

CHAPITRE 32

Famille

Hugo SALOU MP2I

Dernière mise à jour le 22 juin 2022

TABLE DES MATIÈRES

I	Motivation	2
II	Familles sommables positives	4
III	Familles sommables réelles	9
IV	Familles sommables de nombres complexes	14
V	Produit de Cauchy de deux séries	16

Première partie

Motivation

La série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ est semi-convergente. On a $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln 2$, d'où,

$$-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \cdots = -\ln 2.$$

On change l'ordre :

$$\begin{aligned} & \overbrace{-1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}}^{-\frac{1}{2} + \frac{1}{4}} - \overbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8}}^{-\frac{1}{6} + \frac{1}{8}} - \overbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{12}}^{-\frac{1}{10} + \frac{1}{12}} + \cdots \\ &= \frac{1}{2} \left(-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \cdots \right) \\ &= \frac{-\ln 2}{2} \end{aligned}$$

Théorème (réarrangement de Riemann): Soit $\sum u_n$ une série semi-convergente réelle.

$$\forall \ell \in \mathbb{R}, \exists \sigma : \mathbb{N} \xrightarrow{\text{bij}} \mathbb{N}, \sum_{n=1}^{+\infty} u_{\sigma(n)} = \ell.$$

Deuxième partie

Familles sommables positives

Dans ce paragraphe, toutes les familles considérées sont positives.

Définition: Soit $(u_i)_{i \in I} \in (\mathbb{R}^+)^I$.

Si $\left\{ \sum_{i \in J} u_i \mid \begin{array}{l} J \subset I \\ J \text{ fini} \end{array} \right\}$ est majorée, alors on dit qu'elle est sommable et on définit la somme des $(u_i)_{i \in I}$ par

$$\sum_{i \in I} u_i = \sup_{\substack{J \subset I \\ J \text{ fini}}} \sum_{j \in J} u_j.$$

Sinon, la famille n'est pas sommable et on définit

$$\sum_{i \in I} u_i = +\infty.$$

EXEMPLE: 1. Toute famille finie positive est sommable : avec $I = \llbracket 1, n \rrbracket$, on a

$$\sum_{i \in I} u_i = \sum_{i=1}^n u_i.$$

2. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{R}^+)^{\mathbb{N}}$.

CAS 1 $\sum u_n$ converge. Soit $J \subset I = \mathbb{N}$ finie et

$$\sum_{j \in J} u_j \leq \sum_{i=0}^{\max(J)} u_i \leq \sum_{i=0}^{+\infty} u_i = S.$$

Or,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N, S - \varepsilon \leq \sum_{i=1}^n u_i$$

donc $S - \varepsilon$ ne majore pas $\left\{ \sum_{i \in J} u_i \mid \begin{array}{l} J \subset I \\ J \text{ fini} \end{array} \right\}$. Ainsi,

$$S = \sup_{\substack{J \subset I \\ J \text{ finie}}} \sum_{j \in J} u_j = \sum_{i \in \mathbb{N}} u_i.$$

CAS 2 $\sum u_n$ diverge. Alors $\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{i=0}^N u_i = +\infty$ et donc $\left\{ \sum_{i \in J} u_i \mid \begin{array}{l} J \subset I \\ J \text{ fini} \end{array} \right\}$ n'est pas majorée et donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas sommable et

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n = +\infty.$$

Théorème: Soit $(u_i)_{i \in I} \in (\mathbb{R}^+)^I$ sommable et soit $\sigma : I \rightarrow I$ une bijection. Alors

$$\sum_{i \in I} u_{\sigma(i)} = \sum_{i \in I} u_i.$$

Preuve:

$$\left\{ \sum_{j \in J} u_{\sigma(j)} \mid \begin{array}{l} J \subset I \\ J \text{ fini} \end{array} \right\} = \left\{ \sum_{k \in \sigma(J)} u_i \mid \begin{array}{l} J \subset I \\ J \text{ fini} \end{array} \right\} \\ = \left\{ \sum_{k \in K} u_k \mid \begin{array}{l} K \subset I \\ K \text{ fini} \end{array} \right\}$$

