*2021-2022*

# Mathématiques

# MP2I

Hugo Salou

# TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE

# 0

# LOGIQUE (RUDIMENTS)

**Définition:** Un proposition est un énoncé qui est soit vrai, soit faux.

**Définition:** Démontrer une proposition revient à prouver qu'elle est vraie.

## 1 Algèbre de Boole

**Définition:** Soient $A$ et $B$ deux propositions. La proposition $A$ et $B$ est définie par la table de vérité suivante :

| $A$ | $B$ | $A$ et $B$ |
|---|---|---|
| $V$ | $V$ | $V$ |
| $V$ | $F$ | $F$ |
| $F$ | $V$ | $F$ |
| $F$ | $F$ | $F$ |

**Définition:** Soient $A$ et $B$ deux propositions. La proposition $A$ ou $B$ est définie par la table de vérité suivante :

| $A$ | $B$ | $A$ ou $B$ |
|---|---|---|
| $V$ | $V$ | $V$ |
| $V$ | $F$ | $V$ |
| $F$ | $V$ | $V$ |
| $F$ | $F$ | $F$ |

**Définition:** Soit $A$ une proposition. La <u>négation</u> de $A$, notée non$(A)$ est définie par :

| $A$ | non$(A)$ |
|---|---|
| $V$ | $F$ |
| $F$ | $V$ |

**Définition:** Deux propositions $A$ et $B$ sont <u>équivalentes</u> si elles ont la même table de vérité. Dans ce cas, on note $A \iff B$.

**Proposition:** Soient $A$, $B$ et $C$ trois propositions.

1. $(A \text{ et } B) \text{ et } C \iff A \text{ et } (B \text{ et } C)$
2. $A \text{ et } A \iff A$
3. $A \text{ et } B \iff B \text{ et } A$
4. $(A \text{ ou } B) \text{ ou } C \iff A \text{ ou } (B \text{ ou } C)$
5. $A \text{ ou } A \iff A$
6. $A \text{ ou } B \iff B \text{ ou } A$
7. $\text{non } (\text{ non } (A)) \iff A$
8. $A \text{ et } (B \text{ ou } C) \iff A \text{ et } B \text{ ou } A \text{ et } C$
9. $A \text{ ou } (B \text{ et } C) \iff (A \text{ ou } B) \text{ et } (A \text{ et } C)$
10. $\text{non } (A \text{ et } B) \iff \text{non } (A) \text{ ou } \text{non } (B)$
11. $\text{non } (A \text{ ou } B) \iff \text{non } (A) \text{ et } \text{non } (B)$

■

**Définition:** Soient $A$ et $B$ deux propositions. La proposition <u>$A \implies B$</u> ($A$ implique $B$) est définie par :

| $A$ | $B$ | $A \implies B$ |
|---|---|---|
| $V$ | $V$ | $V$ |
| $V$ | $F$ | $F$ |
| $F$ | $V$ | $V$ |
| $F$ | $F$ | $V$ |

**Définition:** Soient $A$ et $B$ deux propositions telles que $A \implies B$ est vraie. On dit que $A$ est une <u>condition suffisante</u> pour que $B$ soit vraie. On dit que $B$ est une <u>condition nécessaire</u> pour que $A$ soit vraie.

**Proposition** (Contraposée)**:** Soient $A$ et $B$ deux propositions.

$$(A \implies B) \iff (\text{ non } B \implies \text{ non } A)$$

■

**Proposition:** Soient $A$ et $B$ deux propositions.

$$(A \implies B) \iff \big((A \implies B) \text{ et } (B \implies A)\big)$$

■

**Proposition:** Soient $A$ et $B$ deux propositions.

$$(A \implies B) \iff (B \text{ ou } \text{ non } (A))$$

■

## 2 Déduction naturelle

Dans ce paragraphe, $A$ et $B$ sont deux propositions.

$\boxed{A \text{ et } B}$

Comment démontrer $A$ et $B$ ?
- On démontre $A$
- On démontre $B$

Comment utiliser l'hypothèse $A$ et $B$ ?
On utilise $A$ ou on utilise $B$.

$\boxed{A \text{ ou } B}$

Comment démontrer $A$ ou $B$ ?
On essaie de démontrer $A$. Si on y arrive, alors on a prouvé $A$ ou $B$ sinon on démontre $B$.

Variante
On suppose $A$ faux. On démontre $B$.

Comment utiliser l'hypothèse $A$ ou $B$ ?
On fait une disjonction des cas :

- Cas 1 : On suppose $A$
- Cas 2 : On suppose $B$

$\boxed{A \implies B}$

Comment démontrer $A \implies B$ ?
On suppose $A$. On démontre $B$.

Comment utiliser l'hypothèse $A \implies B$ ?
On démontre $A$. On utilise $B$.

## 3 Raisonement par l'absurde

Situation :

Soient $A$ et $B$ deux propositions.
On veut montrer $A \implies B$.

On suppose $\underline{A}$. On suppose aussi $\underline{B \text{ faux}}$.
On cherche à faire apparaître une contradiction ($\lightning$)

## 4 Prédicat

**Définition:** Un prédicat $P(x)$ est un énoncé dont la valeur de vérité dépend de l'objet $x$, élément d'un ensemble $E$.
Le domaine de validité de $P$ est l'ensemble des valeurs $x$ de $E$ pour lequelles $P(x)$ est vraie :

$$\{x \in E \mid P(x)\}$$

Remarque (Notation):
On écrit

$$\forall x \in E, P(x)$$

pour dire que $P(x)$ est vraie pour tous les $x$ de $E$.

On écrit

$$\exists x \in E, P(x)$$

pour dire qu'il existe (au moints) un élément $x \in E$ pour lequels $P(x)$ est vraie.

On écrit

$$\exists! x \in E, P(x)$$

pour dire qu'il existe un unique élément $x \in E$ tel que $P(x)$ est vraie.

$\boxed{\forall x \in E, P(x)}$

Comment démontrer $\forall x \in E, P(x)$ ?
Soit $x \in E$ (fixé quelconque). Montrons $P(x)$.

Comment utiliser $\forall x \in E, P(x)$ ?
On choisit (spécialise) une ou plusieurs (voir toutes) valeurs de $x$ et on exploite $P(x)$.

CHAPITRE

# 1

# CALCULS ALGÉBRIQUES

## 1 Sommes

Remarque (Notation):
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes. Pour $p \leqslant q \in \mathbb{N}$, on note

$$\sum_{k=p}^{q} u_k$$

le nombre $u_p + u_{p+1} + \cdots + u_q$.

Par convention,

$$\sum_{k=p}^{q} u_k = 0 \qquad \text{si } q < p.$$

**Proposition:** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} u_{n-k}$$

■

**Proposition:** Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes, $(p,q,r,s) \in \mathbb{N}^4$ et $\varphi : [\![p,q]\!] \to [\![r,s]\!]$ une bijection (i.e. $\forall y \in [\![r,s]\!], \exists! x \in [\![p,q]\!], \varphi(x) = y$).

Alors,

$$\sum_{k=r}^{s} u_k = \sum_{k=p}^{q} u_{\varphi(k)}.$$

■

**Proposition** (téléscopage)**:** Soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes.

$$\forall p \leqslant q \in \mathbb{N}, \sum_{k=p}^{q}(u_{k+1}-u_k) = u_{q+1}-u_p.$$

■

Remarque (Analogie avec le calcul intégral):

$$\int_a^b f'(x)\ \mathrm{d}x = f(b)-f(a).$$

**Proposition:** Soit $n \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{C}$,

$$\sum_{k=0}^{q} q^k = \begin{cases} n+1 & \text{si } q=1 \\ \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{sinon.} \end{cases}$$

■

## 2 Formules à connaître

**Définition:** Soient $k, n \in \mathbb{N}$. On définit "$k$ parmi $n$" par

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \dfrac{n!}{k!\ (n-k)!} & \text{si } k \leqslant n, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

**Proposition:** Avec les notations précédentes,

1. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
2. $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}$

■

**Proposition** (binôme de Newton)**:** Soient $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ et $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

sauf si $\begin{cases} a+b=0, \\ n=0. \end{cases}$

Remarque (triangle de Pascal):

| | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n=0$ | | | | | | | 1 | | | | | | |
| $n=1$ | | | | | | 1 | | 1 | | | | | |
| $n=2$ | | | | | 1 | | 2 | | 1 | | | | |
| $n=3$ | | | | 1 | | 3 | | 3 | | 1 | | | |
| $n=4$ | | | 1 | | 4 | | 6 | | 4 | | 1 | | |
| $n=5$ | | 1 | | 5 | | 10 | | 10 | | 5 | | 1 | |
| $n=6$ | 1 | | 6 | | 15 | | 20 | | 15 | | 6 | | 1 |

■

**Proposition:** Soient $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ et $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}.$$

■

# 3 Sommes doubles

# 4 Sommes sur un ensemble fini

**Définition:** Soit $I$ un ensemble fini. Soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille de nombres complexes. On note $\sum_{i\in I} a_i$ la somme des éléments de cette famille.

**Proposition:** Soit $\varphi : I \to J$ une bijection et $(a_j)_{j\in J}$ une famille de nombres complexes. Alors

$$\sum_{j\in J} a_j = \sum_{i\in I} a_{\varphi(i)}.$$

□

# 5 Produits

**Définition:** Soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille de nombres complexes.

On note $\prod_{i\in I} a_i$ le produit de ces éléments.

**Proposition:** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suit de nombres complexes non nuls. Alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \prod_{k=0}^{n} \frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{u_{n+1}}{u_0}.$$

□

Remarque (⚠ Attention):

$$\prod_{i\in I} (\lambda a_i) = \lambda^{\# I} \times \prod_{i\in I} a_i$$

où $\# I$ est le nombre d'éléments de $I$.

## 6 Rappels sur $\ln$ et $\exp$

**Proposition:**

— Soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille finie de réels strictement positifs. Alors,

$$\ln\left(\prod_{i\in I} a_i\right) = \sum_{i\in I} \ln a_i.$$

— Soit $(b_i)_{i\in I}$ une famille de réels. Alors

$$\exp\left(\sum_{i\in I} b_i\right) = \prod_{i\in I} \exp(b_i).$$

Remarque:
Soit $f : I \to \mathbb{R}^*$ dérivable. On pose $g : x \mapsto \ln|f(x)|$.

Alors $g$ est dérivable sur $I$ et

$$\forall x \in I, g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

On dit que $\frac{f'}{f}$ est la dérivée logarithmique de $f$.

Soient $f_1, f_2 : I \to \mathbb{R}^*$ dérivables. Alors

$$\frac{(f_1\, f_2)'}{f_1\, f_2} = \frac{f_1'}{f_1} + \frac{f_2'}{f_2}.$$

Remarque:
Soit $a \in \mathbb{R}$.

— Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors, $a^n = \overbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a}^{n \text{ fois}}$.
— Soit $n \in \mathbb{Z}_*^-$. Si $a \neq 0$, alors $a^n = \dfrac{1}{a^{-n}}$.
— Si $a \neq 0$, $a^0 = 1$ et

$$\forall p, q \in \mathbb{Z}, a^p \times a^q = a^{p+q}.$$

— Soit $p \in \mathbb{Z}$ et $a > 0$.

$$a^p = \exp(\ln a^p) = \exp(p \ln a) = e^{p \ln a}.$$

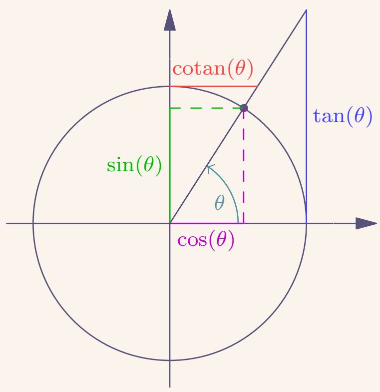
**Définition:** Soit $a \in \mathbb{R}_*^+$ et $p \in \mathbb{R}$. On pose $a^p = e^{p \ln a}$.

CHAPITRE

# 2

# NOMBRES COMPLEXES

## 1 Trigonométrie




**Définition:** On définit, pour

$$\theta \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left] -\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right[$$

$$\iff \theta \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$$

la tangente de $\theta$ par

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

**Définition:** Pour $\theta \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} ]-k\pi,(k+1)\pi[$, on définit la <u>contangente</u> de $\theta$ par

$$\operatorname{cotan}\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

**Proposition:** Soient $(a,b)\in\mathbb{R}^2$.

1. $\cos(-a)=\cos(a)$
2. $\cos(a+2\pi)=\cos(a)$
3. $\cos(a+\pi)=-\cos(a)$
4. $\cos(\pi-a)=-\cos(a)$
5. $\sin(-a)=-\sin(a)$
6. $\sin(a+2\pi)=\sin(a)$
7. $\sin(a+\pi)=-\sin(a)$
8. $\sin(\pi-a)=\sin(a)$
9. $\cos(a+b)=\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)$
10. $\sin(a+b)=\cos(a)\sin(b)+\sin(a)\cos(b)$
11. $\cos\left(\frac{\pi}{2}-a\right)=\sin(a)$
12. $\sin\left(\frac{\pi}{2}-a\right)=\cos(a)$

■

**Proposition:** Soient $a$ et $b$ deux réels tels que $a\not\equiv\frac{\pi}{2}\ [\pi]$ et $b\not\equiv\frac{\pi}{2}\ [\pi]$.

1. $\tan(a+\pi)=\tan(a)$
2. $\tan(-a)=-\tan(a)$
3. Si $a+b\not\equiv\frac{\pi}{2}\ [\pi]$, alors, $\tan(a+b)=\dfrac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}$

■

**Proposition:** Soit $a\in\mathbb{R}$.

1. Si $a\not\equiv\frac{\pi}{2}\ [\pi]$, alors, $1+\tan^2(a)=\dfrac{1}{\cos^2(a)}$
2. Si $a\not\equiv\pi\ [2\pi]$
   - $\cos(a)=\dfrac{1-\tan^2\left(\frac{a}{2}\right)}{1+\tan\left(\frac{a}{2}\right)}$
   - $\sin(a)=\dfrac{2\tan\left(\frac{a}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{a}{2}\right)}$
   - Si $a\not\equiv\frac{\pi}{2}\ [\pi]$, $\tan(a)=\dfrac{2\tan\left(\frac{a}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{a}{2}\right)}$

■

## 2 Nombres complexes de module 1

**Proposition:** Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

$$(\cos(a) + i\sin(a)) \times (\cos(b) + i\sin(b)) = \cos(a+b) + i\sin(a+b)$$

■

**Définition:** Pour $a \in \mathbb{R}$, on pose $e^{ia} = \cos(a) + i\sin(a)$
Ainsi, $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, e^{ia} \times e^{ib} = e^{i(a+b)}$

**Proposition:** Soient $a, b, c$ trois nombres complexes avec $a \neq 0$ et $z_1, z_2$ les racines de $P : z \mapsto az^2 + bz + c$
Alors, $z_1 \times z_2 = \dfrac{c}{a}$ et $z_1 + z_2 = -\dfrac{b}{a}$

■

**Proposition:** Soient $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ et $z_1, z_2, z_3$ les solutions de

$$z^3 + az^2 + bz + c = 0$$

Alors,

$$\begin{cases} z_1 z_2 z_3 = -c \\ z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_1 z_3 = b \\ z_1 + z_2 + z_3 = -a \end{cases}$$

□

**Proposition:** Soient $a_1, a_2, \dots, a_n$ des nombres complexes et $z_1, z_2, \dots, z_n$ les solutions de

$$z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0 = 1$$

Alors,

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \sum_{1 \leqslant i_1 \leqslant i_2 \leqslant \dots \leqslant i_k \leqslant n} z_{i_1} \times z_{i_2} \times \dots \times z_{i_k} = (-1)^k a_{n-k}$$

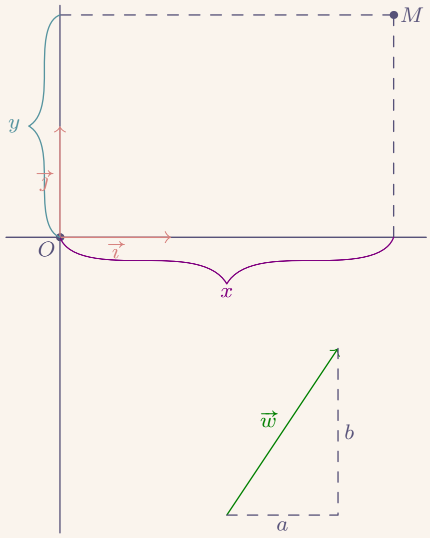
$$\sum_{k=1}^{n} z_k = -a_{n-1}$$

$$\prod_{k=1}^{n} z_k = (-1)^k a_0$$

■

# 3 Géométrie des nombres complexes

Dans ce paragraphe, $\mathscr{P}$ dérisgne un plan euclidien muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$




**Définition:** Soit $M \in \mathscr{P}$. On note $(x, y)$ les coordonnées du point $M$ par rapport au repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$
L'affixe de $M$ est le nombre

$$z_M = x + iy \in \mathbb{C}$$

Soit $\vec{w} \in \vec{\mathscr{P}}$ (le plan des vecteurs) et $(a, b)$ les coordonées de $\vec{w}$.
L'affixe de $\vec{w}$ est

$$z_{\vec{w}} = a + ib \in \mathbb{C}$$

**Proposition:** Soit $(A, B) \in \mathscr{P}^2$ et $(\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2}) \in \vec{\mathscr{P}}^2$

1. $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$
2. $z_{\overrightarrow{w_1}+\overrightarrow{w_2}} = z_{\overrightarrow{w_1}} + z_{\overrightarrow{w_2}}$

