Chapitre 30

Intégrale de Riemann

Hugo Salou MP2I

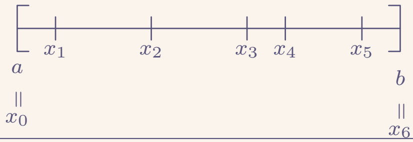
Dernière mise à jour le 14 juin 2022

TABLE DES MATIÈRES

Première partie

Intégrale d’une fonction en escaliers

Définition: Une <u>subdivision</u> du segment $[a, b]$ est une suite finie $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$.



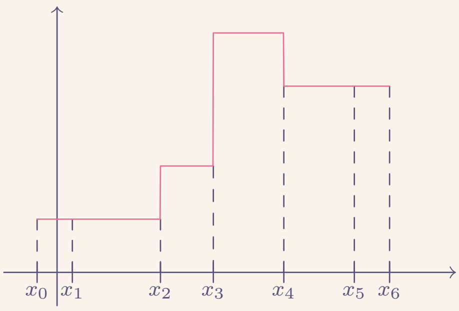
Remarque (Notation):
Dans ce chapitre, l'ensemble des subdivisions de $[a, b]$ est noté $\mathfrak{S}_{[a,b]}$.

Définition: Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$.

On dit que f est en <u>escalier</u> s'il existe $\sigma = (x_0, \dots, x_n) \in \mathfrak{S}_{[a,b]}$ et $(c_0, \dots, c_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ tels que

$$\forall i \in [\![0, n-1]\!],\ \forall x \in]x_i, x_{i+1}[,\ f(x) = c_i.$$

On dit alors que σ est <u>adaptée</u> à f.



Définition: Soient $\sigma = (x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathfrak{S}_{[a,b]}$ et $\sigma' = (x'_0, x'_1, \dots, x'_p) \in \mathfrak{S}_{[a,b]}$. On dit alors que σ' est <u>plus fine</u> que σ si $\{x_0, x_1, \dots, x_n\} \subset \{x'_0, x'_1, \dots, x'_n\}$. On note alors $\sigma' \prec \sigma$.

Proposition: Soient σ_1, σ_2 deux subdivisions de $[a, b]$. Alors il existe une subdivision σ_3 plus fine que σ_1 et σ_2.

Preuve:
Soit $\sigma_1 = (x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathfrak{S}_{[a,b]}$ et $\sigma_2 = (x'_0, x'_1, \dots, x'_p) \in \mathfrak{S}_{[a,b]}$.

On pose $A = \{x_0, \dots, x_n\} \cup \{x'_0, \dots, x'_p\}$. On ordonne dans l'ordre croissant les éléments de A :

$$A = \{x''_0, x''_1, \dots, x''_q\}$$

avec $a = x''_0 < x''_1 < \dots < x''_q = b$. On pose $\sigma_3 = (x''_0, x''_1, \dots, x''_q) \in \mathfrak{S}_{[a,b]}$. On a bien $\sigma_3 \prec \sigma_2$ et $\sigma_3 \prec \sigma_1$. $\square$

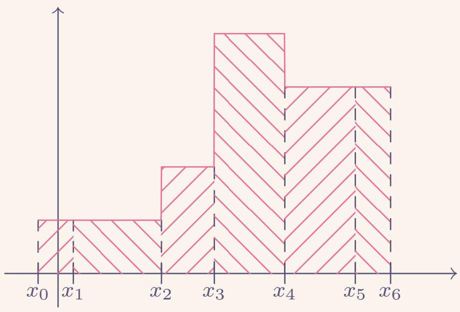
Proposition – Définition: Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction en escaliers. Soit $\sigma =$

$(x_0, \dots, x_n)$ une subdivision adaptée à f. Pour $i \in [\![0, n-1]\!]$, on pose c_i la valeur constante de f sur $]x_i, x_{i+1}[$.

Alors,

$$\sum_{i=1}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) c_i$$

ne dépend pas de la subdivision adaptée. On dit que c'est l'<u>intégrale</u> de f sur $[a, b]$. On note ce nombre $\displaystyle\int_{[a,b]} f$.



Preuve:
Soit $\sigma' = (x'_0, \dots, x'_p)$ une subdivision adaptée à f. On considère σ'' une subdivision de $[a, b]$ plus fine que σ et σ'. On pose

$$\sigma'' = (a, x_{1,1}, x_{1,2}, \dots, \underset{\substack{\| \\ x_1}}{\overset{\substack{x_{2,0} \\ \|}}{x_{1,i_1}}}, x_{2,1}, \dots, \underset{\substack{\| \\ x_2}}{\overset{\substack{x_{3,0} \\ \|}}{x_{2,i_2}}}, \dots, b)$$

On a

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!], \forall j \in [\![0, u_k - 1]\!], \forall x \in]x_{k,j}, x_{k,j+1}[, f(x) = c_k.$$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{i_k - 1} (x_{k,j+1} - x_{k,j}) c_k &= \sum_{k=0}^{n-1} c_k \sum_{j=0}^{i_k-1} (x_{k,j+1} - x_{k,j}) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k,i_k} - x_{k,0}) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} c_k (x_{k+1} - x_k)
\end{aligned}$$

De même, comme $\sigma \prec \sigma'$, on a aussi l'égalité avec $\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} c'_k (x'_{k+1} - x'_k)$ où c'_k est la valeur de f sur $]x'_k, x'_{k+1}[$. □

Pour définir l'intégrale d'une fonction continue, on peut utiliser deux méthodes :

1. L'intégrale d'une fonction continue est la limite d'une suite de fonctions en escaliers. Ces résultats seront vus l'année prochaine en *MPI*.
2. Les sommes de Darboux ; c'est la définition que l'on va utiliser.

