

CHAPITRE 32

Famille

Hugo SALOU MP2I

Dernière mise à jour le 22 juin 2022

TABLE DES MATIÈRES

I	Motivation	2
II	Familles sommables positives	4
III	Familles sommables réelles	7
IV	Familles sommables de nombres complexes	10
V	Produit de Cauchy de deux séries	12

Première partie

Motivation

La série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ est semi-convergente. On a $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln 2$, d'où,

$$-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \cdots = -\ln 2.$$

On change l'ordre :

$$\begin{aligned} & \overbrace{-1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}}^{-\frac{1}{2} + \frac{1}{4}} - \overbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8}}^{-\frac{1}{6} + \frac{1}{8}} - \overbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{12}}^{-\frac{1}{10} + \frac{1}{12}} + \cdots \\ &= \frac{1}{2} \left(-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \cdots \right) \\ &= \frac{-\ln 2}{2} \end{aligned}$$

Théorème (réarrangement de Riemann): Soit $\sum u_n$ une série semi-convergente réelle.

$$\forall \ell \in \mathbb{R}, \exists \sigma : \mathbb{N} \xrightarrow{\text{bij}} \mathbb{N}, \sum_{n=1}^{+\infty} u_{\sigma(n)} = \ell.$$

Deuxième partie

Familles sommables positives

Dans ce paragraphe, toutes les familles considérées sont positives.

Définition: Soit $(u_i)_{i \in I} \in (\mathbb{R}^+)^I$.

Si $\left\{ \sum_{i \in J} u_i \mid \begin{array}{l} J \subset I \\ J \text{ fini} \end{array} \right\}$ est majorée, alors on dit qu'elle est sommable et on définit la somme des $(u_i)_{i \in I}$ par

$$\sum_{i \in I} u_i = \sup_{\substack{J \subset I \\ J \text{ fini}}} \sum_{j \in J} u_j.$$

Sinon, la famille n'est pas sommable et on définit

$$\sum_{i \in I} u_i = +\infty.$$

Théorème: Soit $(u_i)_{i \in I} \in (\mathbb{R}^+)^I$ sommable et soit $\sigma : I \rightarrow I$ une bijection. Alors

$$\sum_{i \in I} u_{\sigma(i)} = \sum_{i \in I} u_i.$$

■

Corollaire (sommation par paquets): Soit $(u_i)_{i \in I} \in (\mathbb{R}^+)^I$ et $(I_j)_{j \in J}$ une partition de I :

$$I = \bigcup_{j \in J} I_j.$$

$$(u_i)_{i \in I} \text{ est sommable} \iff \begin{cases} \forall j \in J, (u_i)_{i \in I_j} \text{ est sommable,} \\ \left(\sum_{i \in I_j} u_i \right)_{j \in J} \text{ est sommable.} \end{cases}.$$

Dans ce cas,

$$\sum_{i \in I} u_i = \sum_{j \in J} \sum_{i \in I_j} u_i.$$

□

Corollaire (Fubini positif): Soit $(u_{i,j})_{\substack{i \in I \\ j \in J}} \in (\mathbb{R}^+)^{I \times J}$.

$$\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} u_{i,j} = \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} u_{i,j}.$$

■

Corollaire: Soient $(a_i)_{i \in I}$ et $(b_j)_{j \in J}$ deux familles sommables de réels positifs.

$$\sum_{\substack{i \in I \\ j \in J}} a_i b_j = \left(\sum_{i \in I} a_i \right) \left(\sum_{j \in J} b_j \right).$$

■

Dans la preuve précédente, on a utilisé la linéarité de la somme :

Proposition: Soient $(a_i)_{i \in I} \in (\mathbb{R}^+)^I$, $(b_i)_{i \in I} \in (\mathbb{R}^+)^I$ et $\lambda \in \mathbb{R}^+$.

1. $\sum_{i \in I} (a_i + b_i) = \sum_{i \in I} a_i + \sum_{i \in I} b_i$;
2. $\sum_{i \in I} (\lambda a_i) = \lambda \sum_{i \in I} a_i$.

■

Proposition: Soient $(a_i)_{i \in I}$ et $(b_i)_{i \in I}$ deux familles de réels positifs telles que

$$\forall i \in I, 0 \leq a_i \leq b_i.$$

Si $(b_i)_{i \in I}$ est sommable, alors $(a_i)_{i \in I}$ aussi, et, dans ce cas,

$$\sum_{i \in I} a_i \leq \sum_{i \in I} b_i.$$

■

Troisième partie

Familles sommables réelles

Définition: Soit $(u_i)_{i \in I} \in \mathbb{R}^I$. On dit que $(u_i)_{i \in I}$ est sommable si $|u_i|_{i \in I}$ est sommable.