□

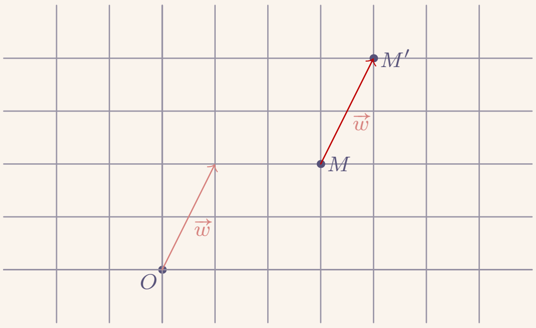
**Proposition:** Soit $(\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2}) \in \vec{\mathscr{P}}^2$ avec $\overrightarrow{w_1} \neq \vec{0}$ et $\overrightarrow{w_2} \neq \vec{0}$
Alors, $\left|\dfrac{z_{\overrightarrow{w_1}}}{z_{\overrightarrow{w_2}}}\right| = \dfrac{\|\overrightarrow{w_1}\|}{\|\overrightarrow{w_2}\|}$ et $\arg\left(\dfrac{z_{\overrightarrow{w_1}}}{z_{\overrightarrow{w_2}}}\right) = \underbrace{\widehat{(\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2})}}_{\text{l'angle entre } \overrightarrow{w_1} \text{ et } \overrightarrow{w_2}}$

■

**Corollaire:** Avec les hypothèses et notations précédentes,

1. $\overrightarrow{w_1}$ et $\overrightarrow{w_2}$ sont collinéaires $\iff \dfrac{z_{\overrightarrow{w_1}}}{z_{\overrightarrow{w_2}}} \in \mathbb{R}$
2. $\overrightarrow{w_1}$ et $\overrightarrow{w_2}$ sont orthogonaux $\iff \dfrac{z_{\overrightarrow{w_1}}}{z_{\overrightarrow{w_2}}} \in i\mathbb{R}$

■




**Définition:** Soit $\overrightarrow{w} \in \overrightarrow{\mathscr{P}}$. La <u>translation</u> de vecteur $\overrightarrow{w}$ est l'application

$$\begin{aligned} t_{\overrightarrow{w}} : \mathscr{P} &\longrightarrow \mathscr{P} \\ M &\longmapsto M' \end{aligned}$$

où $M'$ vérifie $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{w}$

**Proposition:** Soit $\overrightarrow{w} \in \overrightarrow{\mathscr{P}}$ et $(M, M') \in \mathscr{P}^2$

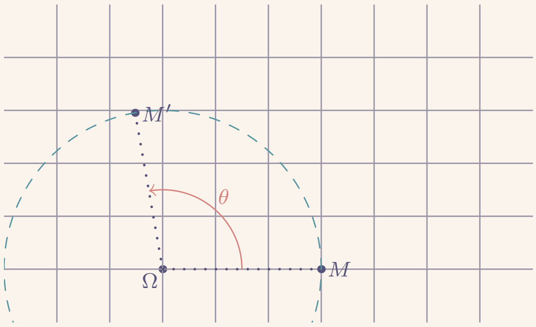
$$M' = t_{\overrightarrow{w}}(M) \iff z_{M'} = z_M + z_{\overrightarrow{w}}$$

■

**Proposition:** Soient $\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2} \in \overrightarrow{\mathscr{P}}$.

$$t_{\overrightarrow{w_2}} \circ t_{\overrightarrow{w_1}} = t_{\overrightarrow{w_1}+\overrightarrow{w_2}}$$

■




**Définition:** Soit $\Omega \in \mathscr{P}$ et $\theta \in \mathbb{R}$.
La rotation de centre $\Omega$ et d'angle $\theta$ est l'application

$$\begin{aligned} \rho_{\Omega,\theta} : \mathscr{P} &\longrightarrow \mathscr{P} \\ M &\longmapsto M' \end{aligned}$$

où $M'$ vérifie

$$\begin{cases} \|\overrightarrow{\Omega M}\| = \|\overrightarrow{\Omega M'}\| \\ (\widehat{\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}}) = \theta \end{cases}$$

**Proposition:** Soit $\Omega \in \mathscr{P}$ d'affixe $\omega$, $\theta \in \mathbb{R}$ et $(M, M') \in \mathscr{P}^2$

$$(*) : \qquad M' = \rho_{\Omega,\theta}(M) \iff z_{M'} = \omega + e^{i\theta}(z_M - \omega)$$

■

Remarque (Cas particulier):
Si $\Omega = O$ alors

$$(*) \iff z_{M'} = e^{i\theta} z_M$$

**Corollaire:** Soit $\Omega \in \mathscr{P}$ d'affixe $\omega$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \rho_{\Omega,\theta} &= t_{\overrightarrow{O\Omega}} \circ \rho_{O,\theta} \circ t_{\overrightarrow{\Omega O}} \\ &= t_{\overrightarrow{O\Omega}} \circ \rho_{O,\theta} \circ (t_{\overrightarrow{O\Omega}})^{-1} \end{aligned}$$

**Proposition:** Soient $(\Omega_1, \Omega_2) \in \mathscr{P}^2$ et $(\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^2$

$$\rho_{\Omega_1,\theta_1} \circ \rho_{\Omega_1,\theta_2} = \rho_{\Omega_1,\theta_1+\theta_2} = \rho_{\Omega_1,\theta_2} \circ \rho_{\Omega_1,\theta_1}$$

Si $\begin{cases} \Omega_1 \neq \Omega_2 \\ \theta_1 + \theta_2 \not\equiv 0 \ [2\pi] \end{cases}$ alors $\rho_{\Omega_1,\theta_1} \circ \rho_{\Omega_2,\theta_2}$ est une rotation d'angle $\theta_1 + \theta_2$

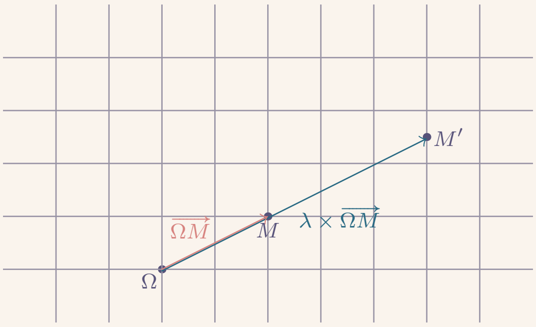
Si $\begin{cases} \Omega_1 \neq \Omega_2 \\ \theta_1 + \theta_2 \equiv 0 \ [2\pi] \end{cases}$ alors $\rho_{\Omega_1,\theta_1} \circ \rho_{\Omega_2,\theta_2}$ est une translation

■

**Proposition:** Soit $\Omega \in \mathscr{P}$ d'affixe $\omega$, $\vec{w} \in \vec{\mathscr{P}}$ d'affixe $u$. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ avec $\theta \not\equiv 0 \ [2\pi]$.

— $t_{\vec{w}} \circ \rho_{\Omega,\theta}$ est une rotation d'angle $\theta$
— $\rho_{\Omega,\theta} \circ t_{\vec{w}}$ est aussi une rotation d'angle $\theta$

■




**Définition:** Soit $\Omega \in \mathscr{P}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
L'<u>homothétie</u> de centre $\Omega$ et de rapport $\lambda$ est l'application

$$\begin{aligned} h_{\Omega,\lambda} : \mathscr{P} &\longrightarrow \mathscr{P} \\ M &\longmapsto M' \end{aligned}$$

où $M'$ vérifie $\overrightarrow{\Omega M'} = \lambda \overrightarrow{\Omega M}$

**Proposition:** Soit $\Omega \in \mathscr{P}$ d'affixe $\omega$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Soient $M \in \mathscr{P}$ d'affixe $z$ et $M' \in \mathscr{P}$ d'affixe $z'$.

$$M' = h_{\Omega,\lambda}(M) \iff z' = \omega + \lambda(z - \omega)$$

■

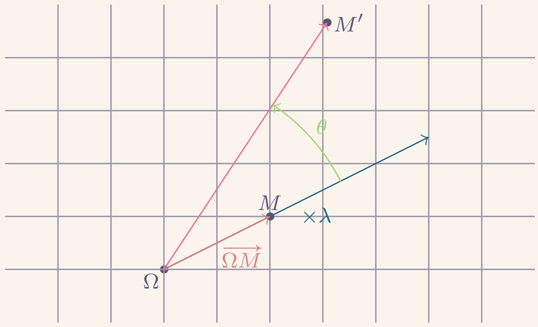
**Proposition:** Soient $(\Omega_1, \Omega_2) \in \mathscr{P}^2$ et $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathscr{P}^2$

1. Si $\Omega_1 = \Omega_2$ alors, $h_{\Omega_1,\lambda_1} \circ h_{\Omega_2,\lambda_2} = h_{\Omega_1,\lambda_1\lambda_2}$
2. Si $\Omega_1 \neq \Omega_2$ et $\lambda_1\lambda_2 \neq 1$, alors, $h_{\Omega_1,\lambda_1} \circ h_{\Omega_2,\lambda_2}$ est une homotéthie de rapport $\lambda_1\lambda_2$
3. Si $\Omega_1 \neq \Omega_2$ et $\lambda_1\lambda_2 = 1$, alors, $h_{\Omega_1,\lambda_1} \circ h_{\Omega_2,\lambda_2}$ est une translation.

□

**Proposition:** Soit $\Omega \in \mathscr{P}$, $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $\vec{w} \in \vec{\mathscr{P}}$.
Alors, $t_{\vec{w}} \circ h_{\Omega,\lambda}$ et $h_{\Omega,\lambda} \circ t_{\vec{w}}$ sont homothéties de rapport $\lambda$. □

Remarque (Cas particulier):
Soit $M \in \mathscr{P}$ d'affixe $z$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $M' = h_{O,\lambda}(M)$ d'affixe $z'$
On a $z' = \lambda z$




**Définition:** Soient $\Omega \in \mathscr{P}$, $(\theta, \lambda) \in \mathbb{R}^2$. La similitude (directe) de centre $\Omega$, d'angle $\theta$ et de rapport $\lambda$ est

$$S_{\Omega,\theta,\lambda} = h_{\Omega,\lambda} \circ \rho_{\Omega,\theta}$$

**Proposition:** Avec les notations précédentes,

$$S_{\Omega,\theta,\lambda} = \rho_{\Omega,\theta} \circ h_{\Omega,\lambda}$$

■

**Proposition:** L'expression complexe de $S_{\Omega,\theta,\lambda}$ est

$$z' = \omega + \lambda e^{i\theta}(z - \omega)$$

## 4 Exponentielle complexe

**Définition:** Pour $z \in \mathbb{C}$, on pose

$$\exp(z) = e^{\mathfrak{Re}(z)} \times (\cos(\mathfrak{Im}(z)) + i\sin(\mathfrak{Im}(z))$$

Ainsi, si $z = a + ib$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$,

$$\exp(z) = \exp(a + ib) = e^a \times (\cos(b) + i(\sin(b)) = e^a e^{ib}$$

**Proposition:** Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

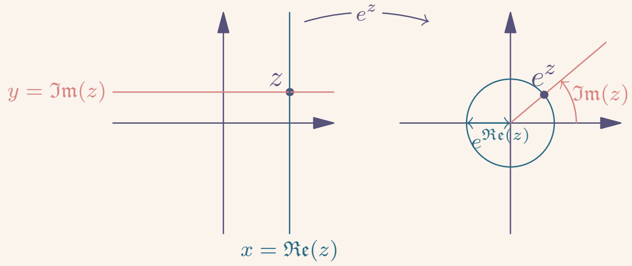
$$\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1) \times \exp(z_2)$$

■

Remarque (Notation):
On écrit $e^z$ à la place de $\exp(z)$ pour $z \in \mathbb{C}$.

**Proposition:**

$$\forall z \in \mathbb{C}, \begin{cases} |e^z| = e^{\mathfrak{Re}(z)} \\ \arg(e^z) \equiv \mathfrak{Im}(z) \ \ [2\pi] \end{cases}$$




Remarque:
$\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ n'est pas bijective :

— $\begin{cases} \exp(0) = \exp(2i\pi) = 1 \\ 0 \neq 2i\pi \end{cases}$

— 0 n'a pas d'antécédant

Il n'y a donc pas de logarithme complexe.

## 5 Fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$

**Définition:** Soit $f$ définie sur $D \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ $(\forall x \in D, f(x) \in \mathbb{C})$
On pose :

$$\begin{aligned} \mathfrak{Re}(f) : D &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \mathfrak{Re}(f(x)) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \mathfrak{Im}(f) : D &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \mathfrak{Im}(f(x)) \end{aligned}$$

**Définition:** Soit $f : D \to \mathbb{C}$. On dit que

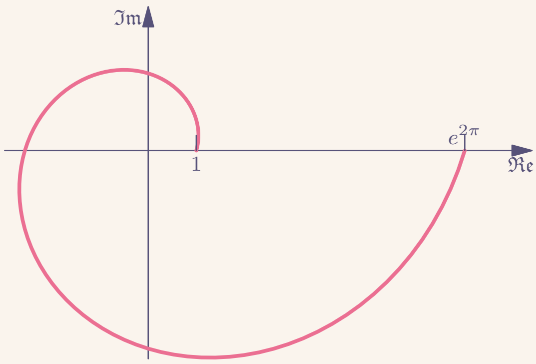
— $f$ est <u>continue</u> si $\mathfrak{Re}(f)$ et $\mathfrak{Im}(f)$ sont continues

— $f$ est <u>dérivable</u> si $\mathfrak{Re}(f)$ et $\mathfrak{Im}(f)$ sont dérivables.
Dans ce cas, la dérivée de $f$ est

$$\begin{aligned} f' : D &\longrightarrow \mathbb{C} \\ x &\longmapsto \mathfrak{Re}(f)'(x) + i\mathfrak{Im}(f)'(x) \end{aligned}$$

Remarque:
On peut représenter $f$ de la fa c on suivante.

$$\begin{aligned} f : [0, 2\pi[ &\longrightarrow \mathbb{C} \\ t &\longmapsto e^{(1+i)t} \end{aligned}$$




**Proposition:** Soient $u$ et $v$ deux fonctions dérivables sur $D \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$

1. $u + v$ dérivable et $(u + v)' = u' + v'$
2. $uv$ dérivable et $(uv)' = u'v + v'u$
3. Si $v \neq 0$, $\dfrac{u}{v}$ dérivable et $\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$

■

**Proposition:** Soit $v : D \to \mathbb{R}$ et $u : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ deux fonctions dérivables (avec $D \subset \mathbb{R}$). Alors, $u \circ v$ est dérivable et

$$(u \circ v)' = (u' \circ v) \times v'$$

■

**Proposition:** Soit $u : D \to \mathbb{C}$ et $f : \begin{array}{ccc} D & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & e^{u(x)} \end{array}$

Alors, $f$ est dérivable sur $D$ et

$$\forall x \in D, f'(x) = u'(x)e^{u(x)}$$

■

CHAPITRE

# 3

# ÉTUDE DE FONCTIONS

Étudier une fonction c'est déterminer tous les éléments (tangentes, asymptotes) qui permettent d'obtenir l'allure de la courbe représentative de la fonction.

## 1 Calculs de limites

Rappel:
Soient $f$ et $g$ deux fonctions et $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

On ne connaît pas, à l'avance, les limites de

— $f(x) - g(x)$ si $\begin{cases} f(x) \xrightarrow[x \to a]{} +\infty \\ g(x) \xrightarrow[x \to a]{} +\infty \end{cases}$ ("$\infty - \infty$")

— $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ si $\begin{cases} f(x) \xrightarrow[x \to a]{} 0 \\ g(x) \xrightarrow[x \to a]{} 0 \end{cases}$ ("$\frac{0}{0}$")

— $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ si $\begin{cases} f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \pm\infty \\ g(x) \xrightarrow[x \to a]{} \pm\infty \end{cases}$ ("$\frac{\infty}{\infty}$")

— $f(x) \times g(x)$ si $\begin{cases} f(x) \xrightarrow[x \to a]{} 0 \\ g(x) \xrightarrow[x \to a]{} \pm\infty \end{cases}$ ("$0 \times \infty$")

**Proposition:**
Si $\begin{cases} f(x) \xrightarrow[x \to a]{} 1 \\ g(x) \xrightarrow[x \to a]{} \pm\infty \end{cases}$ alors, on ne sait pas à l'avance calculer $\lim\limits_{x \to a} \big(f(x)\big)^{g(x)}$. □

**Définition:** Soient $f$ et $g$ deux fonctions et $a \in \overline{\mathbb{R}}$ où $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$.

On dit que $f$ et $g$ sont équivalentes au voisinage de $a$ (ou éqivalentes en $a$) s'il existe une fonction $u$ telle que
$$\begin{cases} f = g \times u \\ u(x) \xrightarrow[x \to a]{} 1 \end{cases}$$
On note alors $f \underset{a}{\sim} g$ ou $f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x)$.

**Proposition:** Un polynôme est équivalent en $\pm\infty$ à son terme de plus haut degré. ■

**Proposition:** Un polynôme est équivalent en 0 à sont terme de plus bas degré. ■

Remarque:
Soient $f$ et $g$ deux fonctions définies au voisinage de $a$ tel que
$$\forall x \in I, g(x) \neq 0$$
où $I$ est un intervalle
- qui contient $a$ si $a \in \mathbb{R}$,
- dont une borne est $a$ si $a = \pm\infty$.

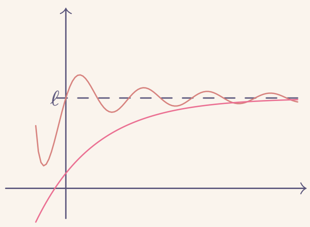
Alors,
$$f \underset{a}{\sim} g \iff \frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[\substack{x \to a \\ \neq}]{} 1.$$

## 2 Asymptotes, branches paraboliques et prolongement par continuité

Limite en $+\infty$ :

Cas1

$f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} \ell \in \mathbb{R}$.




On dit que la droite d'équation $y = \ell$ est une asymptote horizontale.

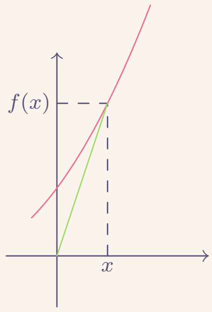
Cas2

$f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} \pm\infty$ dans ce cas, on cherche $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$.

Sous cas 1 $\frac{f(x)}{x}$ n'a pas de limite en $+\infty$.

?

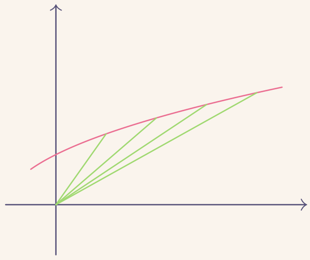
Sous cas 2 $\frac{f(x)}{x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$.




