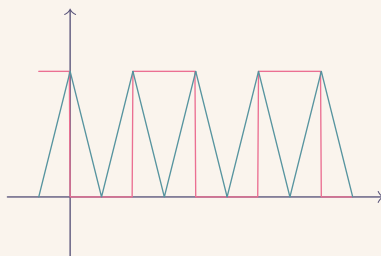
On dit que g_a est le gradient de f au point a .

Donc,

$$f(a+h) - f(a) \simeq \langle g_a \mid h \rangle.$$

Les résultats vus au chapitre 22 peuvent se retrouver avec cette nouvelle définition du gradient.

V.3 Séries de Fourier



Soit E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension infinie et $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ une application de E^2 dans $\mathbb{C}$ vérifiant

1. linéarité à gauche;
2. $\forall (u, v) \in E^2, \langle v \mid u \rangle = \overline{\langle u \mid v \rangle}$; (symétrie hermitienne)
3. $\forall u \in E, \langle u \mid u \rangle \geq 0$;
4. $\forall u \in E, \langle u \mid u \rangle = 0 \iff u = 0_E$.

Proposition: $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ est semi-linéaire à droite :

$$\langle u \mid \alpha v + \beta w \rangle = \bar{\alpha} \langle u \mid v \rangle + \bar{\beta} \langle u \mid w \rangle.$$

$\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ est donc sesquilinéaire.

$\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ est dit produit héermitien.

EXEMPLE:

Avec $E = \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{C})$, on a $\langle f \mid g \rangle = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) \overline{g(t)} dt$.

Définition: Soit $\mathcal{B} = (e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ une famille de E . On dit que $\mathcal{B}$ est une base hilber-

tienne si

$$\begin{cases} \forall x \in E, \exists! (c_n)_{n \in \mathbb{Z}}, x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e_n; \\ \forall n \in \mathbb{Z}, \|e_n\| = 1; \\ \forall p \neq q, \langle e_p | e_q \rangle = 0. \end{cases}.$$

Dans ce cas, $c_n = \langle x | e_n \rangle$.

EXEMPLE:

On pose

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{Z}, \quad e_n : [0, 2\pi] &\longrightarrow \mathbb{C} \\ t &\longmapsto e^{int} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle e_p | e_q \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ipt} e^{-iqt} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(p-q)t} dt \\ &= \begin{cases} 1 & \text{si } p = q \\ \frac{1}{2\pi} \left[\frac{e^{i(p-q)t}}{i(p-q)} \right]_0^{2\pi} = 0 & \text{si } p \neq q \end{cases} \end{aligned}$$

Soit

$$F = \left\{ \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e_n \mid (c_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}} \text{ tel que } \forall t, \sum c_n e_n(t) \text{ converge} \right\}.$$

Soit f 2π -périodique. On a

$$p_F(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e_n$$

$$\text{où } c_n = \langle f | e_n \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt.$$

On en déduit que

$$\Re(c_n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(nt) dt.$$

V.4 Espace-temps de Minkowsky

On modélise l'espace-temps par $E = \mathbb{R}^4$; c'est un espace affine et on y crée un “produit scalaire” (en utilisant une “norme”) :

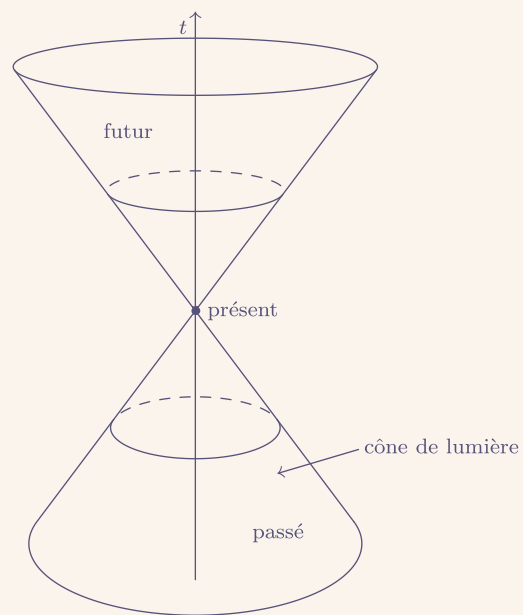
$$q(x, y, z, t) = x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2.$$

On en déduit que

$$\langle (x, y, z, t) | (x', y', z', t') \rangle = xx' + yy' + zz' - c^2 tt'.$$

Ce “produit scalaire” n'en est pas vraiment un : il est bilinéaire, symétrique **MAIS** pas positif.

$$(x, y, z, t) \text{ isotrope} \iff x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2.$$



Toute information contenue dans le cône passé nous est accessible ; s'il est sur sa surface, il faut que l'information y voyage à la vitesse de la lumière. Par contre, comme le temps n'est pas symétrique, on ne peut pas voir l'information future.