Chapitre 30

# TD

Hugo Salou MP2I

Dernière mise à jour le 16 juin 2022

## Table des matières


**Exercice 6** 1

**Exercice 3** 2

**Exercice 2** 2

**Exercice 9** 3

**Exercice 1** 4

**Exercice 4** 4

**Exercice 5** 4

**Exercice 7** 5

**Exercice 8** 6

**Exercice 10** 7


# Exercice 6

$$\lim_{n\to+\infty} \underbrace{\left(\frac{(2n)!}{n^n\, n!}\right)^{\frac{1}{n}}}_{u_n} = ?$$

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ln(u_n) &= \frac{1}{n}\ln\left(\frac{(2n)!}{n^n\, n!}\right) \\
&= \frac{1}{n}\ln\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{n+k}{n}\right) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)
\end{aligned}$$

Si $f \in \mathscr{C}^0_{\text{pm}}$ sur $[0,1]$ (continue par morceaux), alors

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 f(t)\ \mathrm{d}t.$$

La fonction $t \mapsto \ln(1+t)$ est $\mathscr{C}^0$ sur $[0,1]$ donc,

$$\begin{aligned}\ln(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \ln(1+t)\ \mathrm{d}t &= [(1+t)\ \ln(1+t) - (1+t)]_0^1 \\ &= 2\ln 2 - 2 + 1 \\ &= 2\ln 2 - 1\end{aligned}$$

# Exercice 3

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue. On suppose $\displaystyle\int_0^1 f(t)\ \mathrm{d}t = 0$. On note $m = \min\limits_{[0,1]} f$ et $M = \max\limits_{[0,1]} f$. Montrer que

$$\int_0^1 f^2(t)\ \mathrm{d}t \leqslant -mM.$$

$$\forall t \in [0,1],\ \big(M - f(t)\big)\big(f(t) - m\big) \geqslant 0$$

donc

$$\int_0^1 \big(M - f(t)\big)\big(f(t) - m\big)\ \mathrm{d}t \geqslant 0$$

et donc

$$-mM - \int_0^1 f^2(t)\ \mathrm{d}t \geqslant 0.$$

On en déduit que

$$\int_0^1 f^2(t)\ \mathrm{d}t \leqslant -mM.$$

# Exercice 2

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue. Déterminer une condition nécessaire et suffisante poour que

$$\left|\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t\right| = \int_a^b |f(t)|\ \mathrm{d}t.$$

Condition suffisante : $f$ est de signe constant sur $[a,b]$.

On démontre que c'est une condition nécessaire. On suppose donc

$$\left|\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t\right| = \int_a^b |f(t)|\ \mathrm{d}t.$$

— <u>Cas 1</u> On suppose $\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t \geqslant 0$. On sait que

$$\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = \int_a^b |f(t)|\ \mathrm{d}t$$

donc

$$\int_a^b \underbrace{\big(|f(t)| - f(t)\big)}_{\substack{\geqslant 0\\ \text{de classe } \mathscr{C}^0}}\ \mathrm{d}t = 0.$$

On en déduit que

$$\forall t \in [a,b],\ f(t) = |f(t)| \geqslant 0.$$

— <u>Cas 2</u> On suppose $\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t \leqslant 0$. On sait que

$$-\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = \int_a^b |f(t)|\ \mathrm{d}t$$

donc

$$\int_a^b \underbrace{\big(|f(t)| + f(t)\big)}_{\substack{\geqslant 0\\ \text{de classe } \mathscr{C}^0}}\ \mathrm{d}t = 0.$$

On en déduit que

$$\forall t \in [a,b],\ f(t) = -|f(t)| \leqslant 0.$$

## Exercice 9

Montrer que

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],\ x - \frac{x^3}{6} \leqslant \sin x \leqslant x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}.$$

On sait que sin est de classe $\mathscr{C}^\infty$ d'où sin est de classe $\mathscr{C}^5$.

On a

$$\begin{aligned}\sin x &= x - \frac{x^3}{6} + \int_0^x \frac{(x-t)^4}{4!} \sin^{(5)}(t)\ \mathrm{d}t\\ &= x - \frac{x^3}{6} + \int_0^x \frac{(x-t)^4}{4!} \underbrace{\cos(t)}_{\in[0,1]}\ \mathrm{d}t\end{aligned}$$

On en déduit que $\sin x \geqslant x - \dfrac{x^3}{6}$.

$$\begin{aligned}\sin x &\leqslant x - \frac{x^3}{6} + \int_0^x \frac{(x-t)^4}{24}\ \mathrm{d}t\\ &\leqslant x - \frac{x^3}{6} + \left[-\frac{(x-t)^5}{120}\right]_0^x\\ &\leqslant x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}.\end{aligned}$$

# Exercice 1

Notons $\varphi : x \mapsto \displaystyle\int_x^{x+T} f(t)\ \mathrm{d}t$.

On pose $F$ une primitive de $f$ ($f$ est continue). D'où

$$\forall x,\ \varphi(X) = F(x+T) - F(x).$$

On dérive cette expression :

$$0 = \varphi'(x) = f(x+T) - f(x).$$

Ainsi, $f$ est $T$-périodique.