On dit que la courbe de $f$ présente <u>une branche parabolique</u> de <u>direction asymptotique</u> l'axe des ordonées.

$\dfrac{f(x)}{x}$ est la pente de la droite verte.

<u>Sous cas 3</u> $\dfrac{f(x)}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

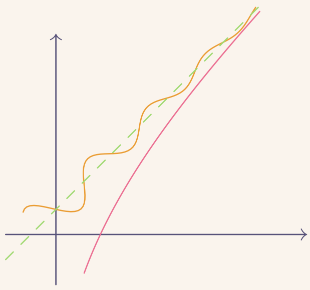


On dit que la courbe de $f$ présente <u>une branche parabolique</u> de <u>direction asymptotique</u> l'axe des ordonées.

$\dfrac{f(x)}{x}$ est la pente de la droite verte.

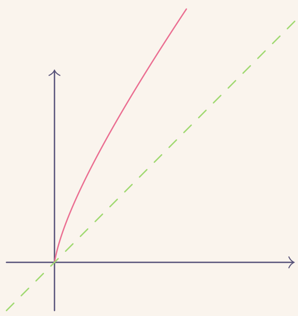
<u>Sous cas 4</u> $\dfrac{f(x)}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell \in \mathbb{R}^+$. On cherche $\lim\limits_{x\to+\infty} \big(f(x) - \ell x\big)$.

*<u>Sous-souscas1</u>* $f(x) - \ell x \xrightarrow[x\to+\infty]{} a \in \mathbb{R}$



Asymptote oblique d'équation $y = \ell x + a$.

*<u>Sous-souscas2</u>* $f(x) - \ell x \xrightarrow[x\to+\infty]{} \pm\infty$



Branche parabolique de direction asymptotique la droite d'équation $y = \ell x$.

*<u>Sous-souscas2</u>* $f(x) - \ell x$ n'a pas de limite

?

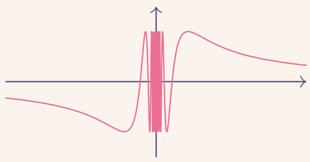
## Limite en $a \in \mathbb{R}$ :

On cherche $\lim\limits_{x \to a} f(x)$.

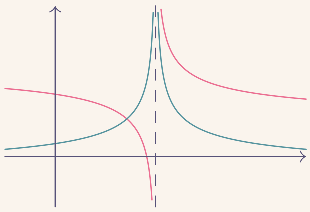
<u>Cas1</u>

Pas de limite

$\boxed{\text{ex}}$ $x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ en 0 :



<u>Cas2</u> $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \pm\infty$

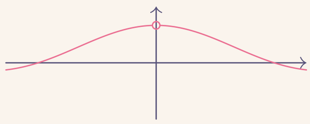


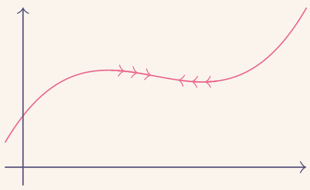
Asymptote verticale d'équation $x = a$.

<u>Cas3</u> $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell \in \mathbb{R}$.

$\boxed{\text{ex}}$ $f : x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ $f(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 1$, dans ce cas, on pose

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$





On pose $f(a) = \ell$. On dit que l'on a <u>prolongé par continuité</u> la fonction $f$.

CHAPITRE

# 4

# FONCTIONS USUELLES

## 1 Logarithme népérien

**Théorème** (théorème fondamental de l'analyse)**:** Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle $I$. Alors il existe $F$ dérivable sur $I$ telle que

$$\forall x \in I, F'(x) = f(x).$$

■

**Définition:** La fonction <u>ln</u> est l'unique primitive sur $\mathbb{R}_*^+$ de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ qui s'annule en 1.

**Proposition:** 1. $\ln 1 = 0$ ;

2. ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\forall x > 0, \ln' x = \frac{1}{x}.$$

□

**Corollaire:**

$$\forall x > 0, \ln x = \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t}.$$

■

Remarque:

$$\begin{aligned} u : \mathbb{R}_*^- &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \ln(-x) \end{aligned}$$

$u$ est dérivable sur $\mathbb{R}_*^-$ et

$$\forall x < 0, u'(x) = \ln'(-x) \times (-1) = \frac{-1}{-x} = \frac{1}{x}.$$

Donc $u$ est une primite de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_*^-$.

Soit $v : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln\big(|x|\big). \end{array}$ $|x|$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ donc $v$ aussi.

$$\forall x > 0, v(x) = \ln x$$
$$\text{donc } \forall x > 0, v'(x) = \frac{1}{x}.$$

$$\forall x < 0, v(x) = \ln(-x) = u(x)$$
$$\text{donc } \forall x < 0, v'(x) = \frac{1}{x}.$$

Donc, $\forall x \in \mathbb{R}^*, v'(x) = \frac{1}{x}$. Ainsi, $v$ est <u>une</u> primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$ mais cette primitive n'est pas unique :

$$w : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \begin{cases} 1 + \ln x & \text{si } x > 0 \\ \ln(-x) - 3 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

est une autre primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$.

**Corollaire:** ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}_*^+$.

■

**Proposition:** Soit $f$ une fonction croissante sur $]a, b[$ avec $\begin{cases} a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \\ b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}. \end{cases}$ et $a < b$.

1. Si $f$ est majorée, $\lim\limits_{\substack{x \to b \\ <}} f(x) \in \mathbb{R}$.
2. Si $f$ n'est pas majorée, $\lim\limits_{\substack{x \to b \\ <}} f(x) = +\infty$.
3. Si $f$ est minorée, $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) \in \mathbb{R}$.
4. Si $f$ n'est pas minorée, $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) = -\infty$.

□

**Proposition:**

$$\forall a, b \in \mathbb{R}_*^+, \ln(ab) = \ln a + \ln b.$$

■

**Corollaire:** Soit $a > 0$ et $n \in \mathbb{Z}$. Alors $\ln(a^n) = n\ln(a)$.

■

**Corollaire:**

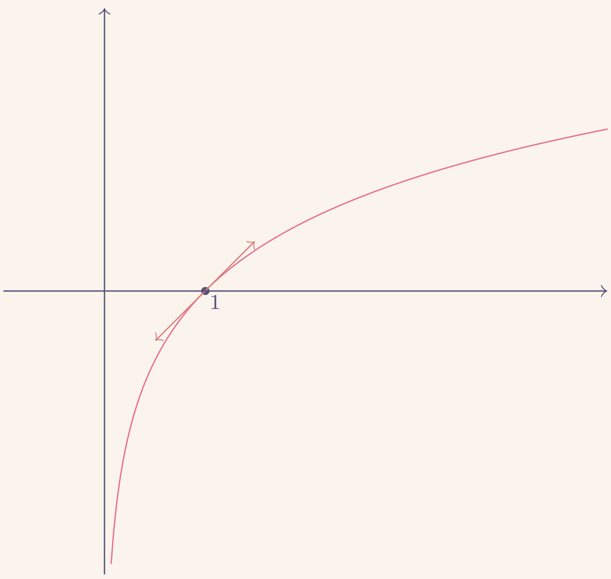
$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty \end{cases}$$

■

**Proposition:**

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0.$$

■




## 2 Exponentielle

**Proposition:** $\ln : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ est bijective.

■

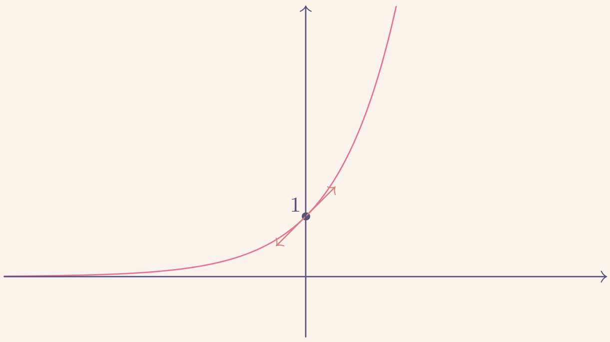
**Définition:** La fonction exponentielle est la réciproque du logarithme népérien. On la note exp.

**Proposition:**

1. $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ est dérivable et $\forall x \in \mathbb{R}, \exp'(x) = \exp(x)$ ;

2. $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} \exp(x) = +\infty; \\ \lim\limits_{x \to -\infty} \exp(x) = 0; \end{cases}$
3. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\exp(x)}{x} = +\infty$ ;
4. $\forall a, b \in \mathbb{R}, \exp(a+b) = \exp(a) \times \exp(b)$.

■




## 3 Fonctions puissances

Remarque (Rappel):

$$\forall a \in \mathbb{R}, \forall x > 0, x^a = \exp(a \ln x).$$

En particulier, en posant $x = e = \exp(1)$, on a donc

$$\forall a \in \mathbb{R}, e^a = \exp(a).$$

Remarque (Notation):

Soit $a \in \mathbb{R}$. Pour ce chapitre, on note $p_a : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^a. \end{array}$

**Proposition:** Soit $a \in \mathbb{R}$. $p_a$ est dérivable sur $\mathbb{R}_*^+$ et

$$\forall x > 0, p_a'(x) = a x^{a-1}.$$

■

**Corollaire:**
1. $\forall a \in \mathbb{R}_-^*$, $p_a$ est strictement décroissante.
2. $\forall a \in \mathbb{R}_+^*$, $p_a$ est strictement croissante.
3. $p_0$ est la fonction constante égale à 1.

■

**Proposition:**
1. Si $a > 0$, $\begin{cases} p_a(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty, \\ p_a(x) \xrightarrow[\substack{x \to 0 \\ >}]{} 0; \end{cases}$

2. Si $a < 0$, $\begin{cases} p_a(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0, \\ p_a(x) \xrightarrow[\substack{x\to 0 \\ >}]{} +\infty; \end{cases}$

3. Si $a = 0$, $\begin{cases} p_a(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1, \\ p_a(x) \xrightarrow[\substack{x\to 0 \\ >}]{} 1. \end{cases}$

■

**Proposition:** On suppose $a > 0$.

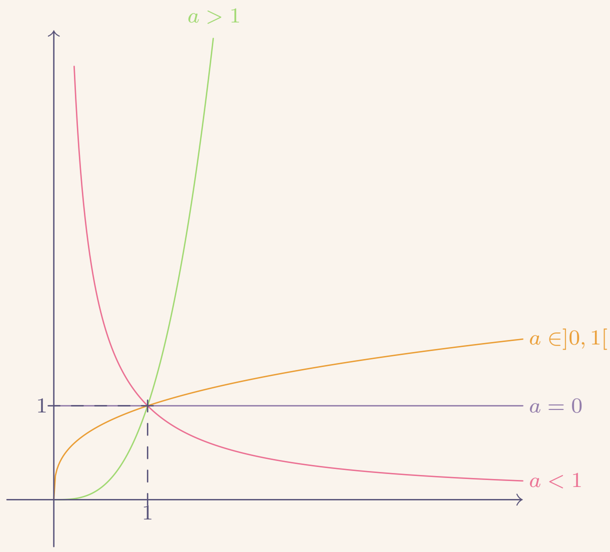
1. Si $a > 1$, alors $\dfrac{p_a(x)}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ ;
2. Si $a < 1$, alors $\dfrac{p_a(x)}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ ;
3. Si $a = 1$, alors $\forall x > 0, p_a(x) = x$.

■

**Proposition:** On suppose $a > 0$. On peut prolonger $p_a$ par continuité en 0 en posant $p_a(0) = 0$.

1. Si $a > 1$, alors $p_a'(x) \xrightarrow[\substack{x\to 0 \\ >}]{} 0$ ;
2. Si $a < 1$, alors $p_a'(x) \xrightarrow[\substack{x\to 0 \\ >}]{} +\infty$ ;

■



**Proposition** (croissances comparées)**:** Soient $a, b \in \mathbb{R}_*^+$. Alors,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln^a(x)}{x^b} = 0.$$

■

**Corollaire:**

$$x \ln x \xrightarrow[\substack{x \to 0 \\ >}]{} 0.$$

■

**Corollaire:** Soit $a > 0$. Alors

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^a}{e^x} = 0.$$

■

# 4 Exponentielle et logarithme de base $a$

**Définition:** Soit $a > 0$. L'application $\exp_a : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_*^+ \\ x & \longmapsto & a^x = e^{x \ln a} \end{array}$ est appelée <u>exponentielle de base $a$</u>.

REMARQUE:
L'exponentielle de base $e$ est l'exponentielle classique.

**Proposition:** $\exp_a$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exp_a'(x) = \ln(a) \exp_a(x) = a^x \ln a.$$

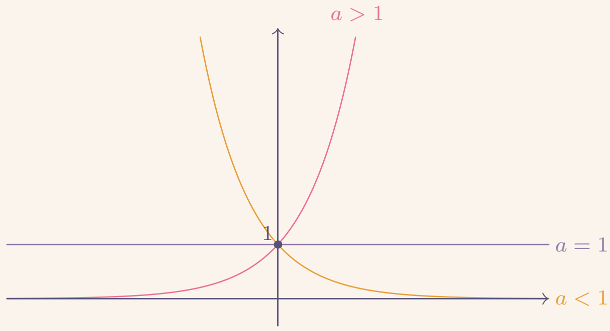
□

**Corollaire:**
1. Si $a \in ]0, 1[$, alors $\exp_a$ est strictement décroissante.
2. Si $a > 1$, alors $\exp_a$ est strictement croissante.
3. Si $a = 1$, alors $\exp_a(x) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

□

**Proposition:**
1. Si $a \in ]0, 1[$,
   — $\exp_a(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$,
   — $\exp_a(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} +\infty$,
   — $\dfrac{\exp_a(x)}{x} \xrightarrow[x \to -\infty]{} -\infty$ ;
2. Si $a > 1$,
   — $\exp_a(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$,

— $\dfrac{\exp_a(x)}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$,
— $\exp_a(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0$ ;




**Proposition:** Si $a \in \mathbb{R}_*^+ \setminus \{1\}$, alors $\exp_a$ est bijective.

**Définition:** Soit $a > 0$ et $a \neq 1$.
La réciproque de $\exp_a$ est appelé logarithme de base $a$ et est noté $\log_a$.

**Proposition:** Si $a \in \mathbb{R}_*^+ \setminus \{1\}$, alors

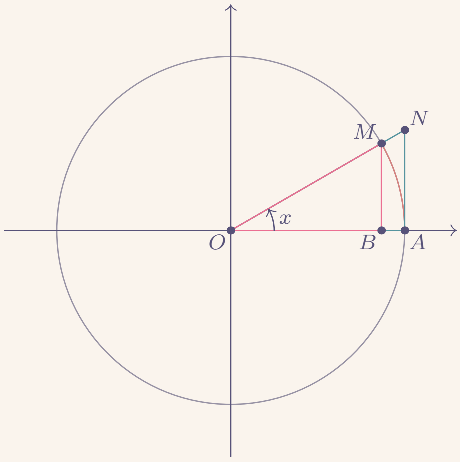
$$\forall x > 0, \log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

■

# 5 Fonctions trigonométriques

**Proposition:**

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$




■

**Corollaire:** sin et cos sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et $\begin{cases} \sin' = \cos, \\ \cos' = -\sin. \end{cases}$

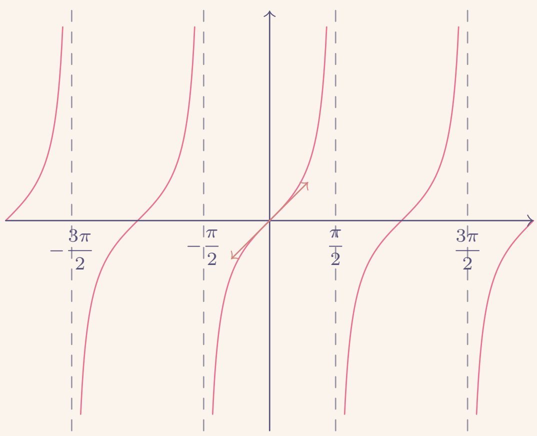
■

**Proposition:** La fonction tan est dérivable sur $\left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \not\equiv \frac{\pi}{2} \ [\pi] \right\} = D$ et

$$\forall x \in D, \tan' x = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

■

**Proposition:** $\lim\limits_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ <}} \tan x = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ >}} = -\infty.$ □

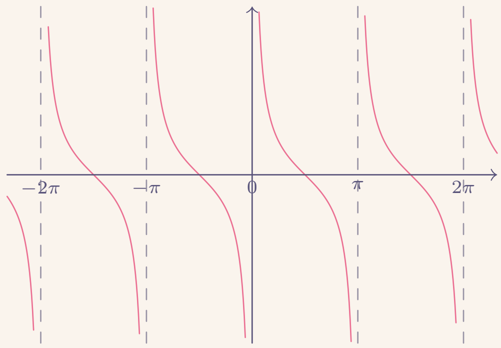


**Proposition:** cotan est dérivable sur $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \equiv 0 \ [\pi]\}$ et

$$\forall x \in D, \operatorname{cotan}' x = -\frac{1}{\sin^2 x} = -1 - \operatorname{cotan}^2 x.$$

■

**Proposition:** $\lim\limits_{\substack{x \to \pi \\ <}} \operatorname{cotan} x = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to \pi \\ >}} \operatorname{cotan} x = +\infty$. □




# 6 Fonctions trigonométriques réciproques

**Proposition – Définition:** L'application $\begin{array}{ccc} \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] & \longrightarrow & [-1,1] \\ x & \longmapsto & \sin x \end{array}$ est bijective.
On appelle arcsinus la réciproque de cette bijection et on la note Arcsin.

Pour tout $x \in [-1,1]$, Arcsin $x$ est le seul angle $\boxed{\text{compris entre } -\frac{\pi}{2} \text{ et } \frac{\pi}{2}}$ donc le sinus vaut $x$. □

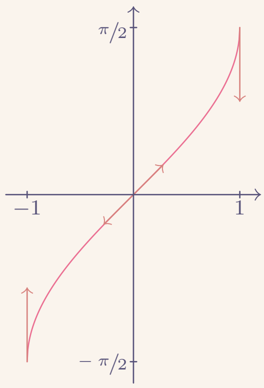
**Proposition:**
1. $\forall x \in [-1,1], \operatorname{Arcsin} x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
2. $\forall \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \operatorname{Arcsin}(\sin \theta) = \theta$
3. $\forall x \in [-1,1], \sin(\operatorname{Arcsin} x) = x$
4. $\forall x \in [-1,1], \cos(\operatorname{Arcsin} x) = \sqrt{1-x^2}$

■

**Proposition:**
1. Arcsin est impaire
2. Arcsin est continue sur $[-1,1]$
3. Arcsin est dérivable sur $]-1,1[$ et

$$\forall x \in ]-1,1[, \operatorname{Arcsin}' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} > 0$$

4. Arcsin n'est pas dérivable en 1 et en -1.




■

Remarque:
Une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ est Arcsin.