REMARQUE:

Une famille sommable n'est pas une famille dont on peut calculer la somme mais la somme des valeurs absolues.

Proposition – Définition: Soit $(u_i)_{i \in I} \in \mathbb{R}^I$. On pose, pour tout $i \in I$,

$$u_i^+ = \begin{cases} u_i & \text{si } u_i \geq 0, \\ 0 & \text{sinon;} \end{cases}$$

$$u_i^- = \begin{cases} -u_i & \text{si } u_i \leq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors,

$$(u_i) \text{ sommable} \iff (u_i^+) \text{ et } (u_i^-) \text{ sont sommables.}$$

Dans ce cas, on définit

$$\sum_{i \in I} u_i = \sum_{i \in I} u_i^+ - \sum_{i \in I} u_i^-.$$

■

Proposition: Soient $(a_i)_{i \in I}$ et $(b_i)_{i \in I}$ deux familles sommables et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors, $(a_i + b_i)_{i \in I}$ est sommable, $(\lambda a_i)_{i \in I}$ aussi et

$$\sum_{i \in I} (a_i + b_i) = \sum_{i \in I} a_i + \sum_{i \in I} b_i,$$

$$\sum_{i \in I} \lambda a_i = \lambda \sum_{i \in I} a_i.$$

En d'autres termes, $\ell^1(I)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^I$ et

$$S : \ell^1(I) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(u_i)_{i \in I} \longmapsto \sum_{i \in I} u_i$$

est linéaire où $\ell^1(I) = \{(u_i) \in \mathbb{R}^I \mid (u_i) \text{ sommable}\}$.

■

Proposition: Soit $(u_i)_{i \in I} \in \mathbb{R}^I$ sommable et $\sigma : I \rightarrow I$ une bijection. Alors $(u_{\sigma(i)})_{i \in I}$ est sommable et

$$\sum_{i \in I} u_{\sigma(i)} = \sum_{i \in I} u_i.$$

■

Corollaire (sommation par paquets): Soit $(u_i)_{i \in I} \in \mathbb{R}^I$ et $(I_j)_{j \in J}$ une partition de

I.

$$(u_i)_{i \in I} \text{ sommable} \implies \left\{ \begin{array}{l} \forall j \in J, (u_i)_{i \in I_j} \text{ sommable,} \\ \left(\sum_{i \in I_j} u_i \right)_{j \in J} \text{ sommable.} \end{array} \right.$$

Dans ce cas,

$$\sum_{i \in I} u_i = \sum_{j \in J} \sum_{i \in I_j} u_i.$$

Corollaire (Fubini): Soit $(u_{i,j})_{\substack{i \in I \\ j \in J}} \in \mathbb{R}^{I \times J}$ sommable. Alors,

$$\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} u_{i,j} = \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} u_{i,j}.$$

Corollaire: Soient $(a_i)_{i \in I}$ et $(b_j)_{j \in J}$ deux familles sommables. Alors $(a_i b_j)_{\substack{i \in I \\ j \in J}}$ est sommable et

$$\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} a_i b_j = \left(\sum_{i \in I} a_i \right) \left(\sum_{j \in J} b_j \right).$$

■

Quatrième partie

Familles sommables de nombres complexes

Définition: Soit $(u_i)_{i \in I} \in \mathbb{C}^I$. On dit qu'elle est sommable si $(|u_i|)_{i \in I}$ est sommable.

Proposition: Soit $(u_i)_{i \in I} \in \mathbb{C}^I$.

$(u_i)_{i \in I}$ sommable $\iff (\Re(u_i))_{i \in I}$ et $(\Im(u_i))_{i \in I}$ sont sommables.

■

Définition: Soit $(u_k)_{k \in I} \in \mathbb{C}^I$ sommable. On définit

$$\sum_{k \in I} u_k = \sum_{k \in I} \Re(u_k) + i \sum_{k \in I} \Im(u_k).$$

On a exactement les mêmes propriétés que pour des familles réelles.

□

Cinquième partie

Produit de Cauchy de deux séries

RAPPEL:

Avec $P = \sum_{k=0}^p a_k X^k$ et $Q = \sum_{\ell=0}^q b_\ell X^\ell$, on a

$$\begin{aligned} PQ &= \sum_{k=0}^p \sum_{\ell=0}^q a_k b_\ell X^{k+\ell} \\ &= \sum_{m=0}^{p+q} \left(\sum_{k=0}^{\min(p,m)} a_k b_{m-k} \right) X^m. \end{aligned}$$

Définition: Soient $(u_n), (v_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Le produit de Cauchy des séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ est la série $\sum w_n$ où

$$\forall n \in \mathbb{N}, w_n = \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k}.$$

Théorème: Soient $(u_n), (v_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent absolument, alors leur produit $\sum w_n$ converge absolument et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n \right).$$

■