□

Corollaire (sommation par paquets): Soit $(u_i)_{i \in I} \in (\mathbb{R}^+)^I$ et $(I_j)_{j \in J}$ une partition de I :

$$I = \bigcup_{j \in J} I_j.$$

$$(u_i)_{i \in I} \text{ est sommable} \iff \begin{cases} \forall j \in J, (u_i)_{i \in I_j} \text{ est sommable,} \\ \left(\sum_{i \in I_j} u_i \right)_{j \in J} \text{ est sommable.} \end{cases}.$$

Dans ce cas,

$$\sum_{i \in I} u_i = \sum_{j \in J} \sum_{i \in I_j} u_i.$$

□

Corollaire (Fubini positif): Soit $(u_{i,j})_{\substack{i \in I \\ j \in J}} \in (\mathbb{R}^+)^{I \times J}$.

$$\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} u_{i,j} = \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} u_{i,j}.$$

Preuve: — On suppose $(u_{i,j})_{\substack{i \in I \\ j \in J}}$ sommable. On pose $I \times J = \bigcup_{i \in I} K_i$ où $K_i = \{i\} \times$

$$J = \{(i, j) \mid j \in J\}.$$

Donc, $\forall i \in I$, $(u_{i,j})_{j \in J}$ est sommable, $\left(\sum_{j \in J} u_{i,j} \right)_{i \in I}$ est sommable et

$$\sum_{(i,j) \in I \times J} u_{i,j} = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} u_{i,j}.$$

On a aussi

$$I \times J = \bigcup_{j \in J} L_j \quad \text{où } L_j = I \times \{j\}.$$

$\forall j \in J$, $(u_{i,j})_{i \in I}$ est sommable, $\left(\sum_{i \in I} u_{i,j} \right)_{j \in J}$ est sommable et

$$\sum_{(i,j) \in I \times J} u_{i,j} = \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} u_{i,j}.$$

— On suppose $(u_i)_{i \in I}$ non sommable et donc

$$\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} u_{i,j} = +\infty = \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} u_{i,j}.$$

□

Corollaire: Soient $(a_i)_{i \in I}$ et $(b_j)_{j \in J}$ deux familles sommables de réels positifs.

$$\sum_{\substack{i \in I \\ j \in J}} a_i b_j = \left(\sum_{i \in I} a_i \right) \left(\sum_{j \in J} b_j \right).$$

Preuve:

On pose, pour $i \in I$, pour $j \in J$, $u_{i,j} = a_i b_j$.

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{i \in I \\ j \in J}} a_i b_j &= \sum_{(i,j) \in I \times J} u_{i,j} \\ &= \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} u_{i,j} \\ &= \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} a_i b_j \\ &= \sum_{i \in I} a_i \sum_{j \in J} b_j \end{aligned}$$

□

Dans la preuve précédente, on a utilisé la linéarité de la somme :

Proposition: Soient $(a_i)_{i \in I} \in (\mathbb{R}^+)^I$, $(b_i)_{i \in I} \in (\mathbb{R}^+)^I$ et $\lambda \in \mathbb{R}^+$.

1. $\sum_{i \in I} (a_i + b_i) = \sum_{i \in I} a_i + \sum_{i \in I} b_i$;
2. $\sum_{i \in I} (\lambda a_i) = \lambda \sum_{i \in I} a_i$.

