Chapitre 30

Intégrale de Riemann

Hugo Salou MP2I

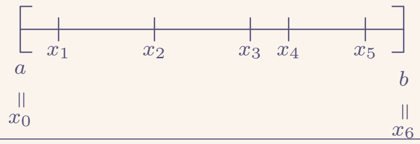
Dernière mise à jour le 14 juin 2022

TABLE DES MATIÈRES

Première partie

Intégrale d'une fonction en escaliers

Définition: Une subdivision du segment $[a, b]$ est une suite finie $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$.



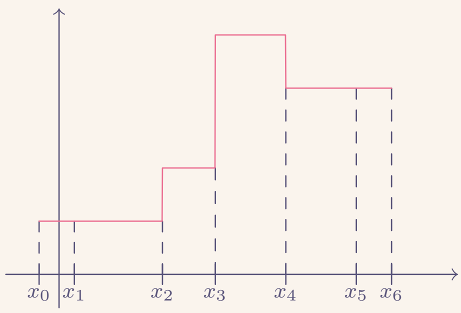
Remarque (Notation):
Dans ce chapitre, l'ensemble des subdivisions de $[a, b]$ est noté $\mathfrak{S}_{[a,b]}$.

Définition: Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$.

On dit que f est en escalier s'il existe $\sigma = (x_0, \ldots, x_n) \in \mathfrak{S}_{[a,b]}$ et $(c_0, \ldots, c_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ tels que

$$\forall i \in [\![0, n-1]\!]\,,\ \forall x \in]x_i,\, x_{i+1}[,\ f(x) = c_i.$$

On dit alors que σ est adaptée à f.



Définition: Soient $\sigma = (x_0, x_1, \ldots, x_n) \in \mathfrak{S}_{[a,b]}$ et $\sigma' = (x'_0, x'_1, \ldots, x'_p) \in \mathfrak{S}_{[a,b]}$. On dit alors que σ' est plus fine que σ si $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \subset \{x'_0, x'_1, \ldots, x'_n\}$. On note alors $\sigma' \prec \sigma$.

Proposition: Soient σ_1, σ_2 deux subdivisions de $[a, b]$. Alors il existe une subdivision σ_3 plus fine que σ_1 et σ_2.

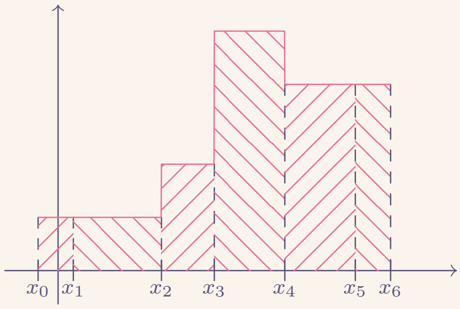
■

Proposition – Définition: Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction en escaliers. Soit $\sigma = (x_0, \ldots, x_n)$ une subdivision adaptée à f. Pour $i \in [\![0, n-1]\!]$, on pose c_i la valeur constante de f sur $]x_i, x_{i+1}[$.

Alors,

$$\sum_{i=1}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) c_i$$

ne dépend pas de la subdivision adaptée. On dit que c'est l'intégrale de f sur $[a, b]$. On note ce nombre $\displaystyle\int_{[a,b]} f$.



Pour définir l'intégrale d'une fonction continue, on peut utiliser deux méthodes :

1. L'intégrale d'une fonction continue est la limite d'une suite de fonctions en escaliers. Ces résultats seront vus l'année prochaine en *MPI*.
2. Les sommes de Darboux ; c'est la définition que l'on va utiliser.

Deuxième partie

Sommes de Darboux

Définition: Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$. Soit $\sigma = (x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathfrak{S}_{[a,b]}$. La <u>somme de Darboux supérieur</u> de f associé à σ est

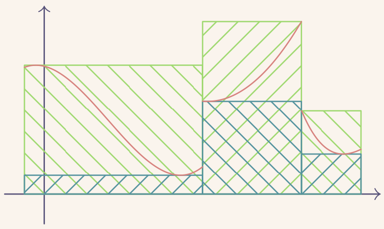
$$S_\sigma^+(f) = \sum_{i=1}^{n-1} (x_{i+1} - x_i)\, M_i$$

où $\forall i \in [\![0, n-1]\!]$, $M_i = \sup\limits_{]x_i, x_{i+1}[} f$.

La <u>somme de Darboux inférieure</u> de f associé à σ est

$$S_\sigma^-(f) = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i)\, m_i$$

où $m_i = \inf\limits_{]x_i, x_{i+1}[} f$.



Proposition: Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ bornée, σ et σ' deux subdivisions de $[a,b]$ avec $\sigma' \prec \sigma$. Alors

$$\begin{cases} S_{\sigma'}^+(f) \leqslant S_\sigma^+(f); \\ S_{\sigma'}^-(f) \geqslant S_\sigma^-(f). \end{cases}$$

■

Définition: Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ bornée.