Deuxième partie

Sommes de Darboux

Définition: Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$. Soit $\sigma = (x_0, x_1, \ldots, x_n) \in \mathfrak{S}_{[a,b]}$. La somme de Darboux supérieur de f associé à σ est

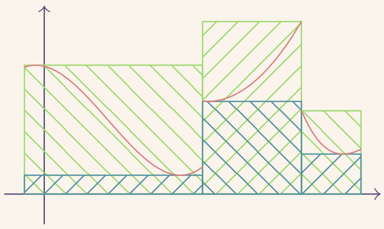
$$S_\sigma^+(f) = \sum_{i=1}^{n-1} (x_{i+1} - x_i)\, M_i$$

où $\forall i \in [\![0, n-1]\!]$, $M_i = \sup\limits_{]x_i, x_{i+1}[} f$.

La somme de Darboux inférieure de f associé à σ est

$$S_\sigma^-(f) = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i)\, m_i$$

où $m_i = \inf\limits_{]x_i, x_{i+1}[} f$.



Proposition: Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ bornée, σ et σ' deux subdivisions de $[a,b]$ avec $\sigma' \prec \sigma$. Alors

$$\begin{cases} S_{\sigma'}^+(f) \leqslant S_\sigma^+(f); \\ S_{\sigma'}^-(f) \geqslant S_\sigma^-(f). \end{cases}$$

Preuve:
On pose $\sigma = (x_0, \ldots, x_n)$.

$$\forall i \in [\![0, n-1]\!]\,,\ ]x_i, x_{i+1}[= \bigcup_{k=0}^{\ell-1}]y_k, y_{k+1}[$$

avec $y_k \in \sigma'$ pour tout k.

$$\forall x \in]y_k, y_{k+1}[,\ f(x) \leqslant M_i.$$

donc M_i majore $f\big(]y_k, y_{k+1}[\big)$ et donc $\sup\limits_{]y_k, y_{k+1}[} f \leqslant M_i$. Donc,

$$\sum_{k=0}^{\ell-1} (y_{k+1} - y_k) \sup_{]y_k, y_{k+1}[} \leqslant M_i \sum_{k=0}^{\ell-1} (y_{k+1} - y_k) = M_i(x_{i+1} - x_i).$$

Ainsi,

$$S_{\sigma'}^+(f) \leqslant \sum_{i=0}^{n-1} M_i(x_{i+1} - x_i) = S_\sigma^+(f).$$

De même pour la somme de Darboux inférieure. $\square$

Définition: Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ bornée.

L'<u>intégrale supérieure</u> de f est

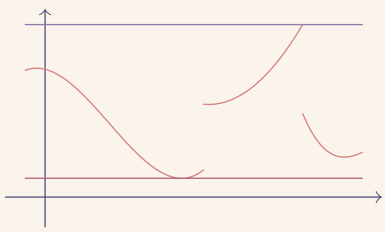
$$I^+_{[a,b]}(f) = \inf_{\sigma \in \mathfrak{S}_{[a,b]}} \left(S^+_\sigma(f)\right).$$

L'<u>intégrale inférieure</u> de f est

$$I^-_{[a,b]}(f) = \sup_{\sigma \in \mathfrak{S}_{[a,b]}} \left(S^-_\sigma(f)\right).$$

Remarque (justification de l'existence des bornes inférieures et supérieures):
Soit $m = \inf\limits_{[a,b]} f$. $\forall i \in [\![0, n-1]\!]$, $M_i \geqslant m$ et donc

$$\begin{aligned} S^+_\sigma(f) &= \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) M_i \\ &\geqslant \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) m \\ &\geqslant m(b-a). \end{aligned}$$



De même, avec $M = \sup\limits_{[a,b]} f$, $\forall \sigma \in \mathfrak{S}_{[a,b]}$, $S^-_\sigma(f) \leqslant M(b-a)$.

Exemple: 1. Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ en escaliers.

$$I^+_{[a,b]}(f) = \int_{[a,b]} f = I^-_{[a,b]}(f).$$

2. On pose

$$\begin{aligned} f : [0,1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \\ 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q}. \end{cases} \end{aligned}$$

Rappel : on a $f = \mathbb{1}_\mathbb{Q}$.
On a $I^+_{[0,1]}(f) = 1$ et $I^-_{[0,1]}(f) = 0$.