**Proposition – Définition:** L'application $\begin{array}{ccc} [0,\pi] & \longrightarrow & [-1,1] \\ x & \longmapsto & \cos x \end{array}$ est bijective. On note sa réciproque Arccos.

En d'autres termes, pour $x \in [-1,1]$, $\operatorname{Arccos} x$ est le seul angle $\boxed{\text{compris entre } 0 \text{ et } \pi}$ dont le cosinus vaut $x$.

■

**Proposition:**
1. $\forall x \in [-1,1]$, $\operatorname{Arccos} x \in [0,\pi]$,
2. $\forall \theta \in [0,\pi]$, $\operatorname{Arccos}(\cos\theta) = \theta$,
3. $\forall x \in [-1,1]$, $\cos(\operatorname{Arccos} x) = x$,
4. $\forall x \in [-1,1]$, $\sin(\operatorname{Arccos} x) = \sqrt{1-x^2}$.

■

**Proposition:**
1. Arccos est continue sur $[-1,1]$,
2. Arccos est dérivable sur $]-1,1[$ et

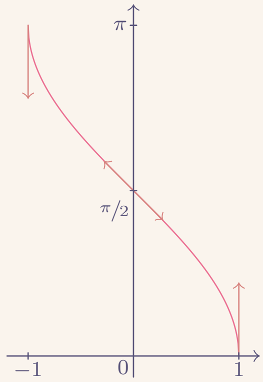
$$\forall x \in ]-1,1[, \operatorname{Arccos}' x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

■

**Corollaire:**

$$\forall x \in [-1,1], \operatorname{Arccos} x + \operatorname{Arcsin} x = \frac{\pi}{2}$$

■



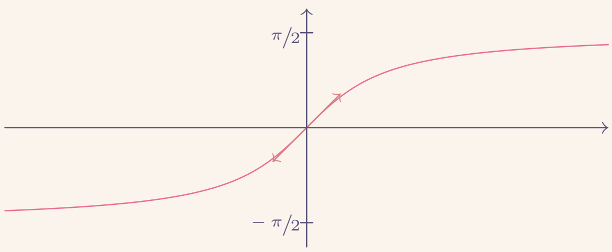

**Proposition – Définition:** L'application $\begin{array}{ccc} \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \tan x \end{array}$ est bijective. On note Arctan la réciproque de cette bijection.

C'est à dire, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{Arctan} x$ est le seul angle $\boxed{\text{compris entre } -\dfrac{\pi}{2} \text{ et } \dfrac{\pi}{2} \text{ (exclus)}}$ dont la tangente vaut $x$.

■

**Proposition:**

1. Arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \operatorname{Arctan}' x = \frac{1}{1+x^2},$$
2. $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{Arctan} x = \dfrac{\pi}{2}, \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{Arctan} x = -\dfrac{\pi}{2}, \end{cases}$
3. Arctan est impaire.




■

**Proposition:**

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} \frac{1}{x} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

■

## 7 Trigonométrie hyperbolique

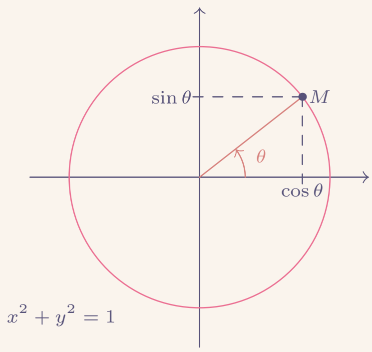
**Définition:** Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose

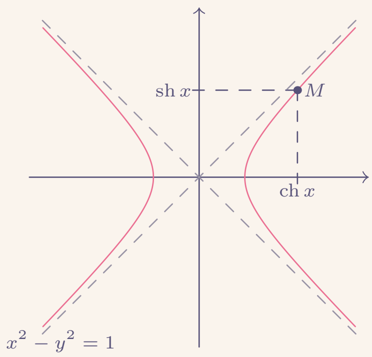
$$\begin{cases} \operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}, \\ \operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}, \\ \operatorname{th} x = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}. \end{cases}$$

ch est appelé cosinus hyperbolique, sh est appelé sinus hyperbolique et th est appelé tangeante hyperbolique.

Remarque:
Ces formules rappèlent les formules d'Euler : pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad \longleftrightarrow \quad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$
$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \quad \longleftrightarrow \quad \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$



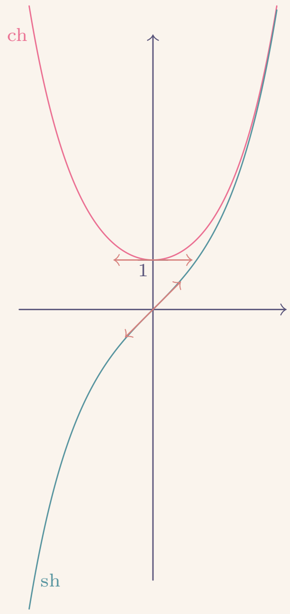




**Proposition:**

$$\forall t \in \mathbb{R}, \operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1.$$

■

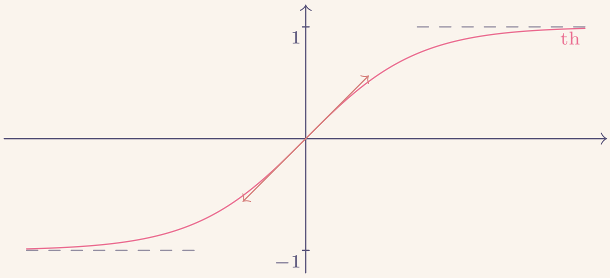
**Proposition:**
1. ch est paire, sh est impaire ;
2. ch et sh sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et $\begin{cases} \mathrm{ch}' = \mathrm{sh}, \\ \mathrm{sh}' = \mathrm{ch}; \end{cases}$
3. sh est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, ch est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ ;
4. $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{ch}\, x = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{sh}\, x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{sh}\, x = -\infty$ ;
5. $\mathrm{ch}\, x \underset{x \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{2} e^x$ et $\mathrm{sh} \underset{x \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{2} e^x$.




■

Remarque:
La courbe représentative de ch est appelée “chaînette”.

**Proposition:**
1. th est imapire ;
2. th est dérivable sur $\mathbb{R}$ et
$$\forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{th}'\, x = \frac{1}{\mathrm{ch}^2\, x} = 1 - \mathrm{th}^2\, x;$$
3. th est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ ;
4. $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{th}\, x = 1$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{th}\, x = -1$.


1
th
−1

■

CHAPITRE

5

# CALCUL INTÉGRAL

## 1 Généralités

**Définition:** Soient $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$, $f$ une fonction continue et $a, b \in I$.

On définit l'intégrale de $f$ de $a$ à $b$ par

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = \big[F(x)\big]_a^b = F(b) - F(a)$$

où $F$ est une primitive quelconque de $f$.

La variable $x$ est muette :

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = \int_a^b f(u)\ \mathrm{d}u = \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = \int_a^b f(\text{❀})\ \mathrm{d}\text{❀} \neq \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}t$$

**Proposition** (Croissance)**:** Soient $f$ et $g$ continues sur $I$, $a, b \in I^2$ tels que $\begin{cases} \forall x \in I, f(x) \leqslant g(x), \\ a \leqslant b. \end{cases}$

Alors

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x.$$

■

**Proposition** (Linéarité)**:** Soient $f$ et $g$ continues sur $I$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $a, b \in \mathbb{R}$. Alors,

$$\int_a^b \big(\alpha\, f(x) + \beta\, g(x)\big)\ \mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x + \beta \int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x.$$

■

**Proposition** (Chasles)**:** Soit $f$ continue sur un interval $I$, $a, b, c \in I$. Alors

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\ \mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\ \mathrm{d}x.$$

■

**Proposition:** Soit $f$ positive et continue sur un interval $I$, $(a, b) \in I^2$ avec $a \leqslant b$. Alors

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = 0 \iff \forall x \in [a, b], f(x) = 0.$$

■

CHAPITRE

# 6

# ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES

**Définition:** Une équation différentielle est une égalité faisant intervenir une fonction inconnue $y$ ainsi que ses dérivées successives $y', y'', y^{(3)}, \dots, y^{(n)}$.

**Définition:** Une équation différentielle linéaire d'ordre $n$ est de la forme

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_0 y = b(t)$$

où $b, a_0, a_1, \dots, a_n$ sont des fonctions connues et continues sur un intervalle $I$. On dit que $b$ est le second membre de l'équation.

**Proposition** (Principe de superposition)**:** Soient $b_1$ et $b_2$ continues sur $I$. Soient $a_0, a_1, \dots, a_n$ également continues sur $I$.

$$(E_1) : \quad \sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)} = b_1$$

$$(E_2) : \quad \sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)} = b_2$$

Soient $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2$.

$$(E) : \quad \sum_{k=1}^{n} a_k y^{(k)} = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2$$

$$\left.\begin{array}{l} y_1 \text{ solution de } (E_1) \\ y_2 \text{ solution de } (E_2) \end{array}\right\} \implies \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 \text{ solution de } (E)$$

■

**Proposition:** Soit $(E)$ l'équation différentielle $\sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)} = b$ où $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sont des fonctions homogènes. L'équation homogène associée à $(E)$ est

$$(H) : \sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)} = 0$$

Les solutions de $(E)$ sont toutes de la forme $h + y_0$ où $h$ est solution de $(H)$ et $y_0$ solution de $(E)$.

■

**Théorème** (Théorème de Cauchy)**:** Soit $(E)$ une équation linéaire différentielle.

$$(E) : \quad y^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k y^{(k)} = b$$

où $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sont continues sur un intervalle $I$.
Soit $t_0 \in I$ et $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{C}^n$.
Il existe **une et une seule** fonction $y$ telle que

$$\begin{cases} y \text{ solution de } (E) \\ \forall i \in [\![0, n-1]\!], y^{(i)}(t_0) = \alpha_i \end{cases}$$

## 1

Soit $(E)$ l'équation $y' + ay = b$ où $a$ et $b$ sont continues sur un intervalle $I$.

**Proposition:** Soit $A$ une primitive de $a$ sur un intervalle $I$.

$$(H) : \quad y' + ay = 0$$

Les solutions de $(H)$ sont $t \mapsto \lambda e^{-A(t)}$ avec $\lambda \in \mathbb{C}$

■

Remarque (pseudo preuve):

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} + a(t)y = 0 &\iff \frac{dy}{y} = -a(t)dt \\ &\iff \int \frac{dy}{y} = \int -a(t)dt \\ &\iff \ln(y) = -A(t) + K \\ &\iff y = e^{-A(t)+K} \\ &\iff y = \lambda e^{-A(t)} \text{ avec } \lambda = e^K\end{aligned}$$

## 2 Annexe

$y : I \to E$ où $E$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

$$\begin{aligned}(*) : \quad & y' + a(x)y = 0 \text{ et } y(x_0) = 0 \\ \iff & \forall x \in I, y(x) = -\int_{x_0}^{x} a(u)y(u)\ du\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}T : E^I &\longrightarrow E^I \\ y &\longmapsto \left(x \mapsto -\int_{x_0}^{x} a(u)y(u)\ du\right)\end{aligned}$$

donc $(*) \iff T(y) = y$

CHAPITRE

# 7

# DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS

**Définition:** Soit $f$ une fonction définie au voisinage d'un point $a \in \mathbb{R}$.

On dit que $f$ possède un développment limité d'ordre $n$ au voisinage de $a$ s'il existe des réels $(c_0, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tels que

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots + c_n(x-a)^n + \underset{x \to a}{o}\big((x-a)^n\big).$$

En particulier, avec $a = 0$, on a

$$f(x) = \underbrace{c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n}_{\text{développement de Taylor}} + \underbrace{\underset{x \to 0}{o}(x^n)}_{\text{reste}}.$$

**Théorème** (Taylor-Young)**:** Si $f$ est de classe $\mathscr{C}^n$ (i.e. $f$ définie et dérivable $n$ fois et $f^{(n)}$ est continue) au voisinage de $a$, alors $f$ admet un développement limité d'ordre $n$ au voisinage de $a$ est

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + (x-a)^2\frac{f''(a)}{2!} + \cdots + (x-a)^n\frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \underset{x \to a}{o}\big((x-a)^n\big).$$

□

Remarque:
Cette formule est à éviter en pratique : il est bien trop difficile de calculer $f^{(n)}$ pour tout $n$.

Cependant, on peut quand même en déduire le développement limité de exp, cos, sin et $x \mapsto (1+x)^\alpha$ en 0.

**Corollaire:**

$$
\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \underset{x\to 0}{o}(x^n),\\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \underset{x\to 0}{o}(x^{2n}),\\
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \underset{x\to 0}{o}(x^{2n+1}),\\
\forall \alpha \in \mathbb{R}, (1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \alpha(\alpha-1)\frac{x^2}{2!} + \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\frac{x^3}{3!} + \cdots\\
&\quad + \alpha(\alpha-1)\cdots\big(\alpha-(\alpha-1)\big)\frac{x^n}{n!} + \underset{x\to 0}{o}(x^n).
\end{aligned}
$$

Remarque:
Avec $\alpha = -1$, on obtient le développement limité de $\dfrac{1}{1+x}$ en 0 :

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \underset{x\to 0}{o}(x^n).$$

On en déduit donc le développement limité en 0 de $\dfrac{1}{1-x}$ :

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$$

Avec $\alpha = \dfrac{1}{2}$, on obtient le développement limité à l'ordre 2 de $\sqrt{1+x}$ :

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \underset{x\to 0}{o}(x^2).$$

**Théorème** (primitivation)**:** Soit $f$ une fonction continue en $a$ ayant un développement limité d'ordre $n$ au voisinage de $a$. Soient $(c_0, c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tels que

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots + c_n(x-a)^n + \underset{x\to a}{o}\big((x-a)^n\big).$$

Soit $F$ une primitive de $f$. Alors $F$ a un développement limité d'ordre $n+1$ au voisinage de $a$ et

$$F(x) = F(a) = c_0(x-a) + c_1\frac{(x-a)^2}{2} + \cdots + c_n\frac{(x-a)^{n+1}}{n+1} + \underset{x\to a}{o}\big((x-a)^{n+1}\big).$$

□

**Corollaire:** En primitivant le développement limité de $\dfrac{1}{x+1}$, on obtient le développement limité de $\ln(1+x)$ :

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \underset{x\to 0}{o}(x^{n+1}).$$

On en déduit aussi le développement limité de Arctan :

$$\operatorname{Arctan} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \underset{x\to 0}{o}(x^{2n+1}).$$

$\square$

CHAPITRE

# 8

# ENSEMBLES, APPLICATIONS, RELATIONS ET LOIS DE COMPOSITION

## 1 Théorie naïve des ensembles

**Définition:** Un ensemble est une collection finie ou infinie d'objets de même nature ou non. L'ordre de ces objets n'a pas d'importance.

Remarque (Notation):
Soit $E$ un ensemble et $x$ un objet de $E$.
On écrit $x \in E$ ou bien $x \ni E$.

Remarque (⚠ Paradoxe):
On note $\Omega$ l'ensemble de tous les ensembles. Alors, $\Omega \in \Omega$.
Ce n'est pas le cas de tous les ensembles :

$$\mathbb{N} \notin \mathbb{N} \text{ car } \mathbb{N} \text{ n'est pas un entier}$$

On distingue donc 2 types d'ensembles :

- ceux qui vérifient $E \notin E$, on dit qu'ils sont ordinaires
- ceux qui vérifient $E \in E$, on dit qu'ils sont extra-ordinaires

On note $O$ l'ensemble de tous les ensembles ordinaires.

- Supposons $O$ ordinaire. Alors, $O \notin O$
  Or, $O$ est ordinaire et donc $O \in O$ $\lightning$
- Supposons $O$ extra-ordinaire.
  Alors $O \in O$ et donc $O$ ordinaire $\lightning$

C'est un paradoxe

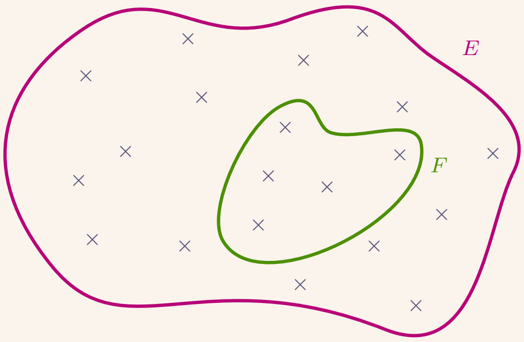
Pour éviter ce type de paradoxe, on a donné une définition axiomatique qui explique quelles sont les opérations permettant de combiner des ensembles pour en faire un autre.

**Définition:** Soit $E$ un ensemble et $F$ un autre ensemble. On dit que $E$ et $F$ sont égaux (noté $E = F$) si $E$ et $F$ contiennent les mêmes objets.

**Définition:** L'ensemble vide, noté $\varnothing$ est le seul ensemble à n'avoir aucun élément.

**Définition:** Soient $E$ et $F$ deux ensembles. On dit que $F$ est inclus dans $E$, noté $F \subset E$ ou $E \supset F$ si tous les éléments de $F$ sont aussi des éléments de $E$.

$$\forall x \in F, x \in E$$




**Proposition:** Pour tout ensemble $E$, $\varnothing \subset E$

■

**Définition:** Soit $E$ un ensemble. On peut former l'ensemble de toutes les parties de $E$ (une partie de $E$ est un ensemble $F$ avec $F \subset E$). On le note $\mathscr{P}(E)$

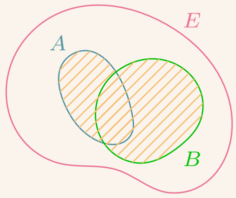
$$A \in \mathscr{P}(E) \iff A \subset E$$

**Définition:** Soit $E$ un ensemble et $A, B \in \mathscr{P}(E)$

1.