L'<u>intégrale supérieure</u> de f est

$$I_{[a,b]}^+(f) = \inf_{\sigma \in \mathfrak{S}_{[a,b]}} \big(S_\sigma^+(f)\big).$$

L'<u>intégrale inférieure</u> de f est

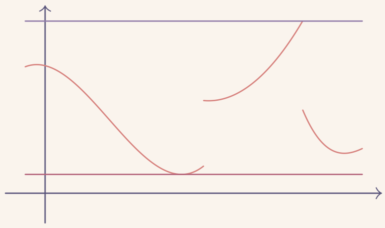
$$I_{[a,b]}^-(f) = \sup_{\sigma \in \mathfrak{S}_{[a,b]}} \big(S_\sigma^-(f)\big).$$

Remarque (justification de l'existence des bornes inférieures et supérieures):
Soit $m = \inf\limits_{[a,b]} f$. $\forall i \in [\![0, n-1]\!]$, $M_i \geqslant m$ et donc

$$\begin{aligned} S_\sigma^+(f) &= \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) M_i \\ &\geqslant \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) m \\ &\geqslant m(b-a). \end{aligned}$$

De même, avec $M = \sup\limits_{[a,b]} f$, $\forall \sigma \in$

$\mathfrak{S}_{[a,b]}$, $S^-_\sigma(f) \leqslant M(b-a)$.



Proposition: Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ bornée. Alors

$$I^-_{[a,b]}(f) \leqslant I^+_{[a,b]}(f).$$

■

Définition: Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ bornée. On dit que f est Riemann-intégrable si $I^-_{[a,b]}(f) = I^+_{[a,b]}(f)$. Dans ce cas, ce nombre est noté $\displaystyle\int_{[a,b]} f$.

Troisième partie

Propriétés de l'intégrale

Proposition: Soient f et g deux fonctions définies de $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Si $f \leqslant g$, alors

$$I^-_{[a,b]}(f) \leqslant I^-_{[a,b]}(g).$$

■

Corollaire: Soient f et g deux fonctions intégrables définies sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Si $f \leqslant g$, alors

$$\int_{[a,b]} f \leqslant \int_{[a,b]} g.$$

□

Proposition (Chasles)**:** Soit f une fonction définie sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soit $c \in]a,b[$. Alors,

$$\begin{cases} I^-_{[a,b]}(f) = I^-_{[a,c]}(f) + I^-_{[c,b]}(f) \\ I^+_{[a,b]}(f) = I^+_{[a,c]}(f) + I^+_{[c,b]}(f). \end{cases}$$

■

Corollaire: Soit f une fonction définie sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soit $c \in]a,b[$. Alors,

$$\int_{[a,b]} f = \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f.$$

□

Proposition: Soient f et g deux fonctions intégrables définies sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Alors,

$$\begin{cases} I^-_{[a,b]}(f+g) \geqslant I^-_{[a,b]}(f) + I^-_{[a,b]}(f) \\ I^+_{[a,b]}(f+g) \leqslant I^+_{[a,b]}(f) + I^+_{[a,b]}(f) \end{cases}$$

■

Proposition: Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a

$$I^-_{[a,b]}(\lambda f) = \begin{cases} \lambda I^-_{[a,b]}(f) & \text{si } \lambda \geqslant 0 \\ \lambda I^+_{[a,b]}(f) & \text{si } \lambda \leqslant 0 \end{cases}$$

et

$$I^+_{[a,b]}(\lambda f) = \begin{cases} \lambda I^+_{[a,b]}(f) & \text{si } \lambda \geqslant 0 \\ \lambda I^-_{[a,b]}(f) & \text{si } \lambda \leqslant 0 \end{cases}.$$

■

Quatrième partie

Théorème fondamental de l'Analyse

Théorème: Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue. Alors f est Riemann-intégrable.

■

On a aussi démontré le théorème suivant :

Théorème: Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ conitnue. Alors

$$x \mapsto \int_{[a,x]} f$$

est une primitive de f. □

Remarque (Notation):
Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue. On note plutôt $\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ à la place de $\int_{[a,b]} f$.

On note aussi $\int_b^a f(t)\ \mathrm{d}t = -\int_{[a,b]} f$.