3. On pose

$$\begin{aligned} f : [0,1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x \end{aligned}$$

Soit $\sigma_n = \left(0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1\right)$.

$$S^+_{\sigma_n}(f) = \sum_{i=0}^{n} \frac{1+1}{n} \times \frac{i}{n} = \frac{1}{n^2} \times \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n-1}{2n}.$$

On a, pour tout n non nul, $I^+_{[0,1]} f \leqslant \frac{n+1}{n}$ donc $I^+_{[a,b]} \leqslant \frac{1}{2}$.
De même,

$$S^-_{\sigma_n}(f) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n} \times \frac{i}{n} = \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n-1}{2n}.$$

D'où, pour tout n non nul, $I^-_{[0,1]}(f) \geqslant \frac{n-1}{2n}$ et docn $I^-_{[0,1]}(f) \geqslant \frac{1}{2}$.
Or, $\frac{1}{2} \leqslant I^-_{[0,1]}(f) \leqslant I^+_{[0,1]}(f) \leqslant \frac{1}{2}$ (voir ci-après). Et donc,

$$I^-_{[0,1]}(f) = I^+_{[0,1]}(f) = \frac{1}{2}.$$

Proposition: Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ bornée. Alors
$$I^-_{[a,b]}(f) \leqslant I^+_{[a,b]}(f).$$

Preuve:
Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_{[a,b]}$. Soit $\sigma' \in \mathfrak{S}_{[a,b]}$. On considère $\sigma'' \in \mathfrak{S}_{[a,b]}$ telle que $\sigma'' \prec \sigma$ et $\sigma'' \prec \sigma'$. On a donc
$$S^-_{\sigma'}(f) \leqslant S^-_{\sigma''}(f) \leqslant S^+_{\sigma''}(f) \leqslant S^+_{\sigma}(f).$$

On fixe $\sigma \in \mathfrak{S}_{[a,b]}$.
$$\forall \sigma' \in \mathfrak{S}_{[a,b]},\ S^-_{\sigma'}(f) \leqslant S^+_{\sigma}(f)$$
donc $S^+_\sigma(f)$ majore toutes les sommes de Darboux inférieures de f donc
$$I^-_{[a,b]}(f) \leqslant S_\sigma(f)$$
donc $I^-_{[a,b]}(f)$ minore toutes les sommes de Darboux supérieures de f. On a donc
$$I^+_{[a,b]}(f) \geqslant I^-_{[a,b]}(f).$$
□

Définition: Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ bornée. On dit que f est <u>Riemann-intégrable</u> si $I^-_{[a,b]}(f) = I^+_{[a,b]}(f)$. Dans ce cas, ce nombre est noté $\displaystyle\int_{[a,b]} f$.

Troisième partie

Propriétés de l'intégrale

Proposition: Soient f et g deux fonctions définies de $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Si $f \leqslant g$, alors
$$I^-_{[a,b]}(f) \leqslant I^-_{[a,b]}(g).$$

Preuve:
On suppose $f \leqslant g$.
$$\begin{aligned} I^-(f) \leqslant I^-(g) &\iff \sup_{\sigma\in\mathfrak{S}} S^-_\sigma(f) \leqslant \sup_{\sigma\in\mathfrak{S}} S^-_\sigma(g) \\ &\iff \forall \sigma \in \mathfrak{S},\ S^-_\sigma(f) \leqslant \sup_{\sigma'\in\mathscr{S}} I^-_{\sigma'}(g) \end{aligned}$$

Soit $\sigma \in \mathfrak{S}$. On pose $\sigma = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ et, pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, $m_i = \inf_{]x_i,x_{i+1}[} f)$.
Alors,
$$S^-_\sigma(f) = \sum_{i=1}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) m_i.$$
On pose aussi, pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, $m'_i = \inf_{]x_i,x_{i+1}[}(g)$.

Soit $i \in [\![0, n-1]\!]$.
$$\begin{aligned} m_i \leqslant m'_i &\iff \inf_{]x_i,x_{i+1}[}(f) \leqslant \inf_{]x_i,x_{i+1}[}(g) \\ &\iff \forall x \in]x_i, x_{i+1}[,\ \inf_{]x_i,x_{i+1}[}(f) \leqslant g(x) \end{aligned}$$

Soit $x \in]x_i, x_{i+1}[$. On sait que
$$\inf_{]x_i,x_{i+1}[}(f) \leqslant f(g) \leqslant g(x).$$
On en déduit que
$$S^-_\sigma(f) \leqslant \sum_{i=0}^{n-1} (x_i - x_{i+1}) m'_i = S^-_\sigma(g) \leqslant \sup_{\sigma'\in\mathfrak{S}} S^-_{\sigma'}(g).$$
□

Exercice:
Démontrer le même résultat avec les sommes de Darboux supérieures :
$$I^+_{[a,b]}(f) \leqslant I^+_{[a,b]}(g).$$

Corollaire: Soient f et g deux fonctions intégrables définies sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Si $f \leqslant g$, alors
$$\int_{[a,b]} f \leqslant \int_{[a,b]} g.$$
□

Proposition (Chasles)**:** Soit f une fonction définie sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soit

$c \in]a,b[$. Alors,

$$\begin{cases} I^-_{[a,b]}(f) = I^-_{[a,c]}(f) + I^-_{[c,b]}(f) \\ I^+_{[a,b]}(f) = I^+_{[a,c]}(f) + I^+_{[c,b]}(f). \end{cases}$$

Preuve:

— $I^-_{[a,b]}(f) \leqslant I^-_{[a,c]}(f) + I^-_{[c,b]}(f) \iff \forall \sigma \in \mathfrak{S}_{[a,b]},\ S^-_\sigma(f) \leqslant I^-_{[a,c]}(f) + I^-_{[c,b]}(f)$.
Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_{[a,b]}$. On pose $\sigma = (x_0, x_1, \dots, x_n)$. On note $k \in [\![0, n-1]\!]$ tel que $x_k \leqslant c \leqslant x_{k+1}$.
On pose aussi $\sigma_1 = (x_0, x_1, \dots, x_k, c) \in \mathfrak{S}_{[a,c]}$ et $\sigma_2 = (c, x_{k+1}, \dots, x_n) \in \mathfrak{S}_{[c,b]}$.
$\sigma_1 \cup \sigma_2$ est une subdivision plus fine que σ. On en déduit que

$$S^-_\sigma(f) \leqslant S^-_{\sigma_1 \cup \sigma_2}(f) = \underbrace{S^-_{\sigma_1}(f)}_{\substack{\wedge\!\!\!/ \\ I^-_{[a,c]}(f)}} + \underbrace{S^-_{\sigma_2}(f)}_{\substack{\wedge\!\!\!/ \\ I^-_{[c,b]}(f)}}.$$

—

$$\begin{aligned} I^-_{[a,b]}(f) \geqslant I^-_{[a,c]}(f) + I^-_{[c,b]}(f) &\iff I^-_{[a,c]}(f) \geqslant I^-_{[a,b]}(f) - I^-_{[c,b]}(f) \\ &\iff \forall \sigma_1 \in \mathfrak{S}_{[a,c]},\ S^-_{\sigma_1} \leqslant I^-_{[a,b]}(f) - I^-_{[c,b]}(f) \\ &\iff \forall \sigma_1 \in \mathfrak{S}_{[a,c]},\ I^-_{[c,b]}(f) \leqslant I^-_{[a,b]}(f) - S^-_{\sigma_1}(f) \\ &\iff \forall \sigma_1 \in \mathfrak{S}_{[a,c]},\ \forall \sigma_2 \in \mathfrak{S}_{[c,b]},\ S^-_{\sigma_2}(f) \leqslant I^-_{[a,b]}(f) - S^-_{\sigma_1}(f). \end{aligned}$$

Soient $\sigma \in \mathscr{S}_{[a,c]}$ et $\sigma_2 \in \mathfrak{S}_{[c,b]}$.

$$S^-_{\sigma_1}(f) + S^-_{\sigma_2}(f) = S^-_{\sigma_1 \cup \sigma_2}(f) \leqslant I^-_{[a,b]}(f).$$

□

Corollaire: Soit f une fonction définie sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soit $c \in]a,b[$. Alors,

$$\int_{[a,b]} f = \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f.$$

□

Proposition: Soient f et g deux fonctions intégrables définies sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Alors,

$$\begin{cases} I^-_{[a,b]}(f+g) \geqslant I^-_{[a,b]}(f) + I^-_{[a,b]}(f) \\ I^+_{[a,b]}(f+g) \leqslant I^+_{[a,b]}(f) + I^+_{[a,b]}(f) \end{cases}$$

Preuve:

$$\begin{aligned}
I^-(f+g) \geqslant I^-(f)+I^-(g) &\iff I^-(f) \leqslant I^-(f+g)-I^-(g)\\
&\iff \forall \sigma \in \mathfrak{S}_{[a,b]}, S_\sigma^-(f) \leqslant I^-(f+g)-I^-(g)\\
&\iff \forall \sigma \in \mathfrak{S},\ I^-(g) \leqslant I^-(f+g)-S_\sigma^-(f)\\
&\iff \forall \sigma \in \mathfrak{S}, \forall \sigma' \in \mathfrak{S},\ S_{\sigma'}^-(g) \leqslant I^-(f+g)-I_\sigma^-(f)\\
&\iff \forall \sigma \in \mathfrak{S}, \forall \sigma' \in \mathfrak{S}, S_\sigma^-(f)+S_{\sigma'}^-(g) \leqslant I^-(f+g)
\end{aligned}$$

Soit $\sigma, \sigma' \in \mathfrak{S}$. On considère $\sigma'' \in \mathfrak{S}$ telle que $\sigma'' \prec \sigma'$ et $\sigma'' \prec \sigma$. On a

$$\begin{cases} S_\sigma^-(f) \geqslant S_{\sigma''}^-(f)\\ S_{\sigma'}^-(g) \leqslant S_{\sigma''}^-(g)\end{cases}$$

donc

$$S_\sigma^-(f)+S_{\sigma'}^-(g) \leqslant S_{\sigma''}^-(f)+S_{\sigma''}^-(g).$$

On pose $\sigma'' = (x_0, \dots, x_n)$ et, pour $i \in [\![0, n-1]\!]$,

$$\begin{cases} m_i(f) = \inf\limits_{]x_i, x_{i+1}[}(f)\\ m_i(g) = \inf\limits_{]x_i, x_{i+1}[}(g)\\ m_i(f+g) = \inf\limits_{]x_i, x_{i+1}[}(f+g).\end{cases}$$

Alors,

$$\begin{aligned}
S_{\sigma''}^-(f)+S_{\sigma''}^-(g) &= \sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1}-x_i)m_i(f)+\sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1}-x_i)m_i(g)\\
&= \sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1}-x_i)\big(m_i(f)+m_i(g)\big).
\end{aligned}$$