Preuve: CAS 1 On suppose (a_i) et (b_i) sommables. Soit $J \subset I$ finie.

$$\sum_{i \in J} (a_i + b_i) = \sum_{i \in J} a_i + \sum_{i \in J} b_i \leq \sum_{i \in I} a_i + \sum_{i \in I} b_i.$$

Donc, $S = \sum_{i \in I} a_i + \sum_{i \in I} b_i$ majore $\left\{ \sum_{i \in J} (a_i + b_i) \mid \begin{array}{l} J \subset I \\ J \text{ fini} \end{array} \right\}$ et donc $(a_i + b_i)_{i \in I}$ est sommable.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $J \subset I$ finie telle que

$$\sum_{j \in J} a_j \geq \sum_{i \in I} a_i - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Également, il existe $J \subset I$ finie telle que

$$\sum_{i \in K} b_i \geq \sum_{i \in J} b_i - \frac{\varepsilon}{2}.$$

On pose $L = J \cup K$. $L \subset I$ et L est un ensemble fini.

$$\begin{aligned} \sum_{i \in L} (a_i + b_i) &= \sum_{i \in L} a_i + \sum_{i \in L} b_i \\ &\geq \sum_{i \in J} a_i + \sum_{i \in K} b_i \\ &\geq \sum_{i \in I} a_i - \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{i \in I} b_i - \frac{\varepsilon}{2} \\ &\geq S - \varepsilon. \end{aligned}$$

Donc,

$$S = \sup_{\substack{J \subset I \\ J \text{ finie}}} \sum_{i \in J} (a_i + b_i) = \sum_{i \in I} (a_i + b_i).$$

□

Proposition: Soient $(a_i)_{i \in I}$ et $(b_i)_{i \in I}$ deux familles de réels positifs telles que

$$\forall i \in I, 0 \leq a_i \leq b_i.$$

Si $(b_i)_{i \in I}$ est sommable, alors $(a_i)_{i \in I}$ aussi, et, dans ce cas,

$$\sum_{i \in I} a_i \leq \sum_{i \in I} b_i.$$

Preuve:

Soit $J \subset I$ finie.

$$\begin{aligned} \sum_{i \in J} a_i &\leq \sum_{i \in J} b_i \leq \sum_{i \in I} b_i \\ \text{donc } \sum_{i \in I} b_i &\text{ majore } \left\{ \sum_{i \in J} a_i \mid \begin{array}{l} J \subset I \\ J \text{ fini} \end{array} \right\} \\ \text{donc } (a_i) &\text{ est sommable et} \end{aligned}$$

$$\sum_{i \in I} a_i \leq \sum_{i \in I} b_i.$$

□

Troisième partie

Familles sommables réelles

Définition: Soit $(u_i)_{i \in I} \in \mathbb{R}^I$. On dit que $(u_i)_{i \in I}$ est sommable si $(|u_i|)_{i \in I}$ est sommable.

EXEMPLE: 1. Toute famille finie de réels est sommable.

2. Avec $I = \mathbb{N}$ et $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$,

$$\begin{aligned} (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ sommable} &\iff \sum |u_n| \text{ converge} \\ &\iff \sum u_n \text{ converge absolument.} \end{aligned}$$

REMARQUE:

Une famille sommable n'est pas une famille dont on peut calculer la somme mais la somme des valeurs absolues.

Proposition – Définition: Soit $(u_i)_{i \in I} \in \mathbb{R}^I$. On pose, pour tout $i \in I$,

$$\begin{aligned} u_i^+ &= \begin{cases} u_i & \text{si } u_i \geq 0, \\ 0 & \text{sinon;} \end{cases} \\ u_i^- &= \begin{cases} -u_i & \text{si } u_i \leq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

Alors,

$$(u_i) \text{ sommable} \iff (u_i^+) \text{ et } (u_i^-) \text{ sont sommables.}$$

Dans ce cas, on définit

$$\sum_{i \in I} u_i = \sum_{i \in I} u_i^+ - \sum_{i \in I} u_i^-.$$

Preuve: “ $\implies$ ” On suppose (u_i) sommable. Par définition, $(|u_i|)_{i \in I}$ est sommable.

$$\forall i \in I, 0 \leq u_i^+ \leq |u_i|.$$

On en déduit que (u_i^+) est sommable. De même,

$$\forall i \in I, 0 \leq u_i^- \leq |u_i|$$

et donc (u_i^-) est sommable.