# Exercice 4

Soit $f : t \mapsto \begin{cases} \sin\left(\dfrac{1}{t}\right) & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

On suppose $f$ continue par morceaux. Soit $I = [-1, 1]$ et $\sigma = (a_0, \dots, a_n)$ une subdivision de $I$ telle que

$$\begin{cases} \forall i \in [\![1, n-1]\!],\ f\big|_{]a_i, a_{i+1}[} \text{ continue;} \\ \forall i \in [\![1, n-1]\!],\ f \text{ a une limite réelle à gauche et à droite.} \end{cases}$$

Comme $f$ n'est pas continue en 0,

$$\exists i,\ 0 = a_i.$$

Or, $f$ n'a pas de limite en 0 à droite : une contradiction.

En effet, les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne convergent pas vers la même limite avec

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \begin{cases} x_n = \dfrac{1}{n\pi} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0^+ \\ y_n = \dfrac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0^+ \end{cases}$$

car

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \begin{cases} f(x_n) = \sin(n\pi) = 0 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \\ f(y_n) = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 \neq 0. \end{cases}$$

Donc $f$ n'a pas de limite en $0^+$.

# Exercice 5

1.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2} &= \sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{1}{n}}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}\\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}\\ &\xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{k^2+n^2} &= \sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{1}{n}\times\frac{k}{n}}{\left(\frac{k}{n}\right)^2+1}\\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{k}{n}}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}\\ &\xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln 2.\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+2kn}} &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1+2\frac{k}{n}}}\\ &\xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+2t}}\,\mathrm{d}t = \sqrt{3}-1.\end{aligned}$$

## Exercice 7

—

$$\sum_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{k}{n}\right)\sin\left(\frac{k}{n^2}\right).$$

Pour calculer cette somme, on utilise l'encadrement

$$\forall x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right],\ x-\frac{x^3}{6}\leqslant \sin x\leqslant x.$$

D'où,

$$\forall n\in\mathbb{N}\ \forall k\in[\![1,n]\!],\ \frac{k}{n^2}-\frac{k^3}{6n^6}\leqslant \sin\left(\frac{k}{n^2}\right)\leqslant\frac{k}{n^2}$$

et donc

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n^2}-\frac{k^3}{6n^6}\right)\sin\left(\frac{k}{n}\right)\leqslant\sum_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{k}{n}\right)\sin\left(\frac{k}{n^2}\right)\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\sin\left(\frac{k}{n}\right).$$

Or,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\sin\left(\frac{k}{n}\right) &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\sin\left(\frac{k}{n}\right)\\ &\xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 x\sin x\,\mathrm{d}x = [-x\cos x]_0^1+\int_0^1\cos x\,\mathrm{d}x\\ &= -\cos 1+\sin 1.\end{aligned}$$

Et,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k^3}{6n^6} \sin\left(\frac{k}{n}\right) = \underbrace{\frac{1}{6n^2}}_{\longrightarrow 0} \times \underbrace{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^3 \sin\left(\frac{k}{n}\right)}_{\text{limite finie}}$$

Par encadrement,

$$\sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k}{n}\right) \sin\left(\frac{k}{n^2}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sin 1 - \cos 1.$$

— À essayer

## Exercice 8

On pose

$$f_n : x \mapsto \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(kx)}{k}.$$

Soit $x \not\equiv 0 \ \ [2\pi]$.

$$\begin{aligned}
\forall x,\ f_n'(x) = \sum_{k=1}^{n} \cos(kx) &= \mathfrak{Re}\left(\sum_{k=1}^{n} e^{ikx}\right) \\
&= \mathfrak{Re}\left(e^{ix}\, \frac{1-\left(e^{ix}\right)^n}{1-e^{ix}}\right) \\
&= \mathfrak{Re}\left(e^{ix}\, \frac{e^{inx/2}}{e^{ix/2}}\, \frac{\cancel{2i}\sin(nx/2)}{\cancel{2i}\sin(x/2)}\right) \\
&= \frac{\sin(nx/2)}{\sin(x/2)} \cos\left((n+1)\ \frac{x}{2}\right).
\end{aligned}$$

À faire : Tableau de variations / de signes

Donc $x_n = \dfrac{\pi}{n+1}$.

$$\begin{aligned}
\forall n,\ f_n(x_n) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)}{k} \\
&= \frac{\pi}{n+1} \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)}{\frac{k\pi}{n+1}} \\
&= \frac{\pi}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} g\left(\frac{k}{n+1}\right) - \cancel{\frac{\pi}{n+1}\sin(\pi)} \\
&\xrightarrow[n\to+\infty]{} \pi \int_0^1 g(x)\ \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

où

$$g : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{\sin(\pi x)}{\pi x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

## Exercice 10

Soit $x \in \mathbb{R}$. $f$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[x, x+1]$.

$$f(x+1) = f(x) + f'(x) + \int_x^{x+1} f''(t)\ (x+1-t)\ \mathrm{d}t.$$

$$(*) : \qquad \left|\int_x^{x+1} f''(t)\ (x+1-t)\ \mathrm{d}t\right| \leqslant \int_x^{x+1} \left|f''(t)\right|\ |x+1-t|\ \mathrm{d}t.$$

On note $M(X) = \max\limits_{t \in [x, x+1]} \left|f''(t)\right|$ et donc

$$(*) \leqslant M(x) \int_x^{x+1} (x+1-t)\ \mathrm{d}t = \frac{M(x)}{2}.$$

$$\exists c_x \in [x, x+1],\ M(x) = \left|f''(c_x)\right|.$$

Or, $c_x \geqslant x$ donc $c_x \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$ et donc $f''(c_x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$.

Par encadrement, $\displaystyle\int_x^{x+1} f''(t)\ (x+1-t)\ \mathrm{d}t \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$.

Or, $f(x+1) - f(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ donc $f'(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.