Corollaire: Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et F une primitive de f. Alors

$$\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = F(b) - F(a).$$

■

Cinquième partie

Fonctions continues par morceaux

Définition: Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$. On dit que f est <u>continue par morceaux</u> si,

$$\exists \sigma = (x_0, \ldots, x_n) \in \mathfrak{S}_{[a,b]}, \begin{cases} \forall i \in [\![0, n-1]\!]\,,\ f_{\big|]x_i, x_{i+1}[} \text{ est continue;} \\ \forall i \in [\![1, n-1]\!]\,,\ \lim\limits_{\substack{x \to x_i \\ <}} f(x) \in \mathbb{R} \text{ et } \lim\limits_{\substack{x \to x_i \\ >}} f(x) \in \mathbb{R}; \\ \lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) \in \mathbb{R};\ \lim\limits_{\substack{x \to b \\ <}} f(x) \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Théorème: Toute fonction continue par morceaux sur un segment est Riemann-intégrable sur ce segment. □

Définition: Soit $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. On dit que f est <u>continue par morceaux sur I</u> si f est continue par morceaux sur tout segment inclus dans I.

Remarque:

$$\begin{aligned} \delta : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 0, \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

δ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$. On a $\displaystyle\int_{[0,1]} \delta = 0$, et $\forall x \in [0,1],\ f(x) \geqslant 0$. Mais, $\delta \neq 0$.

Sixième partie

Sommes de Riemann

Théorème: Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux.

À faire : schéma 1

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\sum_{i=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right)\right) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

■

Proposition: Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue par morceaux et $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f\big(\underbrace{a + i\tfrac{b-a}{n}}_{x_i}\big) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t.$$

□

Remarque:
On suppose à présent f de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$. f' est continue sur $[a,b]$: on considère

$$M = \max_{x \in [a,b]} \left|f'(x)\right|.$$

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N}^*, \left| \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t - \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \right| &= \left| \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \big(f(t) - f(x_i)\big)\ \mathrm{d}t \right| \\
&\leqslant \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left|f(t) - f(x_i)\right|\ \mathrm{d}t \\
&\leqslant \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} M|t - x_i|\ \mathrm{d}t \\
&\leqslant M \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{2} \\
&\leqslant \frac{M}{2} \left(\frac{b-a}{n}\right)^2 n \\
&= \frac{M(b-a)^2}{2n}.
\end{aligned}$$

Par exemple, on veut calculer une valeur approchée de $\ln 2$ à 10^{-3} près :

$$\ln 2 = \int_1^2 \frac{1}{t}\ \mathrm{d}t.$$

Soit $f : t \mapsto \dfrac{1}{t}$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[1,2]$.

$$\forall t \in [1,2],\ \left|f'(t)\right| = \frac{1}{t^2} \leqslant 1$$

d'où $M = 1$.

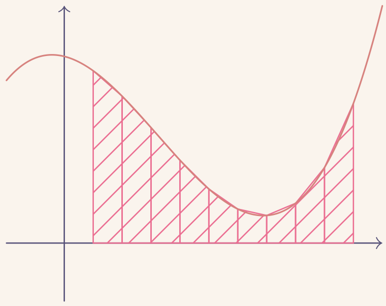
On cherche $n \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\frac{1(2-1)^2}{2n} \leqslant 10^{-3}$$

i.e. $n \geqslant 500$.

Donc, $\displaystyle \frac{1}{500} \sum_{i=0}^{499} \frac{1}{1 + \frac{i}{500}} \simeq 0{,}693$ est une valeur approchée de $\ln 2$ à 10^{-3} près.

Remarque (Méthode des trapèzes):



Au lieu d'approximer l'intégrale par des rectangles, on utilise des trapèzes.

Septième partie

Retour sur les formules de Taylor

Proposition: Soit $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et F une primitive de f. On suppose

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i (x-a)^i + \underset{x \to a}{o}\big((x-a)^n\big).$$

Alors,

$$F(x) = F(a) + \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \frac{(x-a)^{i+1}}{i+1} + \underset{x \to a}{o}\big((x-a)^{n+1}\big).$$

■

Corollaire: Soit $f : \overset{\substack{a \\ \cap}}{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^n$. Alors,

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i + \underset{x \to a}{o}\big((x-a)^n\big).$$

■

Huitième partie

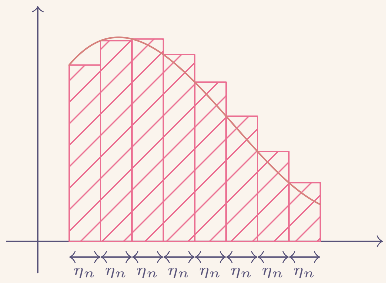
Fonctions réglées

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue. Cette fonction est donc uniformément continue (théorème de Heine) :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall (x,y) \in [a,b]^2,\ |x-y| \leqslant \eta \implies \big|f(x)-f(y)\big| \leqslant \varepsilon.$$

D'où

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \exists \eta_n > 0,\ |x-y| \leqslant \eta_n \implies \big|f(x)-f(y)\big| \leqslant \frac{1}{n}.$$



Cependant, contrairement au sommes de Darboux, cette construction utilise des notions que l'on admet : notamment, la convergence d'une suite de fonctions.