“ $\impliedby$ ” On suppose (u_i^+) et (u_i^-) sommables.

$$\forall i \in I, |u_i| = u_i^+ + u_i^-.$$

Par linéarité, $(|u_i|)_{i \in I}$ est sommable et donc $(u_i)_{i \in I}$ est sommable. $\square$

Proposition: Soient $(a_i)_{i \in I}$ et $(b_i)_{i \in I}$ deux familles sommables et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors, $(a_i + b_i)_{i \in I}$ est sommable, $(\lambda a_i)_{i \in I}$ aussi et

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I} (a_i + b_i) &= \sum_{i \in I} a_i + \sum_{i \in I} b_i, \\ \sum_{i \in I} \lambda a_i &= \lambda \sum_{i \in I} a_i. \end{aligned}$$

En d'autres termes, $\ell^1(I)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^I$ et

$$\begin{aligned} S : \ell^1(I) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (u_i)_{i \in I} &\longmapsto \sum_{i \in I} u_i \end{aligned}$$

est linéaire où $\ell^1(I) = \{(u_i) \in \mathbb{R}^I \mid (u_i) \text{ sommable}\}$.

Preuve: — $\forall i \in I, |u_i + v_i| \leq |u_i| + |v_i|$. Or, par hypothèse, $(|u_i|)_{i \in I}$ et $(|v_i|)_{i \in I}$ sont sommables et positives donc $(|u_i| + |v_i|)_{i \in I}$ est sommable donc $(|u_i + v_i|)_{i \in I}$ est sommable et donc $(u_i + v_i)_{i \in I}$ est sommable.

Et,

$$\sum_{i \in I} (u_i + v_i) = \sum_{i \in I} (u_i + v_i)^+ - \sum_{i \in I} (u_i + v_i)^-.$$

Or,

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I} (u_i + v_i) &= \sum_{i \in I} u_i + \sum_{i \in I} v_i \\ \iff \sum_{i \in I} (u_i + v_i)^+ - \sum_{i \in I} (u_i + v_i)^- &= \sum_{i \in I} u_i^+ - \sum_{i \in I} u_i^- + \sum_{i \in I} v_i^+ - \sum_{i \in I} v_i^- \\ \iff \sum_{i \in I} (u_i + v_i)^+ + \sum_{i \in I} u_i^- + \sum_{i \in I} v_i^- &= \sum_{i \in I} (u_i + v_i)^- + \sum_{i \in I} u_i^+ + \sum_{i \in I} v_i^+ \\ \iff \sum_{i \in I} ((u_i + v_i)^+ + u_i^- + v_i^-) &= \sum_{i \in I} ((u_i + v_i)^- + u_i^+ + v_i^+). \end{aligned}$$

On réalise une disjonction de cas : soit $i \in I$.

u_i	v_i	$u_i + v_i$	$(u_i + v_i)^+ + u_i^- + v_i^-$	$(u_i + v_i)^- + u_i^+ + v_i^+$
+	+	+	$u_i + v_i$	$u_i + v_i$
+	-	+	u_i	u_i
+	-	-	$-v_i$	$-v_i$
-	+	+	v_i	v_i
-	+	-	$-u_i$	$-u_i$
-	-	-	$-u_i - v_i$	$-u_i - v_i$

On remarque que, pour tout $i \in I$,

$$(u_i + v_i)^+ + u_i^- + v_i^- = (u_i + v_i)^- + u_i^+ + v_i^+.$$

— $\forall i \in I, |\lambda u_i| = |\lambda| |u_i|$, $(|u_i|)_{i \in I}$ est sommable, $|\lambda| \geq 0$ et donc $(|\lambda u_i|)_{i \in I}$ est sommable et donc $(\lambda u_i)_{i \in I}$ est sommable.