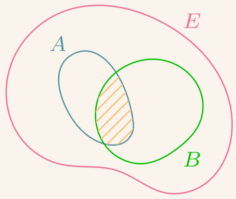
La <u>réunion</u> de $A$ et $B$ est

$$A \cup B = \{x \in E \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$$



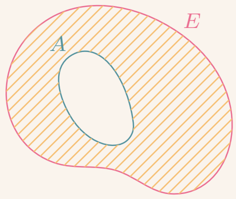

2. L'<u>intersection</u> de $A$ et $B$ est

$$A \cap B = \{x \in E \mid x \in A \text{ et } x \in B\}$$



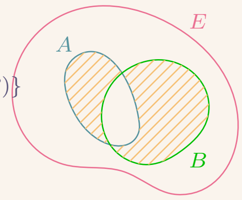

3. Le <u>complémentaire</u> de $A$ dans $E$ est

$$E \setminus A = \{x \in E \mid x \notin A\} = C_E A$$




4. La <u>différence symétrique</u> de $A$ et $B$ est

$$\begin{aligned} A \Delta B &= \{x \in E \mid (x \in A \text{ et } x \notin B) \text{ ou } (x \notin A \text{ et } x \in B)\} \\ &= (A \cup B) \setminus (A \cap B) \end{aligned}$$




**Proposition:** Soit $E$ un ensemble et $A, B, C \in \mathscr{P}(E)$

1. $A \cap A = A$
2. $B \cap A = A \cap B$
3. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
4. $A \cap \varnothing = \varnothing$
5. $A \cap E = A$
6. $A \cup A = A$
7. $B \cup A = A \cup B$
8. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
9. $A \cup \varnothing = A$
10. $A \cup E = E$
11. $(E \setminus A) \setminus A = E \setminus A$
12. $E \setminus (E \setminus A) = A$
13. $E \setminus \varnothing = E$
14. $E \setminus E = \varnothing$
15. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
16. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
17. $E \setminus (A \cup B) = (E \setminus A) \cap (E \setminus B)$
18. $E \setminus (A \cap B) = (E \setminus A) \cup (E \setminus B)$

■

## 2 Applications

**Définition:** Une application $f$ est la donnée de
- un ensemble $E$ appelé ensemble de départ
- un ensemble $F$ appelé ensemble d'arrivée
- une fonction qui associe à tout élément $x$ de $E$ un unique élément de $F$ noté $f(x)$

L'application est notée

$$\begin{aligned} f : E &\longrightarrow F \\ x &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

**Définition:** Soit $f : E \to F$ une application. On dit que $f$ est
- injective si tout élément de $F$ a au plus un antécédent par $f$
- bijective si tout élément de $F$ a un unique antécédent par $f$
- surjective si tout élément de $F$ a au moins un antécédent par $f$

**Définition:** Soit $f : E \to F$ et $g : F \to G$. L'application notée $g \circ f$ est définie par

$$\begin{aligned} g \circ f : E &\longrightarrow G \\ x &\longmapsto g(f(x)) \end{aligned}$$

On dit que c'est la composée de $f$ et $g$.

**Proposition:** Soient $f : E \to F, g : F \to G, h : G \to G$. Alors, $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$

■

Remarque (⚠ Attention):
En général, $g \circ f \neq f \circ g$

Par exemple, $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$ et $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array}$

Alors, $f \circ g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \longmapsto & x \end{array}$ et $g \circ f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & |x| \end{array}$

donc $f \circ g \neq g \circ f$

**Proposition:** Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$
1. Si $g \circ f$ est injective, alors $f$ est injective
2. Si $g \circ f$ est surjective, alors $g$ est surjective
3. Si $f$ et $g$ sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective
4. Si $f$ et $g$ sont injectives, alors $g \circ f$ est injective

■

Remarque:
$f : E \longrightarrow F$

$$f \text{ injective} \iff \Big(\forall (x,y) \in E^2, f(x) = f(y) \implies x = y\Big)$$

**Définition:** Soit $f : E \to F$ une <u>bijection</u>. L'application $\left\{ \begin{array}{ccl} F & \longrightarrow & E \\ y & \longmapsto & \text{l'unique antécédent de } y \text{ par } f \end{array} \right.$ est la <u>réciproque</u> de $f$ notée $f^{-1}$

**Définition:** L'<u>identité de $E$</u> est $\mathrm{id}_E$ : $\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x \end{array}$

**Proposition:** Soient $f : E \to F$ et $g : F \to E$

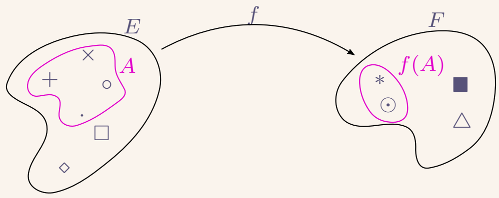
$$\left. \begin{array}{l} f \circ g = \mathrm{id}_F \\ g \circ f = \mathrm{id}_E \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} f \text{ bijective} \\ f^{-1} = g \end{array} \right.$$

■

**Définition:** Soit $f : E \to F$

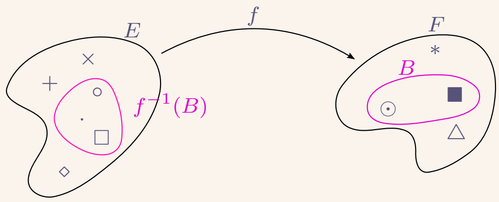
1. Soit $A \in \mathscr{P}(E)$. L'<u>image directe</u> de $A$ par $f$ est

$$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$$




2. Soit $B \in \mathscr{P}(F)$. L'<u>image réciproque</u> de $B$ par $f$ est

$$f^{-1}(B) = \{x \in E | f(x) \in B\}$$




Remarque:

- $y \in f(A) \iff \exists x \in A, y = f(x)$,
- $x \in f^{-1}(B) \iff f(x) \in B$.

**Proposition:** Soient $f : E \to F$, $A \in \mathscr{P}(E)$ et $F \in \mathscr{P}(F)$.

1. $f^{-1}\big(f(A)\big) \supset A$,
2. Si $f$ est injective alors $f^{-1}\big(f(A)\big) = A$,
3. $f\big(f^{-1}(B)\big) \subset B$,
4. Si $f$ est surjective, alors $f\big(f^{-1}(B\big) = B$.

■

**Proposition:** Soit $f : E \to F$ et $(A, B) \in \mathscr{P}(F)^2$. Alors

$$\begin{cases} f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B), & (1) \\ f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B). & (2) \end{cases}$$

■

**Proposition:** Soient $f : E \to F$ et $(A, B) \in \mathscr{P}(E)^2$.

1. $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$
2. Si $f$ est injective, $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$
3. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

■

Remarque (Contre-exemple pour 2.):
*Cas d'une application qui n'est pas injective*

On pose $A = \mathbb{R}_*^+$, $B = \mathbb{R}_*^-$ et

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ x &\longmapsto x^2 \end{aligned}$$

On a $A \cap B = \varnothing$ donc $f(A \cap B) = \varnothing$.

Or, $\left.\begin{aligned} f(A) = \mathbb{R}_*^+ \\ f(B) = \mathbb{R}_*^+ \end{aligned}\right\}$ donc $f(A) \cap f(B) = \mathbb{R}_*^+$.

On a

$$f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B).$$

**Définition:** Soit $f : E \to F$ et $A \in \mathscr{P}(E)$.

La restriction de $f$ à $A$ est

$$\begin{aligned} f_{|A} : A &\longrightarrow F \\ x &\longmapsto f(x)a \end{aligned}$$

On dit aussi que $f$ est **un** prolongement de $f_{|A}$.

Remarque (Notation):
L'ensemble des applications de $E$ dans $F$ est noté $F^E$.

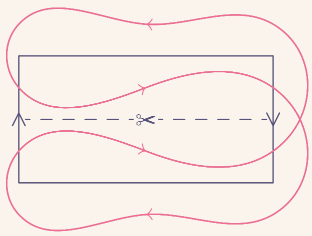
## 3 Relations binaires

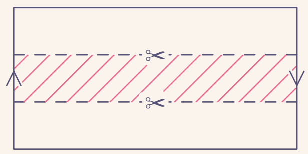
**Définition:** Soit $E$ un ensemble. Un relation (binaire) sur $E$ est un prédicat définit sur $E^2$.

**Définition:** Soit $E$ un ensemble, $\diamond$ une relation sur $E$. On dit que $\diamond$ est un relation d'équivalence si

1. $\forall x \in E, x \diamond x,$ (réflectivité)
2. $\forall x, y, \in E, x \diamond y \implies y \diamond x,$ (symétrie)
3. $\forall x, y, z \in E, \left.\begin{matrix} x \diamond y \\ y \diamond z \end{matrix}\right\} \implies x \diamond z$ (transitivité)

Remarque:
Le but d'une relation d'équivalence est d'identifier des objets différents.





**Définition:** Soit $E$ un ensemble et $\diamond$ une relation d'équivalence sur $E$. Soit $x \in E$. La classe de $x$ (modulo $\diamond$) est

$$\mathscr{C}\ell_{\diamond}(x) = \mathscr{C}\ell(x) = \overline{x} = \{y \in E \mid y \diamond x\}.$$

**Proposition:** Soit $E$ un ensemble muni d'une relation d'équivalence $\diamond$. Alors

$$\forall x, y \in E, x \diamond y \iff \overline{x} = \overline{y}.$$

■

Hors-Programme

**Définition:** Soit $E$ un ensemble et $\diamond$ une relation d'équivalence.
L'ensemble
$$\{\overline{x} \mid x \in E\} = {}^{E}/_{\diamond}$$
est appelé quotient de $E$ modulo $\diamond$.

**Définition:** Soit $E$ un ensemble et $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties de $E$.
On dit que $(A_i)_{i\in I}$ est une partition de $E$ si
$$\begin{cases} E = \bigcup_{i\in I} A_i \\ \forall i \neq j, A_i \cap A_j = \varnothing \end{cases}$$
On a donc
$$\forall x \in E, \exists! i \in I, x \in A_i.$$

**Proposition:** Soit $E$ un ensemble muni d'une relation d'équivalence $\diamond$. Les classes d'équivalences de $E$ modulo $\diamond$ forment une partition de $E$.

■

**Proposition:** Soit $E$ un ensemble et $(A_i)_{i\in I}$ une partition de $E$ telle que
$$\forall i \in I, A_i \neq \varnothing.$$
Alors il existe une relation d'équivalence $\diamond$ telle que pour tout $i \in I$, $A_i$ est une classe d'équivalence modulo $\diamond$.

■

**Définition:** Soit $E$ un ensemble et $\diamond$. On dit que $\diamond$ est une relation d'ordre sur $E$ si
1. $\diamond$ est réfléctive $(\forall x \in E, x \diamond x)$,
2. $\diamond$ est anti-symétrique :
$$\forall x, y \in E, \quad \left.\begin{matrix} x \diamond y \\ y \diamond x \end{matrix}\right\} \implies x = y,$$
3. $\diamond$ est transitive $\Big(\forall x, y, z \in E, (x \diamond y \text{ et } y \diamond z) \implies x \diamond z\Big)$.

En général, la relation $\diamond$ est notée $\leqslant$ ou $\preccurlyeq$. On dit aussi que $(E, \diamond)$ est un ensemble ordonné.

**Définition:** Soit $(E, \leqslant)$ un ensemble ordonné. Soient $x, y \in E$. On dit que $x$ et $y$ sont

comparables si
$$x \leqslant y \text{ ou } y \leqslant x.$$
On dit que $\leqslant$ est un ordre total si tous les éléments de $E$ sont comparables 2 à 2.

**Définition:** Soit $(E, \leqslant)$ un ensemble ordonné, $A \in \mathscr{P}(E)$ et $M \in E$. On dit que $A$ est majorée par $M$, que $M$ majore $A$ ou que $M$ est un majorant de $A$ si
$$\forall a \in A, a \leqslant M.$$
Soit $m \in E$. On dit que $A$ est minorée par $m$, que $m$ minore $A$ ou que $m$ est un minorant de $A$ si
$$\forall a \in A, m \leqslant a.$$

Il manque une partie du cours ici

**Proposition:** Soit $(E, \leqslant)$ un ensemble ordonné et $A \in \mathscr{P}(E)$. Si $A$ a une borne supérieure, alors celle-ci est unique. On la note $\sup A$.

■

**Proposition – Définition:** Soit $(E, \leqslant)$ un ensemble ordonné et $A \in \mathscr{P}(E)$ minorée par $m \in E$. On dit que $m$ est une borne inférieur de $A$ si
$$\begin{cases} \forall a \in A,\ m \leqslant a, \\ \forall x \in E,\ (\forall a \in A,\ x \leqslant a) \implies x \leqslant m. \end{cases}$$
Dans ce cas, $m$ est unique et on la note $\inf(A)$. □

**Définition:** Soit $(E, \leqslant)$ un ensemble ordonné et $A \in \mathscr{P}(E)$.

1. Soit $M \in E$. On dit qye $M$ est le plus grand élément de $A$ ou que $M$ est le maximum de $A$ si
$$\begin{cases} \forall a \in A,\ a \leqslant M, \\ M \in A. \end{cases}$$
Dans ce cas, on le note $M = \max(A)$.
2. Soit $m \in E$. On dit que $m$ est le plus petit élément de $A$ ou que $m$ est le minimum de $A$ si
$$\forall a \in A,\ a \geqslant mm \in A$$
Dans ce cas, on le note $m = \min(A)$.

**Proposition:** En cas d'éxistence, il y a unicité du minimum et du maximum.

■

**Proposition:** Soit $(E, \leqslant)$ un ensemble ordonné, $A \in \mathscr{P}(E)$ et $M \in E$.

$$M = \max(A) \iff \begin{cases} M = \sup(A), \\ M \in A; \end{cases}$$

$$M = \min(A) \iff \begin{cases} M = \inf(A), M \in A. \end{cases}$$

■

**Définition:** Soit $(E, \leqslant)$ un ensemble ordonné, $A \in \mathscr{P}(E)$ et $M \in A$.

On dit que $M$ est un <u>élément maximal</u> de $A$ si aucun élément de $A$ n'est strictement supérieur à $M$ :

$$\nexists a \in A, \begin{cases} M \leqslant a, \\ M \neq a. \end{cases}$$

On dit que $M$ est un <u>élément minimal</u> de $A$ si aucun élément de $A$ n'est strictement inférieur à $M$ :

$$\nexists a \in A, \begin{cases} M \geqslant a, \\ M \neq a. \end{cases}$$

**Proposition:** Avec les notations précédentes, si $A$ a un maximum $M$ alors $M$ est le seul élément maximal de $A$.

■

**Définition:** Soient $(E, \leqslant)$ et $(F, \preccurlyeq)$ deux ensembles ordonnés et $f : E \to F$. On dit que

1. $f$ est <u>croissante</u> si
$$\forall (x, y) \in E^2, x \leqslant y \implies f(x) \preccurlyeq f(y);$$
2. $f$ est <u>décroissante</u> si
$$\forall (x, y) \in E^2, x \leqslant y \implies f(x) \succcurlyeq f(y).$$

**Définition:** Soit $(E, \leqslant)$ un ensemble ordonné et $A \in \mathscr{P}(E)$. On dit que $A$ est <u>bornée</u> si $A$ est à la fois majorée et minorée.

**Définition:** Avec les notations précédentes, un <u>extremum</u> de $A$ (sous reserve d'éxistence) est un maximum ou un minimum de $A$.

## 4 Lois de composition

**Définition:** Une loi de composition interne est une application $f$ de $E \times E$ dans $E$. On la note $x * y$ au lieu de $f(x, y)$ (on est libre de choisir le symbôle).

**Définition:** Soit $E$ un ensemble muni d'une loi de composition interne $\boxtimes$.
On dit que $\boxtimes$ est associative si

$$\forall (x, y, z) \in E^3,\ (x \boxtimes y) \boxtimes z = x \boxtimes (y \boxtimes z).$$

Dans ce cas, on écrit plutôt $x \boxtimes y \boxtimes z$.

**Définition:** On dit que $\boxtimes$ est commutative si

$$\forall (x, y) \in E^2, x \boxtimes y = y \boxtimes x.$$

**Définition:** Soit $e \in E$. On dit que $e$ est un

— élément neutre à gauche si

$$\forall x \in E,\ e \boxtimes x = x;$$

— élément neutre à droite si

$$\forall x \in E,\ x \boxtimes e = x;$$

— élément neutre si

$$\forall x \in E,\ e \boxtimes x = x \boxtimes e = x.$$

**Proposition:** Sous reserve d'existence, il y a unicité de l'élément neutre.

■

**Axiome** (axiome du choix)**:** Soit $E$ un ensemble non vide. Il existe $f : \mathscr{P}(E) \setminus \{\varnothing\} \to E$ telle que

$$\forall A \in \mathscr{P}(E) \setminus \{\varnothing\},\ f(A) \in A.$$

**Définition:** Soit $f : E \to F$. Le graphe de $f$ est

$$\Big\{ \big(x, f(x)\big) \mid x \in E \Big\} \subset E \times F.$$

**Proposition:** Soit $G \subset E \times F$. $G$ est le graphe d'une application si et seulement si

$$\forall x \in E,\ \exists! y \in F,\ (x, y) \in G.$$

■

**Définition:** Soit $A \in \mathscr{P}(E)$. L'indicatrice de $A$ est

$$\begin{aligned} \mathbb{1}_A : E &\longrightarrow \{0,1\} \\ x &\longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A, \\ 0 & \text{si } x \notin A. \end{cases} \end{aligned}$$

**Définition:** Soit $E$ un ensemble muni d'une loi de composition interne $\boxtimes$ et $x \in E$.

1. On dit que $x$ est simplifiable à gauche si

$$\forall (y,z) \in E^2,\ (x \boxtimes y = x \boxtimes z) \implies x = z.$$

et que $x$ est simplifiable à droite si

$$\forall (y,z) \in E^2,\ (y \boxtimes x = z \boxtimes y) \implies x = z.$$

2. On dit que $x$ est symétrisable à gauche s'il exiiste $y \in E$ tel que $y \boxtimes x = e$ où $e$ est l'élément neutre de $\boxtimes$.
De même, on dit que $x$ est symétrisable à droite s'il existe $y \in E$ tel que $x \boxtimes y = e$.
On dit que $x$ est symétrisable s'il est symétrisable à gauche et à droite, donc s'il existe $y \in E$ tel que $x \boxtimes y = y \boxtimes x = e$.