Soit $i \in [\![0, n-1]\!]$.

$$\begin{aligned}
m_i(f)+m_i(g) \leqslant m_i(f+g) &\iff \inf_{]x_i,x_{i+1}[}(f)+\inf_{]x_i,x_{i+1}[}(g) \leqslant \inf_{]x_i,x_{i+1}[}(f+g)\\
&\iff \forall x \in]x_i, x_{i+1}[, \inf_{]x_i,x_{i+1}[}(f)+\inf_{]x_i,x_{i+1}[}(g) \leqslant (f+g)(x)
\end{aligned}$$

Soit $x \in]x_i, x_{i+1}[$.

$$\begin{aligned}
(f+g)(x) &= f(x)+g(x)\\
&\geqslant \inf_{]x_i,x_{i+1}[}(f)+\inf_{]x_i,x_{i+1}[}(g).
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
S_{\sigma''}^-(f)+S_{\sigma''}^-(g) &\leqslant \sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1}-x_i)m_i(f+g)\\
&\leqslant S_{\sigma''}^-(f+g) \leqslant I^-(f+g).
\end{aligned}$$

□

Proposition: Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a

$$I^-_{[a,b]}(\lambda f) = \begin{cases} \lambda I^-_{[a,b]}(f) & \text{si } \lambda \geqslant 0 \\ \lambda I^+_{[a,b]}(f) & \text{si } \lambda \leqslant 0 \end{cases}$$

et

$$I^+_{[a,b]}(\lambda f) = \begin{cases} \lambda I^+_{[a,b]}(f) & \text{si } \lambda \geqslant 0 \\ \lambda I^-_{[a,b]}(f) & \text{si } \lambda \leqslant 0 \end{cases}.$$

Preuve: — On suppose $\lambda > 0$.

$$I^-(\lambda f) \leqslant \lambda I^-(f) \iff \forall \sigma \in \mathfrak{S},\ S^-_\sigma(\lambda f) \leqslant \lambda I^-(f).$$

Soit $\sigma = (x_0, \dots, x_n) \in \mathfrak{S}$. On pose, pour $i \in [\![0, n-1]\!]$, $m_i(f) = \inf\limits_{]x_i, x_{i+1}[}(f)$ et $m_i(\lambda f) = \inf\limits_{]x_i, x_{i+1}[}(\lambda f)$.

Soit $i \in [\![0, n-1]\!]$.

$$\begin{aligned} m_i(\lambda f) \leqslant \lambda m_i(f) &\iff m_i(f) \geqslant m_i(f) \geqslant \frac{1}{\lambda} m_i(\lambda f) \\ &\iff \forall x \in]x_i, x_{i+1}[,\ \frac{1}{\lambda} m_i(\lambda f) \leqslant f(x) \end{aligned}$$

Soit $x \in]x_i, x_{i+1}[$. On a

$$f(x) = \frac{1}{\lambda}\big(\lambda f(x)\big) \geqslant \frac{1}{\lambda} m_i(\lambda f).$$

Donc,

$$\begin{aligned} S^-_\sigma(\lambda f) &= \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) m_i(\lambda f) \\ &\leqslant \sum_{i=0}^{n-1} \lambda (x_{i+1} - x_i) m_i(f) \\ &\leqslant \lambda S^-_\sigma(f) \\ &\leqslant \lambda I^-(f). \end{aligned}$$

En outre,

$$\begin{aligned} I^-(f) &= I^-\left(\frac{1}{\lambda}\lambda f\right) \\ &\leqslant \frac{1}{\lambda} I^-(\lambda f) \end{aligned}$$

donc

$$\lambda I^-(f) \leqslant I^-(\lambda f).$$

— On suppose $\lambda < 0$.

$$I^-(\lambda f) \leqslant \lambda I^-(f) \iff \forall \sigma \in \mathfrak{S},\ S^-_\sigma(\lambda f) \leqslant \lambda I^+(f).$$

Soit $\sigma \in \mathfrak{S}$. On pose $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$. Alors,

$$S^-_\sigma(\lambda f) = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) m_i(\lambda f).$$

Soit $i \in [\![0, n-1]\!]$. Soit $x \in]x_i, x_{i+1}[$.

$$f(x) = \frac{1}{\lambda}\Big(\underbrace{\lambda f(x)}_{\geqslant \inf(\lambda f)} \Big) \leqslant \frac{1}{\lambda} m_i(\lambda f)$$

$$\text{donc } \frac{1}{\lambda} m_i(\lambda f) \text{ majore } f \text{ sur }]x_i, x_{i+1}[$$

$$\text{donc } \frac{1}{\lambda} m_i(\lambda f) \geqslant \sup_{]x_i, x_{i+1}[}(f) = M_i(f)$$

$$\text{et donc } m_i(\lambda f) \leqslant \lambda M_i(f).$$

D'où

$$\begin{aligned} S_\sigma^-(\lambda f) &\leqslant \sum_{i=0}^{n-1} \lambda(x_{i+1} - x_i) M_i(f) \\ &\leqslant \lambda S_\sigma^+(f) \\ &\leqslant \lambda I^+(f) \end{aligned}$$

car $\lambda < 0$ et $I^+(f) \leqslant S_\sigma^+(f)$.
De plus,

$$I^-\left(\frac{1}{\lambda}\lambda f\right) \leqslant \frac{1}{\lambda} I^+(\lambda f)$$

donc

$$\lambda I^-(f) \geqslant I^+(\lambda f).$$

Il reste à prouver (pour $\lambda < 0$) que

$$\begin{cases} I^-(\lambda f) \geqslant \lambda I^+(f) \\ I^+(\lambda f) \geqslant \lambda I^-(f). \end{cases}$$

□

Quatrième partie

Théorème fondamental de l'Analyse

Théorème: Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue. Alors f est Riemann-intégrable.