CAS 1 $\lambda \geq 0$:

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I} \lambda u_i &= \sum_{i \in I} (\lambda u_i)^+ - \sum_{i \in I} (\lambda u_i)^- \\ &= \sum_{i \in I} \lambda u_i^+ - \sum_{i \in I} \lambda u_i^- \\ &= \lambda \left(\sum_{i \in I} u_i^+ - \sum_{i \in I} u_i^- \right) \\ &= \lambda \sum_{i \in I} u_i. \end{aligned}$$

CAS 2 $\lambda < 0$:

$$\begin{aligned}\sum_{i \in I} \lambda u_i &= \sum_{i \in I} (\lambda u_i)^+ - \sum_{i \in I} (\lambda u_i)^- \\ &= \sum_{i \in I} \underbrace{(-\lambda)}_{\geq 0} u_i^- - \sum_{i \in I} \underbrace{(-\lambda)}_{\geq 0} u_i^+ \\ &= (-\lambda) \left(\sum_{i \in I} u_i^- - \sum_{i \in I} u_i^+ \right).\end{aligned}$$

Or,

$$\lambda \sum_{i \in I} u_i = \lambda \left(\sum_{i \in I} u_i^+ - \sum_{i \in I} u_i^- \right) = (-\lambda) \left(\sum_{i \in I} u_i^- - \sum_{i \in I} u_i^+ \right).$$

□

Proposition: Soit $(u_i)_{i \in I} \in \mathbb{R}^I$ sommable et $\sigma : I \rightarrow I$ une bijection. Alors $(u_{\sigma(i)})_{i \in I}$ est sommable et

$$\sum_{i \in I} u_{\sigma(i)} = \sum_{i \in I} u_i.$$

Preuve:

D'après le paragraphe 1, $(|u_{\sigma(i)}|)_{i \in I}$ est sommable.

$$\begin{aligned}\sum_{i \in I} u_{\sigma(i)} &= \sum_{i \in I} u_{\sigma(i)}^+ - \sum_{i \in I} u_{\sigma(i)}^- \\ &= \sum_{i \in I} u_i^+ - \sum_{i \in I} u_i^- \\ &= \sum_{i \in I} u_i\end{aligned}$$

□

Corollaire (somme par paquets): Soit $(u_i)_{i \in I} \in \mathbb{R}^I$ et $(I_j)_{j \in J}$ une partition de I .

$$(u_i)_{i \in I} \text{ sommable} \implies \begin{cases} \forall j \in J, (u_i)_{i \in I_j} \text{ sommable,} \\ \left(\sum_{i \in I_j} u_i \right)_{j \in J} \text{ sommable.} \end{cases}$$

Dans ce cas,

$$\sum_{i \in I} u_i = \sum_{j \in J} \sum_{i \in I_j} u_i.$$

Corollaire (Fubini): Soit $(u_{i,j})_{\substack{i \in I \\ j \in J}} \in \mathbb{R}^{I \times J}$ sommable. Alors,

$$\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} u_{i,j} = \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} u_{i,j}.$$

Corollaire: Soient $(a_i)_{i \in I}$ et $(b_j)_{j \in J}$ deux familles sommables. Alors $(a_i b_j)_{\substack{i \in I \\ j \in J}}$ est sommable et

$$\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} a_i b_j = \left(\sum_{i \in I} a_i \right) \left(\sum_{j \in J} b_j \right).$$

Preuve:

On a $I \times J = \bigcup_{i \in I} (\{i\} \times J)$.

