Chapitre 32

TD

Hugo Salou MP2I

Dernière mise à jour le 22 juin 2022

Table des matières

Exercice 1

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{k!} &\overset{\text{⚠}}{=} \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{k}\frac{1}{k!} \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{k+1}{k!} \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(k-1)!} + \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!} \\
&= 2e
\end{aligned}
$$

On pose

$$I = \{(n,k) \in \mathbb{N}^2 \mid k \geqslant n\} \qquad \text{et} \qquad \forall (n,k) \in I,\ u_{n,k} = \frac{1}{k!}.$$

D'où

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{k!} = \sum_{(n,k)\in I} u_{n,k}.$$

On pose $I = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} I_k$ où $I_k = \{(n,k) \in \mathbb{N}^2 \mid n \leqslant k\}$.

D'après le théorème de sommation par paquets,

$$\sum_{(n,k)\in I} u_{n,k} = \sum_{k\in\mathbb{N}}\sum_{(n,k)\in I_k} u_{n,k} = \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{k}\frac{1}{k!}.$$

Exercice 4

1.

$$\sum_{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2} \frac{1}{p^2\,q^2} = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^2} \sum_{q=1}^{+\infty} \frac{1}{q^2}$$
$$= \frac{\pi^4}{36}$$

2.

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2 \\ p\mid q}} \frac{1}{p^2\,q^2} &= \sum_{p=1}^{+\infty} \sum_{\substack{q\in\mathbb{N}^* \\ p\mid q}} \frac{1}{p^2q^2} \\ &= \sum_{p=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2(pk)^2} \\ &= \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^4} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \\ &= \zeta(4) \times \zeta(2) \\ &= \frac{\pi^4}{90} \times \frac{\pi^2}{6} \\ &= \frac{\pi^6}{540}.\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}\sum_{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2} \frac{1}{p^2\,q^2} &= \sum_{d\in\mathbb{N}^*} \sum_{\substack{(p,q)\in\mathbb{N}^* \\ p\wedge q=d}} \frac{1}{p^2\,q^2} \\ &= \sum_{d\in\mathbb{N}^*} \sum_{\substack{(p',q')\in(\mathbb{N}^*)^2 \\ p'\wedge q'=1}} \frac{1}{(dp')^2(dq')^2} \\ &= \left(\sum_{d=1}^{+\infty} \frac{1}{d^4}\right) \left(\sum_{p'\wedge q'=1} \frac{1}{p'^2q'^2}\right)\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\sum_{p\wedge q=1} \frac{1}{p^2\,q^2} = \frac{\frac{\pi^4}{36}}{\frac{\pi^4}{90}} = \frac{90}{36} = \frac{5}{2}.$$

Exercice 2

On pose

$$I = \{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2 \mid p \geqslant q\} \;\text{ et }\; \forall (p,q)\in I,\; u_{p,q} = \frac{(-1)^p}{q^3}.$$

$$\forall (p,q)\in I,\; |u_{p,q}| = \frac{1}{q^3}.$$

$$
\begin{aligned}
\sum_{(p,q)\in I} |u_{p,q}| &= \sum_{p=1}^{+\infty}\sum_{q=p}^{+\infty} \frac{1}{q^3} \\
&= \sum_{q=1}^{+\infty}\sum_{p=1}^{q} \frac{1}{q^3} \\
&= \sum_{q=1}^{+\infty} \frac{1}{q^2} = \frac{\pi^2}{6} < +\infty
\end{aligned}
$$

Donc $(u_{p,q})_{(p,q)\in I}$ est sommable.

Donc,

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{q=p}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{q^3} &= \sum_{q=1}^{+\infty}\sum_{p=1}^{q} \frac{(-1)^p}{q^3} \\
&= \sum_{q=1}^{+\infty} \frac{1}{q^3} \underbrace{\sum_{p=1}^{q}(-1)^p}_{=\begin{cases} 0 & \text{si } q \text{ pair} \\ -1 & \text{si } q \text{ impair.}\end{cases}} \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} -\frac{1}{(2k+1)^3}
\end{aligned}
$$

Or,

$$
\zeta(3) = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^3} = \sum_{\substack{p\in\mathbb{N}^* \\ p \text{ pair}}} \frac{1}{p^3} + \sum_{\substack{p\in\mathbb{N}^* \\ p \text{ impair}}} \frac{1}{p^3}
$$

et

$$
\sum_{\substack{p\in\mathbb{N}^* \\ p \text{ pair}}} \frac{1}{p^3} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k)^3} = \frac{1}{8}\zeta(3).
$$

On en déduit que

$$
\sum_{p=1}^{+\infty}\sum_{q=p}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{q^3} = -\frac{7}{8}\zeta(3).
$$