**Proposition:** Avec les notations précédentes, si $\boxtimes$ est associative, et $x$ est symétrisable, alors $x$ est simplifiable.

■

**Proposition – Définition:** On suppose $\boxtimes$ associative. Soit $x \in E$ symétrisable. Alors

$$\exists! y \in E,\ x \boxtimes y = y \boxtimes x = e.$$

On dit que $y$ est le symétrique de $x$ et on le note $y = x^*$.

■

Remarque:
1. Si la loi est notée $+$, on parle d'opposé plutôt que de symétrique et on le note $-x$ au lieu de $x^*$. L'élément neutre est noté $0_E$.
2. Si la loi est notée $\times$, on parle d'élément inversible au lieu de symétrisable, d'inverse au lieu de symétrique et on note $x^{-1}$ au lieu de $x^*$. On note le neutre $1_E$.

## 5 Divers

**Définition:** Soient $E$ et $F$ deux ensembles. Un couple $(x,y)$ est la donnée d'un élément

$x$ de $E$ et d'un élément $y$ de $F$ où

$$\forall x, x' \in E, \forall y, y' \in F, \qquad (x, y) = (x', y') \iff \begin{cases} x = x', \\ y = y'. \end{cases}$$

On note $E \times F$ l'ensemble des couples ; c'est le produit cartésien de $E$ et $F$.

**Définition:** Soient $E$ et $F$ deux ensembles. On dit que $E$ et $F$ sont équipotents s'il existe une bijection de $E$ dans $F$.

**Définition:** Soit $f : E \to F$. L'image de $f$ est

$$\mathrm{Im}(f) = f(E) = \big\{ f(x) \mid x \in E \big\}.$$

**Proposition:** Soit $f : E \to F$.

$$f \text{ est surjective} \iff f(E) = F.$$

**Définition:** Une suite de $E$ est une application de $\mathbb{N}$ dans $E$.

Remarque (Notation):
Soit $u \in E^{\mathbb{N}}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on écrit $u_n$ à la place de $u(n)$.

**Définition:** Soient $E$ et $I$ deux ensembles. Une famille de $E$ indexée par $I$ est une application de $I$ dans $E$.

À la place de $u(i)$ (avec $i \in I$), on écrit $u_i$.

**Définition:** Soit $E$ un ensemble et $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties de $E$. On suppose $I \neq \varnothing$. On pose

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \in E \mid \exists i \in I, x \in A_i\}$$

et

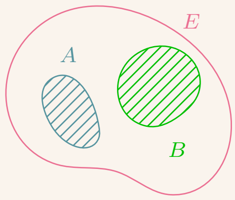
$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \in E \mid \forall i \in I, x \in A_i\}.$$

On pose aussi $\displaystyle\bigcup_{i \in \varnothing} A_i = \varnothing$ et $\displaystyle\bigcap_{i \in \varnothing} A_i = E$.

Remarque:
De même que pour les sommes et produits de complexes, on peut intervertir des réunions doubles.

**Proposition:** Soit $E$ un ensemble, $(A, B) \in \mathscr{P}(E)^2$.

$$A \subset (E \setminus B) \iff A \cap B = \varnothing.$$




$\blacksquare$

**Proposition:** Si $f : E \to F$ et $g : F \to G$ sont bijectives, alors $g \circ f$ est bijective et

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

$\square$

Remarque (⚠ Attention):
$g \circ f$ peut-être bijective alors que $f$ et $g$ ne le sont pas.

CHAPITRE

9

# INÉGALITÉS DANS $\mathbb{R}$

## 1

## 2

## 3

## 4 Bornes supérieures

**Proposition** (borne inférieure)**:** Toute partie minorée non vide de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure.

■

**Proposition** (caractérisation de la borne supérieure)**:** Soit $A \subset \mathbb{R}$ non vide majorée et $M \in \mathbb{R}$.

$$M = \sup(A) \iff \begin{cases} \forall a \in A,\ a \leqslant M, \\ \forall \varepsilon > 0, \exists a_0 \in A, A_0 > M - \varepsilon. \end{cases}$$

■

**Proposition** (caractérisation de la borne inférieure)**:** Soit $A \subset \mathbb{R}$, non vide minorée et $m \in \mathbb{R}$.

$$m = \inf(A) \iff \begin{cases} \forall a \in A,\ m \leqslant a; \\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists a_0 \in A,\ a_0 < m + \varepsilon. \end{cases}$$

□

**Proposition:** Soit $A \subset \mathbb{R}$ non vide majorée et $M \in \mathbb{R}$.

$$M \geqslant \sup(A) \iff \forall a \in A, a \leqslant M.$$

**Proposition:** Soit $A \subset \mathbb{R}$ non vide minorée et $m \in \mathbb{R}$.

$$m \leqslant \inf(A) \iff \forall a \in A,\, m \leqslant a.$$

**Proposition − Définition:** $\mathbb{R}$ est archimédien :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\, \forall y \in \mathbb{R},\, \exists n \in \mathbb{N},\, nx \geqslant y.$$

**Théorème:** Toute fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes : si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ (avec $a < b \in \mathbb{R}$) est continue, alors

$$\exists (\alpha, \beta) \in [a, b]^2,\ \forall x \in [a, b],\ f(\alpha) \leqslant f(x) \leqslant f(\beta).$$

**Proposition:** Soit $A \subset \mathbb{R}$ non vide majorée. Il existe une suite $(a_n) \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = \sup(A)$.

**Proposition:** Soit $A \subset \mathbb{R}$ non vide minorée. Il existe une suite $(a_n) \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = \inf(A)$.

## 5 Partie entière

**Proposition − Définition:** Soit $x \in \mathbb{R}$. Il existe un unique entier $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$n \leqslant x < n + 1.$$

Cet entier $n$ est appelé partie entière de $x$ et est noté $\lfloor x \rfloor$.

## 6 Densité

**Définition:** Soit $A \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$. On dit que $A$ est dense dans $\mathbb{R}$ si, pour tout intervalle $I$ ouvert non vide de $\mathbb{R}$, $A \cap I \neq \varnothing$.

**Théorème:** $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

**Théorème:** $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Il manque une partie du cours ici

**7**

**8**

Il manque une partie du cours ici ■

Il manque une partie du cours ici

CHAPITRE

# 10

# NOMBRES ENTIERS - $\mathbb{N}$

## 1 Axiomatique de $\mathbb{N}$

**Axiome:** $(\mathbb{N}, \leqslant)$ est un ensemble non vide totalement ordonné vérifiant
— Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ a un plus petit élément ;
— Toute partie non vide majorée de $\mathbb{N}$ a un plus grand élément ;
— $\mathbb{N}$ n'est pas majoré.

**Définition:** — 0 est le plus petit élément de $\mathbb{N}$ : $0 = \min(\mathbb{N})$.
— $1 = \min(\mathbb{N}^*) = \min\left(\mathbb{N} \setminus \{0\}\right)$.
— Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $n+1 = \min\left(\{k \in \mathbb{N} \mid k > n\}\right)$. On dit que $n+1$ est le successeur de $n$.
— Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $n-1 = \max\left(\{k \in \mathbb{N} \mid k < n\}\right)$. On dit que $n-1$ est le prédécesseur de $n$.

**Proposition:**

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N},\ (n+1)-1 = n; \\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ (n-1)+1 = n. \end{cases}$$

■

**Proposition:** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{N} \cap \,]n, n+1[\, = \varnothing$.

■

**Théorème** (récurrence)**:** Soit $P$ un prédicat sur $\mathbb{N}$ et $n_0 \in \mathbb{N}$. Si

$$\begin{cases} P(n_0) \text{ est vrai },\\ \forall n \geqslant n_0,\ P(n) \implies P(n+1), \end{cases}$$

alors

$$\forall n \geqslant n_0,\ P(n) \text{ est vrai.}$$

■

## 2 Récurrence

**Proposition** (récurrence double)**:** Soit $P$ un prédicat sur $\mathbb{N}$ et $n_0 \in \mathbb{N}$. Si

$$\begin{cases} P(n_0) \text{ vraie}\\ P(n_0+1) \text{ vraie}\\ \forall n \in \mathbb{N} \text{ avec } n \geqslant n_0,\ P(n) \text{ et } P(n+1) \implies P(n+2) \end{cases}$$

Alors

$$\forall n \in \mathbb{N} \text{ avec } n \geqslant n_0,\ P(n) \text{ vraie.}$$

■

**Proposition:** Soit $P$ un prédicat, $p \in \mathbb{N}^*$ et $n_0 \in \mathbb{N}$. Si

$$\begin{cases} \forall k \in [\![0, p-1]\!],\ P(n_0+k) \text{ vraie;}\\ \forall n \geqslant n_0,\ \big(P(n) \text{ et } P(n+1) \text{ et } \cdots \text{ et } P(n+p-1)\big) \implies P(n+p). \end{cases}$$

Alors,

$$\forall n \geqslant n_0, P(n) \text{ vraie.}$$

□

**Proposition** (récurrence forte)**:** Soit $P$ un prédicat sur $\mathbb{N}$ et $n_0 \in \mathbb{N}$. Si $P(n_0)$ est vrai et

$$\forall n \geqslant n_0, \big(P(n_0) \text{ et } \dots \text{ et } P(n-1) \text{ et } P(n)\big) \implies P(n+1).$$

Alors,

$$\forall n \geqslant n_0,\ P(n) \text{ est vraie.}$$

■

## 3 Divisibilité

**Définition:** Soient $a, b \in \mathbb{Z}$. On dit que $a$ divise $b$ s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $b = k \times a$. Dans ce cas, on écrit $a \mid b$. On dit aussi que $a$ est un diviseur de $b$ ; et que $b$ est un multiple de $a$.

**Proposition:** “ $|$ ” est une relation d'ordre sur $\mathbb{Z}$. $\square$

**Proposition:** Soient $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$.

$$a \mid b \implies |a| \leqslant |b|.$$

$\square$

**Proposition:** Soient $a, b, c \in \mathbb{Z}$.

$$\left.\begin{matrix} a \mid b \\ a \mid c \end{matrix}\right\} \implies \big(\forall (k, \ell) \in \mathbb{Z}^2,\ a \mid (kb + \ell c)\big).$$

$\blacksquare$

**Définition:** Soient $a, b \in \mathbb{Z}$. On dit que $a$ et $b$ sont <u>associés</u> si

$$a = b \text{ ou } a = -b.$$

**Proposition:** Soient $a, b \in \mathbb{Z}$.

$$a \mid b \iff -a \mid b \iff a \mid -b.$$

**Proposition** (division euclidienne dans $\mathbb{N}$)**:** Soient $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$.

$$\exists!\, (q, r) \in \mathbb{N}^2, \begin{cases} a = bq + r, \\ 0 \leqslant r < q. \end{cases} \qquad \begin{array}{r|l} - \ a & b \\ \cline{2-2} & q \\ \cline{1-1} r & \end{array}$$

$\blacksquare$

**Proposition** (division euclidienne dans $\mathbb{Z}$)**:** Soient $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}^*$.

$$\exists!\, (q, r) \in \mathbb{Z}^2, \begin{cases} a = bq + r, \\ 0 \leqslant r \leqslant |b|. \end{cases}$$

$\blacksquare$

**Définition:** Soient $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}^*$. D'après le théorème précédent, il existe un unique couple $(q, r) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ tel que

$$\begin{cases} a = bq + r \\ 0 \leqslant r < |b|. \end{cases}$$

On dit que $r$ est le quotient, et $r$ le reste dans la division (euclidienne) de $a$ par $b$.

**Proposition:** Soient $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}^*$. On note $r$ le reste de la division euclidienne de $a$ par $b$.

$$r = 0 \iff a \mid b.$$

■

## 4 Arithmétique modulaire

**Définition:** Soient $a, b \in \mathbb{Z}$ et $c \in \mathbb{N}^*$. On dit que $a$ est congrus à $b$ modulo $c$ si $a$ et $b$ ont le même reste dans la division euclidienne par $c$. Dans ce cas, on écrit $a \equiv b \;\; [c]$.

**Proposition:** La congruence modulo $c$ est une relation d'équivalence. □

Remarque (Notation):
On note $\mathbb{Z}/c\mathbb{Z}$ l'ensemble des classes d'équivalences modulo $c$.

Par exemple, $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} = \left\{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}\right\}$.

**Proposition:** Soient $a, b \in \mathbb{Z}$ et $c \in \mathbb{N}^*$.

$$a \equiv b \;\; [c] \iff c \mid (b - a).$$

■

CHAPITRE

# 11

# SUITES NUMÉRIQUES

## 1 Modes de définition

**Définition:** Une suite peut être définie

- Explicitement On dispose pour tout $n \in \mathbb{N}$ de l'expression de $u_n$ en fonction de $n$.
  $\boxed{\text{ex}}$ $\forall n \in \mathbb{N}_*, u_n = \dfrac{\ln(n)}{n} e^{-n}$
- Par récurrence On connait $u_{n+1}$ en fonction de $u_0, u_1, \ldots, u_n$
  $\boxed{\text{ex}}$ $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sin(u_n) \end{cases}$
- Implicitement $\forall n \in \mathbb{N}, u_n$ est le seul nombre vérifiant une certaine propriété
  $\boxed{\text{ex}}$ $u_n$ est le seul réel vérifiant $x^5 + nx - 1 = 0$

## 2 Limites

**Définition:** Soit $u$ une suite réelle et $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que

- $u$ converge vers $\ell$
- $u_n$ tends vers $\ell$ quand $n$ tends vers $+\infty$
- $\ell$ est une limite de $u$

si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, \qquad |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$$
$$(\ell - \varepsilon \leqslant u_n \leqslant \ell + \varepsilon)$$

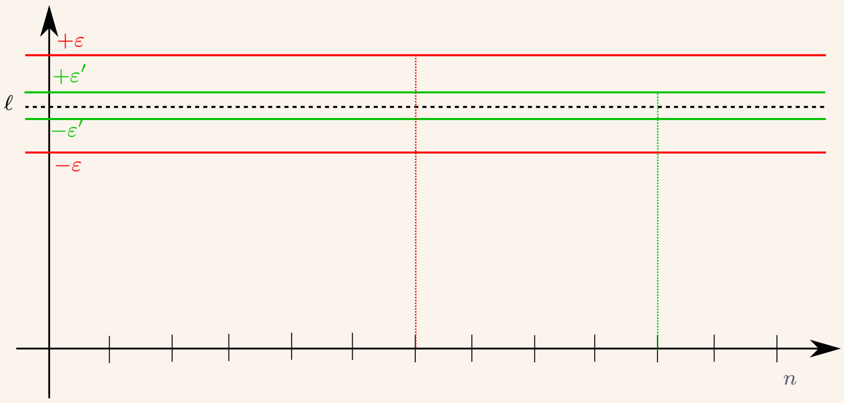



Figure 11.1 – Définition de la limite

**Définition:** Soit $u$ une suite réelle.
On dit que $u$ tends vers $+\infty$ si

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, u_n \geqslant M$$

On dit que $u$ tends vers $-\infty$ si

$$\forall m \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, u_n \leqslant m$$

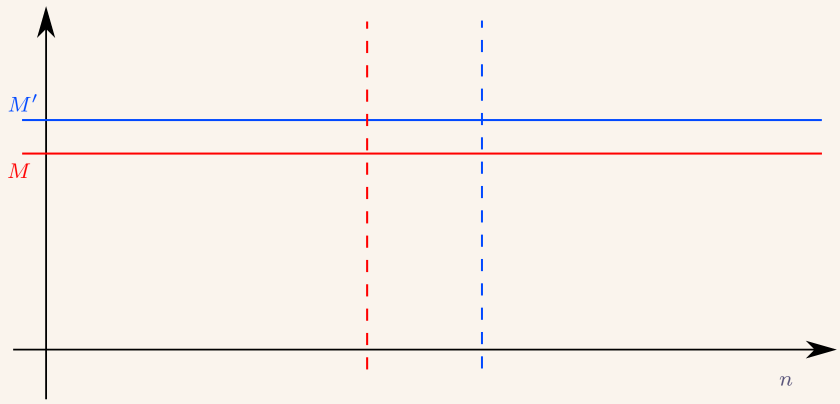



Figure 11.2 – Limites infinies

**Définition:** Une suite qui ne converge pas est dite divergente (on dit qu'elle diverge). C'est le cas si cette suite n'a pas de limite quand elle tends vers $\pm\infty$.

**Théorème** (Unicité de la limite (réelle))**:** Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, (\ell_1, \ell_2) \in \overline{\mathbb{R}}^2$
Si $\begin{cases} u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell_1 \\ u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell_2 \end{cases}$ alors $\ell_1 = \ell_2$

■

Remarque:
Si $u_n$ tends vers $\ell$ quand $n$ tends vers $+\infty$, on écrit $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ ou $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ ou $\lim u_n = \ell$

**Proposition:** Toute suite convergente est bornée

■

**Proposition:** Soient $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On pose $\ell_1 = \lim u_n$ et $\ell_2 = \lim v_n$

1. si $\ell_1 \in \mathbb{R}$ et $\ell_2 \in \mathbb{R}$ alors $u_n + v_n \to \ell_1 + \ell_2$
2. si $\ell_1 \in \mathbb{R}$ et $\ell_2 = +\infty$ alors $u_n + v_n \to +\infty$
3. si $\ell_1 \in \mathbb{R}$ et $\ell_2 = -\infty$ alors $u_n + v_n \to -\infty$
4. si $\ell_1 = \ell_2 = +\infty$, alors $u_n + v_n \to +\infty$
5. si $\ell_1 = \ell_2 = -\infty$, alors $u_n + v_n \to -\infty$

■

**Proposition:** Soient $u$ et $v$ deux suites réelles. On pose $\ell_1 = \lim u_n$ et $\ell_2 = \lim v_n$

1. si $\ell_1 \in \mathbb{R}$ et $\ell_2 \in \mathbb{R}$, alors $u_n v_n \to \ell_1 \ell_2$
2. si $\begin{cases} \ell_1 \in \mathbb{R}_*^+, \ell_2 = +\infty \text{ alors } u_n v_n \to +\infty \\ \ell_1 \in \mathbb{R}_*^-, \ell_2 = +\infty \text{ alors } u_n v_n \to -\infty \end{cases}$
3. si $\begin{cases} \ell_1 \in \mathbb{R}_*^+, \ell_2 = -\infty \text{ alors } u_n v_n \to -\infty \\ \ell_1 \in \mathbb{R}_*^-, \ell_2 = -\infty \text{ alors } u_n v_n \to +\infty \end{cases}$
4. si $\begin{cases} \ell_1 = -\infty, \ell_2 = +\infty \text{ alors } u_n v_n \to -\infty \\ \ell_1 = -\infty, \ell_2 = -\infty \text{ alors } u_n v_n \to +\infty \\ \ell_1 = +\infty, \ell_2 = +\infty \text{ alors } u_n v_n \to +\infty \end{cases}$

■

**Proposition:** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{R}_*$.Donc, $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \neq 0$
On pose $\ell = \lim u_n$ (si elle existe).