Preuve:
f est continue sur $[a, b]$; elle est donc bornée. Soient

$$\begin{aligned} \varphi^- : [a,b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto I^-_{[a,x]}(f) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \varphi^+ : [a,b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto I^+_{[a,x]}(f). \end{aligned}$$

Soit $x \in]a, b[$ et $h > 0$ tel que $x + h \in [a, b]$.

$$\varphi^-(x+h) - \varphi^-(x) = I^-_{[x,x+h]}(f) \leqslant I^+_{[x,x+h]}(f) = \varphi^+(x+h) - \varphi^+(x)$$

donc

$$\begin{cases} \dfrac{1}{h}\big(\varphi^-(x+h) - \varphi^-(x)\big) = \dfrac{1}{h} I^-_{[x,x+h]}(f) \geqslant \dfrac{1}{h} \inf\limits_{[x,x+h]} f \times (x+h-x); \\ \dfrac{1}{h}\big(\varphi^+(x+h) - \varphi^-(x)\big) = \dfrac{1}{h} I^+_{[x,x+h]}(f) \leqslant \dfrac{1}{h} \sup\limits_{[x,x+h]} (f) \times (x+h-x); \end{cases}$$

d'où

$$\inf_{[x,x+h]}(f) = \frac{1}{h} I^-_{[x,x+h]}(f) \leqslant \frac{1}{h} I^+_{[x,x+h]}(f) \leqslant \sup_{[x,x+h]}(f).$$

f est continue sur $[x, x+h]$ donc $\inf\limits_{[x,x+h]}(f) = f(c_h)$ avec $c_h \in [x, x+h]$. $x \leqslant c_h \leqslant x+h$ donc $c_h \xrightarrow[\substack{h\to 0 \\ >}]{} x$. Comme f est continue, $f(c_h) \xrightarrow[\substack{h\to 0 \\ >}]{} f(x)$.

De même, $\sup\limits_{[x,x+h]}(f) = f(d_h)$ avec $d_h \in [x, x+h]$ donc $d_h \xrightarrow[\substack{h\to 0 \\ >}]{} x$ et donc $f(d_h) \xrightarrow[\substack{h\to 0 \\ >}]{}$ $f(x)$.

On en déduit que

$$\begin{cases} \dfrac{\varphi^-(x+h) - \varphi^-(x)}{h} \xrightarrow[\substack{h\to 0 \\ >}]{} f(x) \\ \dfrac{\varphi^+(x+h) - \varphi^+(x)}{h} \xrightarrow[\substack{h\to 0 \\ >}]{} f(x). \end{cases}$$

De même,

$$\begin{cases} \dfrac{\varphi^-(x+h) - \varphi^-(x)}{h} \xrightarrow[\substack{h\to 0 \\ <}]{} f(x) \\ \dfrac{\varphi^+(x+h) - \varphi^+(x)}{h} \xrightarrow[\substack{h\to 0 \\ <}]{} f(x). \end{cases}$$

Donc φ^- et φ^+ sont deux primitives de f sur l'intervalle $[a, b]$.

Donc,

$$\exists C \in \mathbb{R},\ \forall x \in [a,b],\ \varphi^-(x) = \varphi^+(x) + C.$$

En évaluant en $x = a$, on a

$$\underbrace{\varphi^-(a)}_{=0} = \underbrace{\varphi^+(a)}_{=0} + C$$

et donc $C = 0$ donc $\varphi^-(b) = \varphi^+(b)$ et donc f est intégrable. $\square$

On a aussi démontré le théorème suivant :

> **Théorème:** Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ conitnue. Alors
> $$x \mapsto \int_{[a,x]} f$$
> est une primitive de f. $\square$

Remarque (Notation):
Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue. On note plutôt $\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ à la place de $\displaystyle\int_{[a,b]} f$.
On note aussi $\displaystyle\int_b^a f(t)\ \mathrm{d}t = -\int_{[a,b]} f$.