Alors,

$$\begin{aligned} (a_i b_j)_{\substack{i \in I \\ j \in J}} \text{ sommable} &\iff \left\{ \begin{array}{l} \forall i \in I, (a_i b_j)_{j \in J} \text{ sommable} \\ \left(\sum_{j \in J} a_i b_j \right)_{i \in I} \text{ sommable} \end{array} \right. \\ &\iff \left\{ (b_j)_{j \in J} \text{ sommable}, (a_i)_{i \in I} \text{ sommable} \right\}. \end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned} \sum_{(i,j) \in I \times J} &= \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} (a_i b_j) \\ &= \sum_{i \in I} \left(a_i \sum_{j \in J} b_j \right) \\ &= \left(\sum_{i \in I} a_i \right) \left(\sum_{j \in J} b_j \right). \end{aligned}$$

□

Quatrième partie

Familles sommables de nombres complexes

Définition: Soit $(u_i)_{i \in I} \in \mathbb{C}^I$. On dit qu'elle est sommable si $(|u_i|)_{i \in I}$ est sommable.

Proposition: Soit $(u_i)_{i \in I} \in \mathbb{C}^I$.

$(u_i)_{i \in I}$ sommable $\iff (\Re(u_i))_{i \in I}$ et $(\Im(u_i))_{i \in I}$ sont sommables.

Preuve: “ $\implies$ ” Pour tout $i \in I$, $|\Re(u_i)| \leq |u_i|$ et $|\Im(u_i)| \leq |u_i|$ donc $(\Re(u_i))_{i \in I}$ et $(\Im(u_i))_{i \in I}$ sont sommables.
 “ $\impliedby$ ” $\forall i \in I$, $|u_i| \leq |\Re(u_i)| + |\Im(u_i)|$ donc $(|u_i|)_{i \in I}$ est sommable. □

Définition: Soit $(u_k)_{k \in I} \in \mathbb{C}^I$ sommable. On définit

$$\sum_{k \in I} u_k = \sum_{k \in I} \Re(u_k) + i \sum_{k \in I} \Im(u_k).$$

On a exactement les mêmes propriétés que pour des familles réelles. □

Cinquième partie

Produit de Cauchy de deux séries

RAPPEL:

Avec $P = \sum_{k=0}^p a_k X^k$ et $Q = \sum_{\ell=0}^q b_\ell X^\ell$, on a

$$\begin{aligned} PQ &= \sum_{k=0}^p \sum_{\ell=0}^q a_k b_\ell X^{k+\ell} \\ &= \sum_{m=0}^{p+q} \left(\sum_{k=0}^{\min(p,m)} a_k b_{m-k} \right) X^m. \end{aligned}$$

Définition: Soient $(u_n), (v_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Le produit de Cauchy des séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ est la série $\sum w_n$ où

$$\forall n \in \mathbb{N}, w_n = \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k}.$$

Théorème: Soient $(u_n), (v_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent absolument, alors leur produit $\sum w_n$ converge absolument et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n \right).$$

Preuve:

On sait que (u_n) et (v_n) sont sommables. On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}, w_n = \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k}.$$

$(u_n v_m)_{(n,m) \in \mathbb{N}^2}$ est donc sommable et

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} u_k \right) \left(\sum_{k=0}^{+\infty} v_k \right) &= \sum_{(n,m) \in \mathbb{N}^2} u_n v_m \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{a=n}^{+\infty} u_n v_{a-n} \\ &= \sum_{a=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^a u_n v_{a-n} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} w_n. \end{aligned}$$

□

EXEMPLE:

On préfère définir l'exponentielle complexe par

$$\forall z \in \mathbb{C}, e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$$

(au lieu de la définition du chapitre 4)

Par définition, $e^0 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{0^n}{n!} = 1$.

Soient $(x, y) \in \mathbb{C}^2$. $\left(\frac{x^n}{n!}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ et $\left(\frac{y^n}{n!}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ sont sommables donc

$$\begin{aligned} e^x e^y &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \times \frac{y^{n-k}}{(n-k)!} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} (x+y)^n \\ &= e^{x+y}. \end{aligned}$$