1. si $\ell = +\infty$ alors, $\dfrac{1}{u_n} \to 0$
2. si $\ell = 0$ alors, $\left|\dfrac{1}{u_n}\right| \to +\infty$

   ⚠ Si le signe de $u_n$ ne se stabilise pas $\dfrac{1}{u_n}$ n'a pas de limite

   $\boxed{\text{ex}}$ $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$

3. si $\ell \in \mathbb{R}^*$, alors $\dfrac{1}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{1}{\ell}$

## 3 Limites et inégalités

**Proposition:** Soient $u$ et $v$ deux suites réelles convergentes de limites respectives $\ell_1$ et $\ell_2$. On suppose que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant v_n$$

Alors, $\ell_1 \leqslant \ell_2$

Remarque:

Si $\begin{cases} u_n \to \ell_1 \in \mathbb{R} \\ v_n \to \ell_2 \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_n < v_n \end{cases}$

on n'a pas forcément $\ell_1 < \ell_2$

$\boxed{\text{ex}}$ $\forall n \in \mathbb{N}_*, \dfrac{1}{n+1} < \dfrac{1}{n}$ mais les deux convergent vers 0

**Proposition:** Soient $u$ et $v$ deux suites réelles telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n < v_n$$

1. si $u_n \to +\infty$,$v_n \to +\infty$
2. si $v_n \to -\infty$,$u_n \to -\infty$

**Théorème** (Théorème des "gendarmes")**:** Soient $u$, $v$ et $w$ trois suites réelles telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$$

On suppose que $u$ et $w$ convergent vers la même limite $\ell \in \mathbb{R}$. Alors, $v$ converge vers $\ell$

**Théorème** (Limite monotone)**:**

1. Soit $u$ une suite croissante majorée par $M$.
   Alors, $u$ converge et $\lim u_n \leqslant M$
2. Soit $u$ une suite croissante non majorée.
   Alors, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$
3. Soit $u$ une suite décroissante minorée par $m$.
   Alors, $u$ converge et $\lim u_n \geqslant m$
4. Soit $u$ une suite décroissante non minorée.
   Alors, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$

**Définition:** Soient $u$ et $v$ deux suites réelles. On dit que $u$ et $v$ sont adjacentes si
- $u$ est croissante
- $v$ est décroissante
- $u_n - v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

**Théorème:** Soient $u$ et $v$ deux suites adjacentes. Alors, $u$ et $v$ convergent vers la même limite.

■

**Théorème** (Théorème des segments emboîtés)**:** Soit $(I_n)$ une suite de segments (non vide) décroissante

$$\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+1} \subset I_n$$

On note $\ell(I)$ la longueur d'un intervalle $I$.
Si $\ell(I_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ alors $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$ est un singleton.

■

# 4 Suites extraites

**Définition:** Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante.
On dit que $\left(u_{\varphi(n)}\right)$ est une **suite extraite** de $u$ ou une **sous suite** de $u$. On dit alors que $\varphi$ est une extractrice.

**Lemme:** Soit $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante. Alors,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \varphi(n) \geqslant n$$

■

**Proposition:** Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ de limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ et $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante alors $u_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.

■

**Proposition:** Si $(u_{2n})$ et $(u_{2n+1})$ ont la même limite $\ell$ alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$

■

**Théorème** (Théorème de Bolzano-Weierstrass)**:** Soit $(u_n)$ une suite réelle bornée. Alors, il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $\left(u_{\varphi(n)}\right)$ converge.

■

## 5 Suites récurrentes

**Définition:** On dit que $u$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 à coefficients constants s'il existe $(a, b) \in \mathbb{C}$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$$

L'équation caractéristique associée est

$$(C) : z^2 = az + b \text{ avec } z \in \mathbb{C}$$

**Proposition:** Avec les notations précédentes,

1. Si $(C)$ a 2 racines simples $r_1 \neq r_2$ alors

$$\exists (A, B) \in \mathbb{C}^2, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = A{r_1}^n + B{r_2}^n$$

2. Si $(C)$ a une racine double $r \in \mathbb{C}$ alors

$$\exists (A, B) \in \mathbb{C}^2, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = (An + B)r^n$$

■

**Proposition:** avec les notations précédentes et avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

1. Si $(C)$ a deux racines simples $r_1 \neq r_2$ alors

$$\exists (A, B) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = A{r_1}^n + B{r_2}^n$$

2. Si $(C)$ a une racine simple $r \in \mathbb{R}$ alors

$$\exists (A, B) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = (An + B)r^n$$

3. Si $(C)$ a deux racines complexes conjuguées $re^{i\theta}$ avec $r \in \mathbb{R}_*^+$ et $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ alors

$$\exists (A, B) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = r^n(A\cos(n\theta) + B\sin(n\theta))$$

□

Remarque:
Étude de $u_{n+1} = f(u_n)$

1. On choisit rapidement la fonction $f$ (au moins le tableau de variation)

1'. (optionnel) on représente graphiquement la fonction $f$ et la droite d'équation $y = x$ pour conjecturer sa limite

2. On utilise le tableau de variation pour vérifier que $(u_n)$ est bien définie par récurrence

$$P(n) : \text{"}u_n \text{ existe et } u_n \in \mathscr{D}_f\text{"}$$

3. On étudie le signe de $f(x) - x$

4. On cherche les intervalles stables par $f$ :

$$f(I) \subset I$$

les plus petits possible ( c a permet de montrer que la suite est majorée (minorée) en particulier ceux sur lesquels $f(x) - x$ ne change pas de signe

4'. Donc on utilise le théorème de la limite monotone

4". Sinon, on essaie l'inégalité (voir théorème) des accroissements finis :
Soit $\ell$ un point fixe de $f$ : $f(\ell) = \ell$

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \ell| = |f(u_n) - f(\ell)| = M\,|u_n - \ell|$$

où M est un majorant de $|f|$
Si $0 \leqslant M \leqslant 1$ alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \ell| \leqslant M^n\,|u_n - \ell| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

donc $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$

5. si $(u_n)$ a une limite et si $f$ continue alors $\lim(u_n)$ est une point fixe de $f$

## 6 Comparaison de suites

**Définition:** Soient $u$ et $v$ deux suites réelles. On dit que $u$ est dominée par $v$ si

$$\exists M \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, |u_n| \leqslant M\,|v_n|$$

Dans ce cas, on note $u = O(v)$ ou $u_n = O(v_n)$ et on dit que "$u$ est un grand o de $v$"

**Proposition:** $O$ est une relation réfléctive et transitive.

■

**Définition:** Soient $u$ et $v$ deux suites. On dit que $u$ est négligeable devant $v$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, |u_n| \leqslant \varepsilon\,|v_n|$$

Dans ce cas, on note $u = o(v)$ ou $u_n = o(v_n)$ ou on le lit "$u$ est un petit o de $v$"

**Proposition:** $o$ est une relation transitive, non-réfléctive

■

**Proposition:** Soient $u$ et $v$ deux suites.
— $o(u) + o(u) = o(u)$
— $v \times o(u) = o(uv)$
— $o(u) \times o(v) = o(uv)$
— $o(o(u)) = o(u)$

□

**Définition:** Soient $u$ et $v$ deux suites. On dit que $u$ et $v$ sont <u>équivalentes</u> si

$$u = v + o(v)$$

i.e.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, |u_n - v_n| \leqslant \varepsilon |v_n|$$

Dans ce cas, on le note $u \sim v$

**Proposition:** $\sim$ est une relation d'équivalence □

**Proposition:** Soient $(u, v) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On suppose que $v$ ne s'annule pas à partir d'un certain rang

1. $u = o(v) \iff \left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ bornée
2. $u = o(v) \iff \frac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$
3. $u \sim v \iff \frac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$

□

**Proposition** (Suites de références)**:** 1. $\ln^\alpha(n) = o(n^\beta)$ avec $(\alpha, \beta) \in \left(\mathbb{R}_*^+\right)^2$

2. $n^\beta = o(a^n)$ avec $\beta > 0$ et $a > 1$
3. $a^n = o(n!)$ avec $a > 1$
4. $n! = o(n^n)$

**Lemme** (Exercice 10 du TD)**:** Soit $u \in \left(\mathbb{R}_*^+\right)^{\mathbb{N}}$
Si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell < 1$ avec $\ell \in \mathbb{R}$,
alors $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

■

# 7 Suites complexes

**Définition:** Soit $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{C}$. On dit que $(u_n)$ converge vers $\ell$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$$

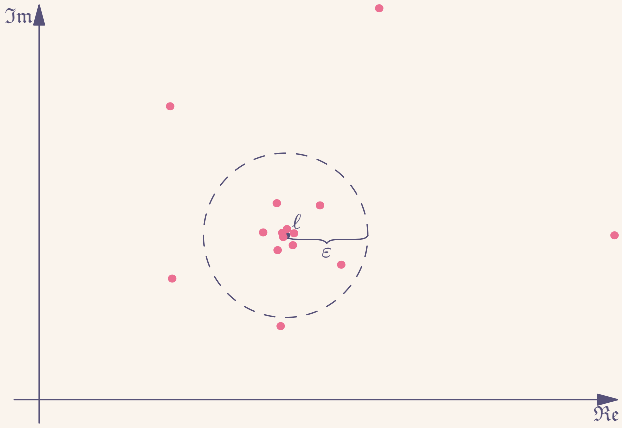



FIGURE 11.3 – Suite complexe convergente

**Proposition:** Si $\ell_1$ et $\ell_2$ sont deux limites de $u$ alors $\ell_1 = \ell_2$

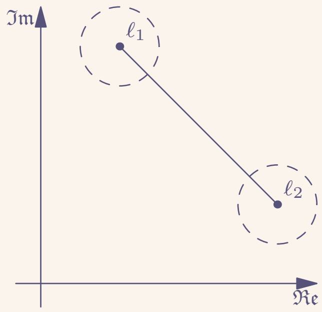



FIGURE 11.4 – Unicité de la limite de suites complexes

□

**Proposition:** Les limites de somme, produit, quotient de suites complexes respectent les mêmes lois que pour les suites réelles. □

**Théorème:** Soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{C}$.

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \iff \begin{cases} \mathfrak{Re}(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathfrak{Re}(\ell) \\ \mathfrak{Im}(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathfrak{Im}(\ell) \end{cases}$$

■

**Proposition:** Soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{C}$.
Si $u_n \to \ell$ alors $|u_n| \to |\ell|$

■

**Proposition:** Tous les résultats (sauf ceux avec des limites infinies !) concernant les suites extraites sont encore valables dans $\mathbb{C}$ y compris le théorème de Bolzano-Weierstrass (mais avec une autre preuve).

**Définition:** Soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On dit que $u$ est <u>bornée</u> s'il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leqslant M$$

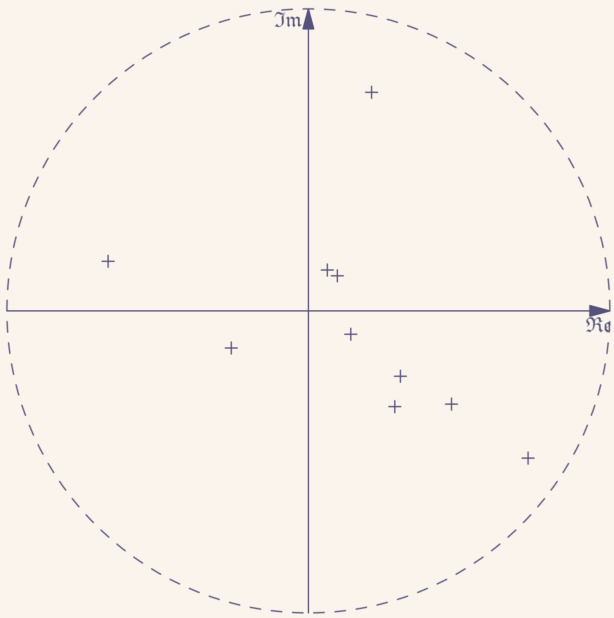



FIGURE 11.5 – Suite complexe bornée

**Théorème** (Bolzano Weierstrass)**:** Soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ bornée. Il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $\left(u_{\varphi(n)}\right)$ converge.

■

## 8 Annexe

**Proposition:** Soit $f : I \to I$ continue et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

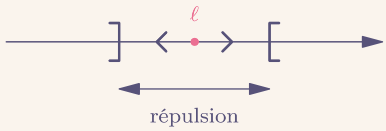
$$\begin{cases} u_0 \in I \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

**Si** $(u_n)$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$
alors $f(\ell) = \ell$ i.e. ($\ell$ est un point fixe de $f$)

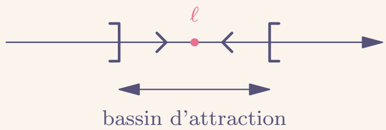
■

Remarque:
Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $u_{n+1} = f(u_n)$.
Soit $\ell \in \mathbb{R}$ un point fixe de $f$. Donc, $f(\ell) = \ell$.

$|f'(\ell)| > 1$ :




$|f'(\ell)| < 1$ :




Par contre, si $|f'(\ell)| = 1$, on ne sait pas.

Remarque (Suite arithético-géométrique):

$$(*) : \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n + b = f(u_n)$$

Méthode 1

— On cherche $v$ une suite constante solution de $(*)$ :

$$\exists C \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, v_n = C$$

donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, C = aC + b = f(C)$$

Si $a \neq 1$ : $C = \dfrac{b}{1-a}$

— Soit $u$ qui vérifie $(*)$. On pose $w = u - v$.

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, w_{n+1} &= u_{n+1} - v_{n+1} \\ &= au_n + b - av_n - b \\ &= a(u_n - v_n) \\ &= aw_n \end{aligned}$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, w_{n+1} = aw_n + 0$ : équation homogène associée à $(*)$
$(w_n)$ est géométrique donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, w_n = w_0 a^n$$

et donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = w_0 a^n + \frac{b}{1-a}$$

Méthode 2

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} &\longrightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \\ (u_n) &\longmapsto (u_{n+1} - au_n) \end{aligned}$$

$\varphi$ morphisme de groupes additifs

$$\varphi(u) = (b) \iff u = v + w \text{ avec } w \in \mathrm{Ker}(\varphi)$$

$$\begin{aligned} w \in \mathrm{Ker}(\varphi) &\iff \varphi(w) = 0 \\ &\iff \forall n \in \mathbb{N}, w_{n+1} - aw_n = 0 \\ &\iff \forall n \in \mathbb{N}, w_{n+1} = aw_n \end{aligned}$$

CHAPITRE

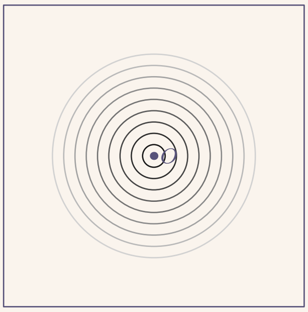
# 12

# STRUCTURES ALGÉBRIQUES USUELLES

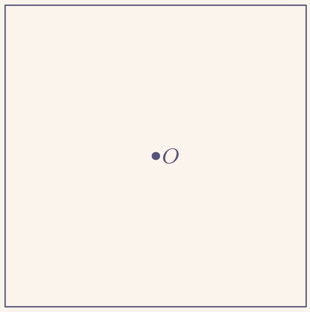
## 1 Groupes

Principe de symétrie (Pierre Curie)
La symétrie des causes se retrouvent dans les effets.

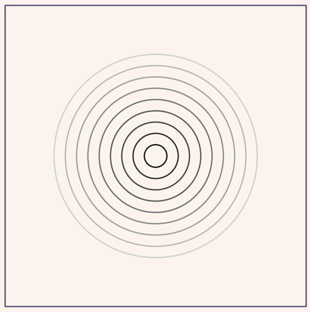
On fait tomber un caillou dans un plan d'eau ce qui crée une onde qui se propage.

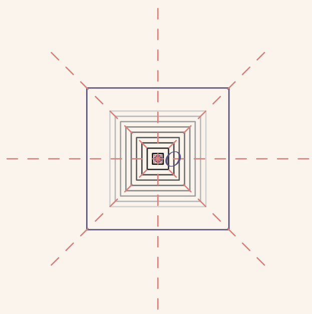



- Symétries des "causes"
  (conserver $O$ en place)
  - translation de vecteur $\overrightarrow{0}$
  - rotations de centre $O$ d'angle quelconque
  - symétries d'axe passant par $O$



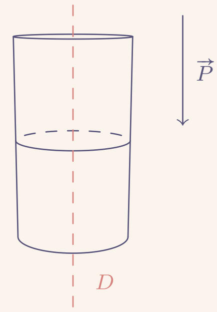

- <u>Symétries des "effets"</u>
  (conserver les ondes en place)
  - translation de vecteur $\overrightarrow{0}$
  - rotations de centre $O$ d'angle quelconque
  - symétries d'axe passant par $O$



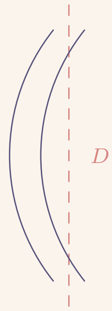



  - translation de vecteur $\overrightarrow{0}$
  - 4 rotations de centre $O$ d'angle $0, \dfrac{\pi}{2}, \pi, \dfrac{3\pi}{2}$
  - 4 symétries axiales

- <u>Causes</u>
  - translations de vecteur $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{D}$
  - rotations d'axe $D$




— Effet




**Définition:** Soit $G$ un ensemble, muni d'une loi de composition interne $\diamond$.
On dit que $(G, \diamond)$ est un groupe si :
- $\diamond$ est associative
- $\diamond$ a un neutre $e \in G$
- $\forall x \in G, \exists y \in G, x \diamond y = y \diamond x = e$

**Définition:** On dit que $(G, \diamond)$ est un groupe commutatif ou abélien si c'est un groupe et $\diamond$ est une loi commutative.