> **Corollaire:** Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et F une primitive de f. Alors
> $$\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = F(b) - F(a).$$

Preuve:
Soit $\varphi : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t$. On sait que φ est une primitive de f. Or,

$$\varphi' = f = F' \text{ donc } (\varphi - F)' = 0$$

On en déduit que

$$\exists C \in \mathbb{R}, \forall x \in [a,b],\ \varphi(x) = F(x) + C.$$

En particulier,

$$0 = \varphi(a) = F(a) + C$$

donc $C = -F(a)$.
D'où

$$\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = \varphi(b) = F(b) + C = F(b) - F(a).$$

$\square$

Cinquième partie

Fonctions continues par morceaux

Définition: Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$. On dit que f est <u>continue par morceaux</u> si,

$$\exists \sigma = (x_0, \ldots, x_n) \in \mathfrak{S}_{[a,b]}, \begin{cases} \forall i \in [\![0, n-1]\!],\ f_{\big|]x_i, x_{i+1}[} \text{ est continue;} \\ \forall i \in [\![1, n-1]\!],\ \lim\limits_{\substack{x \to x_i \\ <}} f(x) \in \mathbb{R} \text{ et } \lim\limits_{\substack{x \to x_i \\ >}} f(x) \in \mathbb{R}; \\ \lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) \in \mathbb{R};\ \lim\limits_{\substack{x \to b \\ <}} f(x) \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Théorème: Toute fonction continue par morceaux sur un segment est Riemann-intégrable sur ce segment. □

Définition: Soit $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. On dit que f est <u>continue par morceaux sur I</u> si f est continue par morceaux sur tout segment inclus dans I.

Remarque:

$$\begin{aligned} \delta : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 0, \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

δ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$. On a $\displaystyle\int_{[0,1]} \delta = 0$, et $\forall x \in [0,1],\ f(x) \geqslant 0$. Mais, $\delta \neq 0$.

Sixième partie

Sommes de Riemann

Théorème: Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux.

À faire : schéma 1

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{i=0}^{n-1}\frac{b-a}{n}f\left(a+i\frac{b-a}{n}\right)\right)=\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Preuve (dans le cas où f est continue)*:*

$$\begin{aligned}
\forall n\in\mathbb{N}^*, 0 \leqslant &\left|\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t - \sum_{i=0}^{n-1}\frac{b-a}{n}f\Bigg(\overbrace{a+i\frac{b-a}{n}}^{x_i}\Bigg)\right| \\
&= \left|\sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(t)\ \mathrm{d}t - \sum_{i=0}^{n-1}\frac{b-a}{n}f(x_i)\right| \\
&= \left|\sum_{i=0}^{n-1}\left(\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(t)\ \mathrm{d}t - \frac{b-a}{n}f(x_i)\right)\right| \\
&= \left|\sum_{i=0}^{n-1}\left(\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(t)\ \mathrm{d}t - \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x_i)\ \mathrm{d}t\right)\right| \\
&= \left|\sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(f(t)-f(x_i)\right)\ \mathrm{d}t\right| \\
&\leqslant \sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} \left|f(t)-f(x_i)\right|\ \mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

f est continue sur $[a,b]$, donc uniformément continue sur $[a,b]$:

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\eta>0,\ \forall x,y\in\mathscr{D}_f,\ |x-y|\leqslant\eta \implies \left|f(x)-f(y)\right|\leqslant\varepsilon.$$

Soit $\varepsilon>0$. On considère $\eta>0$ comme ci-dessus. On a $\dfrac{b-a}{n}\longrightarrow 0$ donc, il existe $N\in\mathbb{N}^*$ tel que

$$\forall n\geqslant N,\ \frac{b-a}{n}\leqslant\eta.$$

On considère un tel $N\in\mathbb{N}^*$. On suppose $n\geqslant N$.

$$\forall i\in\llbracket 0,n-1\rrbracket,\ \forall x\in[x_i,x_{i+1}],\ |x-x_i|\leqslant x_{i+1}-x_i=\frac{b-a}{n}\leqslant\eta$$

et donc

$$\left|f(x)-f(x_i)\right|\leqslant\varepsilon.$$

Donc,

$$\forall n\geqslant N,\ \left|\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x - \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1}f(x_i)\right|\leqslant\sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}}\varepsilon\ \mathrm{d}t=\varepsilon(b-a).$$

□

Proposition: Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue par morceaux et $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f\big(\underbrace{a + i\tfrac{b-a}{n}}_{x_i}\big) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t.$$

$\square$

Remarque:
On suppose à présent f de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$. f' est continue sur $[a,b]$: on considère

$$M = \max_{x \in [a,b]} \left|f'(x)\right|.$$

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N}^*, \left| \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t - \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \right| &= \left| \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \big(f(t) - f(x_i)\big)\ \mathrm{d}t \right| \\
&\leqslant \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left|f(t) - f(x_i)\right|\ \mathrm{d}t \\
&\leqslant \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} M|t - x_i|\ \mathrm{d}t \\
&\leqslant M \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{2} \\
&\leqslant \frac{M}{2} \left(\frac{b-a}{n}\right)^2 n \\
&= \frac{M(b-a)^2}{2n}.
\end{aligned}$$

Par exemple, on veut calculer une valeur approchée de $\ln 2$ à 10^{-3} près :

$$\ln 2 = \int_1^2 \frac{1}{t}\ \mathrm{d}t.$$

Soit $f : t \mapsto \dfrac{1}{t}$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[1,2]$.

$$\forall t \in [1,2],\ \left|f'(t)\right| = \frac{1}{t^2} \leqslant 1$$

d'où $M = 1$.

On cherche $n \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\frac{1(2-1)^2}{2n} \leqslant 10^{-3}$$

i.e. $n \geqslant 500$.

Donc, $\dfrac{1}{500} \displaystyle\sum_{i=0}^{499} \frac{1}{1 + \frac{i}{500}} \simeq 0{,}693$ est une valeur approchée de $\ln 2$ à 10^{-3} près.

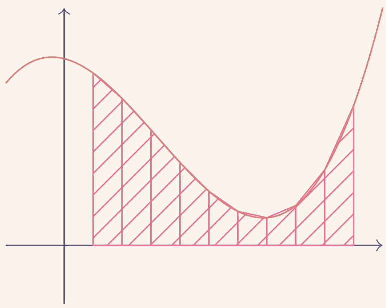
Exemple:

$$\textit{Que vaut } \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{n}{n^2 + k^2}\ ?$$

$\displaystyle\sum_{1 \leqslant k \leqslant n} \frac{n}{n^2 + k^2}$ n'est pas une série ! En effet, en passant de n à $n+1$, on modifie les termes précédents.

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{\frac{1}{n}}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2} \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2} \\ &\xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \operatorname{Arctan} 1 - \operatorname{Arctan} 0 = \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

Remarque (Méthode des trapèzes):



Au lieu d'approximer l'intégrale par des rectangles, on utilise des trapèzes.

Septième partie

Retour sur les formules de Taylor

Proposition: Soit $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et F une primitive de f. On suppose

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i (x-a)^i + \underset{x \to a}{o}\left((x-a)^n\right).$$

Alors,

$$F(x) = F(a) + \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \frac{(x-a)^{i+1}}{i+1} + \underset{x \to a}{o}\left((x-a)^{n+1}\right).$$

Preuve:
Soit $\varepsilon > 0$. On sait qu'il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall x \in [a-\eta, a+\eta], \left| f(x) - \sum_{i=0}^{n} \alpha_i (x-a)^i \right| \leqslant \varepsilon \, |x-a|^n.$$

On considère un tel $\eta > 0$. Soit $x \in [a-\eta, a+\eta]$.

$$\begin{aligned} \overbrace{\left| F(x) - F(a) - \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \frac{(x-a)^{i+1}}{i+1} \right|}^{(*)} &= \left| \int_a^x f(t) \, \mathrm{d}t - \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \int_a^x (t-a)^i \, \mathrm{d}t \right| \\ &= \left| \int_a^x \left(f(t) - \sum_{i=0}^{n} \alpha_i (t-a)^i \right) \, \mathrm{d}t \right| \end{aligned}$$

On suppose $x \geqslant a$, donc

$$\begin{aligned} (*) &\leqslant \int_a^x \left| f(t) - \sum_{i=0}^{n} \alpha_i (t-a)^i \right| \, \mathrm{d}t \\ &\leqslant \int_a^x \varepsilon |t-a|^n \, \mathrm{d}t \\ &\leqslant \varepsilon \int_a^x (t-a)^n \, \mathrm{d}t \\ &= \frac{\varepsilon}{n+1} (x-a)^{n+1} \end{aligned}$$

On suppose $x < a$.

$$\begin{aligned}
(*) &= \left| \int_x^a \left(f(t) - \sum_{i=0}^{n} \alpha_i (t-a)^i \right) \mathrm{d}t \right| \\
&\leqslant \int_x^a \left| f(t) - \sum_{i=0}^{n} \alpha_i (t-a)^i \right| \mathrm{d}t \\
&\leqslant \int_x^a \varepsilon |t-a|^n \mathrm{d}t \\
&\leqslant \alpha \int_x^a (a-t)^n \mathrm{d}t \\
&\leqslant \varepsilon \left[-\frac{(a-t)^{n+1}}{n+1} \right]_x^a \\
&\leqslant \varepsilon \frac{(a-x)^{n+1}}{n+1} \\
&= \frac{\varepsilon}{n+1} |x-a|^{n+1}
\end{aligned}$$

□

Corollaire: Soit $f : \overset{a}{\overset{\cap}{I}} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^n$. Alors,

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(a)}{i!} (x-a)^i + \underset{x \to a}{o} \big((x-a)^n \big).$$

Preuve:
par récurrence sur n. □

Huitième partie

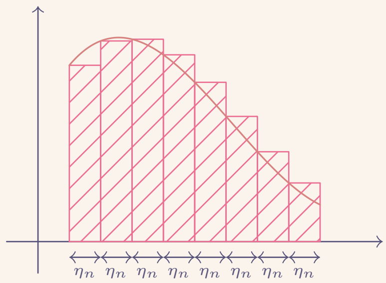
Fonctions réglées

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue. Cette fonction est donc uniformément continue (théorème de Heine) :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall (x,y) \in [a,b]^2,\ |x-y| \leqslant \eta \implies \big|f(x) - f(y)\big| \leqslant \varepsilon.$$

D'où

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \exists \eta_n > 0,\ |x-y| \leqslant \eta_n \implies \big|f(x) - f(y)\big| \leqslant \frac{1}{n}.$$



Cependant, contrairement au sommes de Darboux, cette construction utilise des notions que l'on admet : notamment, la convergence d'une suite de fonctions.

Exemple (convergence d'une suite de fonctions):
Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$\begin{aligned} f_n : [0,1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^n \end{aligned}$$

$$\forall x \in [0,1],\ f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue mais $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n$ ne l'est pas :