**Définition:** Soit $(G, \cdot)$ un groupe (d'élément neutre $e$) et $H \subset G$. On dit que $H$ est un sous groupe de $G$ si

1. $\forall (x, y) \in H^2, x \cdot y \in H$
2. $e \in H$
3. $\forall x \in H, x^{-1} \in H$

**Proposition:** Soit $H$ un sous groupe de $(G, \cdot)$. Alors, $(H, \cdot)$ est un groupe. □

**Proposition:** Soit $(G, \cdot)$ un groupe et $H \subset G$.

$$H \text{ est un sous groupe de } G \iff \begin{cases} \forall (x, y) \in H, x \cdot y^{-1} \in H \\ H \neq \varnothing \end{cases}$$

■

**Proposition:** Soit $(G, \cdot)$ un groupe et $(H_i)_{i \in I}$ une famille non vide de sous groupes de $G$. Alors, $\bigcap_{i \in I} H_i$ est un sous groupe de $G$.

■

**Proposition:** Soit $(G, \cdot)$ un groupe.
$\{e\}$ et $G$ sont des sous groupes de $G$

Remarque:
Une réunion de sous groupes n'est pas nécessairement un sous groupe.

$$(G, \cdot) = (\mathbb{Z}, +)$$

$2\mathbb{Z} \cup 3\mathbb{Z} = A$
$2 \in A$ et $3 \in A$ mais $2 + 3 = 5 \notin A$.
Donc, $A$ n'est pas un sous groupe de $\mathbb{Z}$

**Proposition – Définition:** Soit $(G, \cdot)$ un groupe et $A \subset G$. Alors,

$$\bigcap_{\substack{H \text{ sous groupe de } G \\ A \subset H}} H$$

est le plus petit (au sens de l'inclusion) sous groupe de $G$ qui contient $A$. On dit que c'est le sous groupe engendré par $A$ et on le note $\langle A \rangle$

■

**Définition:** Soit $(G, \cdot)$ un groupe et $A \subset G$.
On dit que $A$ est une partie génératrice de $G$ ou que $A$ engendre $G$ si $G = \langle A \rangle$

Remarque (Notation):
Soit $(G, \cdot)$ un groupe et $a \in G$.
Pour $n \in \mathbb{N}_*$, on pose $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ fois}}$.
On pose $a^0 = e$ et pour $n \in Z_*^-$,

$$a^n = \left(a^{-1}\right)^{-n}$$

Remarque:
Si le groupe est noté additivement. On note $na$ $(n \in \mathbb{Z}, a \in G)$ à la place de $a^n$

**Définition:** On dit qu'un groupe $(G, \cdot)$ est monogène s'il existe $a \in G$ tel que

$$G = \langle a \rangle$$

On dit alors que $a$ est un générateur de $G$

**Définition:** Un groupe monogène fini est cyclique.

**Proposition:** Soit $(G,\cdot)$ un groupe monogène fini. Soit $a$ un générateur de $G$. Il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que

$$G = \{e, a, a^2, \dots a^{k-1}\}$$

■

**Définition:** Soit $(G,\cdot)$ un groupe et $a \in G$.
Si $\langle a\rangle$ est fini, le cardinal de $\langle a\rangle$ est appelé ordre de $a$ : c'est le plus petit entier strictement positif $n$ tel que $a^n = e$

**Définition:** Soient $(G_1,\cdot)$ et $(G_2,*)$ deux groupes et $f : G_1 \to G_2$. On dit que $f$ est un (homo)morphisme de groupes si

$$\forall (x,y) \in G_1, f(x \cdot y) = f(x) * f(y)$$

**Proposition:** Avec les notations précédentes,
- l'image directe d'un sous groupe de $G_1$ est un sous groupe de $G_2$
- l'image réciproque d'un sous groupe de $G_2$ est un sous groupe de $G_1$

■

**Lemme:**

$$\begin{cases} f(e_1) = e_2 \\ \forall u \in G_1, f\left(u^{-1}\right) = (f(u))^{-1} \end{cases}$$

■

**Corollaire:** Soit $f : (G_1,\cdot) \to (G_2,*)$ un morphisme de groupes. Alors, $\mathrm{Im}(f)$ est un sous groupe de $G_2$.

$$\mathrm{Ker}(f) = \{x \in G_1 \mid f(x) = e_2\} = f^{-1}(\{e_2\})$$

est un sous groupe de $G_1$. □

**Théorème:** Avec les notations précédentes,

$$f \text{ injective } \iff \mathrm{Ker}(f) = \{e_1\}$$

■

**Théorème:** Soit $f : (G_1, \cdot) \to (G_2, *)$ un morphisme de groupes, $y \in G_2$ et $(\mathscr{E})$ l'équation

$$f(x) = y$$

d'inconnue $x \in G_1$.
Si $y \notin \mathrm{Im}(f)$, alors $(\mathscr{E})$ n'a pas de solution.
Sinon, soit $x_0 \in G_1$ tel que $f(x_0) = y$ ($x_0$ est une solution particulière de $(\mathscr{E})$)

$$f(x) = y \iff \exists h \in \mathrm{Ker}(f), x = x_0 \cdot h$$

■

**Proposition:** Soient $f : G_1 \to G_2$ et $g : G_2 \to G_3$ deux morphisme de groupes. Alors, $g \circ f$ est un morphisme de groupes.

■

**Définition:** Soit $G$ un groupe.

- Un endomorphisme de $G$ est un morphisme de groupes de $G$ dans $G$.
- Un isomorphisme de $G$ dans $H$ un morphisme de groupes $f : G \to H$ bijectif.
- Un automorphisme de $G$ est un endomorphisme de $G$ bijectif.

**Proposition:** Soit $f : G \to H$ un isomorphisme de groupes.
Alors, $f^{-1} : H \to G$ est aussi un isomorphisme.

■

**Corollaire:** On note $\mathrm{Aut}(G)$ l'ensemble des automorphismes de $G$.
$\mathrm{Aut}(G)$ est un sous groupe de $(S(G), \circ)$.

**Définition:** Soit $(G, \cdot)$ un groupe et $g \in G$. L'application

$$\begin{aligned} c_g : G &\longrightarrow G \\ x &\longmapsto gxg^{-1} \end{aligned}$$

est appelée conjugaison par $g$. On dit aussi que c'est un automorphisme intérieur.

**Proposition:** Avec les notations précédentes,

$$c_g \in \mathrm{Aut}(G)$$

■

**Corollaire:**

$$\forall x \in G, \forall n \in \mathbb{Z}, c_g(x^n) = (c_g(x))^n$$

□

**Proposition:** L'application

$$\begin{aligned} G &\longrightarrow \mathrm{Aut}(G) \\ g &\longmapsto c_g \end{aligned}$$

est un morphisme de groupes.

■

**Proposition** (Rappel)**:**

$$\forall g, h \in G, (gh)^{-1} = h^{-1}g^{-1}$$

■

**Proposition – Définition:** Soient $(G_1, *)$ et $(G_2, *)$ deux groupes. On définit une loi sur $G_1 \times G_2$ en posant

$$(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = (x_1y_1, x_2y_2)$$

Alors, $G_1 \times G_2$ est un groupe pour cette loi appelée groupe produit.

■

## 2 Anneaux

**Définition:** Un anneau $(A, +, \times)$ est un ensemble $A$ muni de deux lois de compositions internes notées $+$ et $\times$ vérifiant

1. $(A, +)$ est un groupe commutatif (son neutre est noté $0_A$)
2. $(A, \times)$ est un monoïde
   (a) $\times$ est associative
   (b) $\times$ a un neutre $1_A \in A$
3. distributivité à gauche et à droite :

$$\forall (a, b, c) \in A^3, \begin{cases} a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c) \\ (b + c) \times a = (b \times a) + (c \times a) \end{cases}$$

Remarque (Convention):
Soit $(A, +, \times)$ un anneau.
On convient que la multiplication est prioritaire sur l'addition.

$$(a \times b) + (a \times c) = a \times b + a \times c$$

et l'exponentiation est prioritaire sur la multiplication ($n \in \mathbb{N}$)

$$\begin{aligned} a \times b^n &= a \times (\underbrace{b \times b \times \cdots \times b}_{n \text{ fois}}) \\ &\neq (a \times b)^n \end{aligned}$$

**Proposition:** Soit $(A, +, \times)$ un anneau. Alors, $0_A$ est absorbant

$$\forall a \in A, a \times 0_A = 0_A \times a = 0_A$$

■

Remarque:

On peut imaginer $\begin{cases} a \times b = 0_A \\ a \neq 0_A \\ b \neq 0_A \end{cases}$

**Définition:** On dit qu'un anneau $(A, +, \times)$ est <u>intègre</u> si

$$\forall (a, b) \in A^2, (a \times b = 0_A \implies a = 0_A \text{ ou } b = 0_A)$$

**Proposition:** Soient $(A, +, \times)$ un anneau, $(a, b) \in A^2$, $n \in \mathbb{Z}$. Alors,

$$n(a \times b) = (na) \times b = a \times (nb)$$

■

**Théorème** (Formule du binôme de Newton)**:** Soient $(A, +, \times)$ un anneau, $(a, b) \in A^2$, $n \in \mathbb{N}$.
Si $a$ et $b$ commutent alors

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

■

**Proposition:** Soient $(A, +, \times)$ un anneau, $(a, b) \in A^2$ et $n \in \mathbb{N}_*$.
Si $a$ et $b$ commutent, alors

$$a^n - b^n = (a - b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$$

□

**Proposition:** On note $A^\times$ l'ensemble des éléments inversibles d'un anneau $(A, +, \times)$. $(A^\times, \times)$ est un groupe. □

**Définition:** Soit $(A, +, \times)$ un anneau commutatif.

1. Soient $(a, b) \in A^2$. On dit que $a$ divise $b$ s'il existe $k \in A$ tel que $b = a \times k$. On dit aussi que $a$ est un diviseur de $b$ et que $b$ est un multiple de $a$.
2. On dit que $a$ et $b$ sont associés s'il existe $k \in A^\times$ tel que $ak = b$ (dans ce cas, $a \mid b$ et $b \mid a$)

Remarque:
Le théorème des deux carrés peut se démontrer en exploitant les propriétés arithmétiques de l'anneau $(Z[i], +, \times)$ où $Z[i] = \{a + ib \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}\}$.
$\mathbb{Z}[i]^\times = \{1, -1, i, -i\}$

Théorème des deux carrés :

1. Soit $p$ un nombre premier.
$$\exists (a, b) \in \mathbb{N}^2, p = a^2 + b^2 \iff p \equiv 1\ [4]$$
2. Soit $n \in \mathbb{N}_*$, $n = \prod_{p \in \mathscr{P}} p^{\alpha(p)}$
$$\exists (a, b) \in \mathbb{N}^2, n = a^2 + b^2 \iff \forall p \in \mathscr{P} \text{ tel que } \alpha(p) \neq 0, p \equiv 1\ [4]$$

**Définition:** Soit $(A, +, \times)$ un anneau et $B \subset A$. On dit que $B$ est un sous anneau de $A$ si

1. $B$ est un sous groupe de $(A, +)$
2. $\forall (a, b) \in B^2, a \times b \in B$
3. $1_A \in B$

**Proposition:** Soit $(A, +, \times)$ un anneau et $B$ un sous anneau de $A$. Alors, $(B, +, \times)$ est un anneau. □

**Proposition:** Soit $(A, +, \times)$ un anneau.
Si $0_A = 1_A$ alors $A = \{0_A\}$. On dit alors que $A$ est l'anneau nul.

■

**Définition:** Soient $(A, +, \times)$ et $(B, +, \times)$ deux anneaux (les lois notés de la même fa c on mais ne sont pas forcément les mêmes !).
Soit $f : A \to B$. On dit que $f$ est un (homo)morphisme d'anneaux si

1. $\forall (a, b) \in A^2, f(a + b) = f(a) + f(b)$
2. $\forall (a, b) \in A^2, f(a \times b) = f(a) \times f(b)$

3. $f(1_A) = 1_B$

**Proposition:** Avec les notations précédentes, **si** $a \in A^\times$ alors $f(a) \in B^\times$ et dans ce cas,

$$f(a)^{-1} = f\left(a^{-1}\right)$$

■

**Définition:** Soient $(A, +, \times)$ et $(B, +, \times)$ deux anneaux et $f : A \to B$ un morphisme d'anneaux.
On dit que $f$ est un

- isomorphisme d'anneaux si $f$ est bijective
- endomorphisme d'anneaux si $\begin{cases} A = B \\ + = + \\ \times = \times \end{cases}$
- automorphisme d'anneaux si $f$ est à la fois un isomorphisme et un endomorphisme d'anneaux

**Proposition:** La composée de deux morphismes d'anneaux est un morphisme d'anneaux. □

**Proposition:** La réciproque d'un isomorphisme d'anneaux est un isomorphisme d'anneaux. □

**Proposition:** L'ensemble des automorphismes d'anneaux de $A$ est un sous groupe de $(S(A), \circ)$. □

**Proposition:** L'image directe ou réciproque d'un sous anneau par un morphisme d'anneaux est un sous anneaux.

**Définition:** Soi $f : A \to B$ un morphisme d'anneaux. Le noyau de $f$ est

$$\operatorname{Ker}(f) = \{a \in A \mid f(a) = 0_B\}$$

**Proposition:** Avec les notations précédents,

$$f \text{ injective} \iff \operatorname{Ker}(f) = \{0_A\}$$

□

Remarque:
$\operatorname{Ker}(f)$ n'est pas un sous anneau en général (car $1_A \notin \operatorname{Ker}(f)$ sauf si $A = \{0_A\}$)

**Définition:** Soit $(A, +, \times)$ un anneau et $a \in A \setminus \{0_A\}$.
On dit que $a$ est un diviseur de zéro s'il existe $b \in A \setminus \{0_A\}$ tel que $a \times b = b \times a = 0_A$

**Proposition:** Les diviseurs de zéro ne sont pas inversibles. □

## 3 Corps

**Définition:** Soit $(\mathbb{K}, +, \times)$ un ensemble muni de deux lois de composition internes. On dit que c'est un corps si

1. $(\mathbb{K}, \times)$ est un groupe abélien
2. $(\mathbb{K}, \times)$ est un monoïde commutatif
3. $\forall x \in \mathbb{K} \setminus \{0_\mathbb{K}\}, \exists y \in \mathbb{K}, xy = 1_\mathbb{K}$
4. $0_\mathbb{K} \neq 1_\mathbb{K}$

**Proposition:** $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times)$ est un corps si et seulement si $n$ est premier.

■

**Proposition:** Tout corps est un anneau intègre.

■

**Proposition:** Soit $(\mathbb{K}, +, \times)$ un corps et $P$ un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$ de degré $n$. Alors, l'équation $P(x) = 0_\mathbb{K}$ a au plus $n$ solutions dans $\mathbb{K}$ □

**Corollaire** ((Théorème de Wilson))**:** voir exercice 16 du TD 12

**Définition:** Soit $(\mathbb{K}, +, \times)$ un corps et $L \subset \mathbb{K}$.
On dit que $L$ est un sous corps de $\mathbb{K}$ si

1. $L$ est un anneau de $(\mathbb{K}, +, \times)$ non nul
2. $\forall x \in L \setminus \{0_\mathbb{K}\}, x^{-1} \in L$

en d'autres termes si

1. $\forall (x, y) \in L^2, x - y \in L$
2. $\forall (x, y) \in L^2, x \times y^{-1} \in L$

On dit aussi que $\mathbb{K}$ est une extension de $L$.

**Proposition:** Tout sous corps est un corps. □

**Définition:** Soient $(\mathbb{K}_1, +, \times)$ et $(\mathbb{K}_2, +, \times)$ deux corps et $f : \mathbb{K}_1 \to \mathbb{K}_2$.
On dit que $f$ est un morphisme de corps si $f$ est un morphisme d'anneaux.
i.e. si

$$\begin{cases} \forall (x,y) \in {\mathbb{K}_1}^2, \quad f(x+y) = f(x) + f(y) \\ \forall (x,y) \in {\mathbb{K}_1}^2, \quad f(x \times y) = f(x) \times f(y) \end{cases}$$

**Proposition:** Tout morphisme de corps est injectif.

■

# 4 Actions de groupes

**Définition:** Soit $(G, \cdot)$ un groupe et $X$ un ensemble non vide. Une action de $G$ sur $X$ est une application

$$\begin{aligned} \varphi : G \times X &\longrightarrow X \\ (g,x) &\longmapsto \underbrace{g \cdot x}_{\text{ce n'est pas la loi de } G} \end{aligned}$$

qui vérifie

1. $\forall x \in X, \varphi(e,x) = e \cdot x = x$
2. $\forall x \in X, \forall g,h \in G, g \cdot (h \cdot x) = (g \cdot h) \cdot x$

Dans ce cas, $\begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & S(X) \\ g & \longmapsto & \varphi(g,\cdot) \end{array} : \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & X \\ x & \longmapsto & g \cdot x \end{array}$ est un morphisme de groupes.

■

CHAPITRE

# 13

# SYSTÈMES LINÉAIRES ET CALCULS MATRICIELS

Remarque (Résumé): — Méthode du pivot : opérations sur les lignes :

1. $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ ($\lambda \in \mathbb{K}$ )
2. $L_i \leftarrow \mu L_i$ ($\mu \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ )
3. $L_i \leftrightarrow L_j$

En appliquant la méthode du pivot on obtient

$$(S) \iff \begin{cases} x_{i_1} & = \ell_1(x_{j_1}, \ldots, x_{j_{n-r}}) \\ x_{i_2} & = \ell_2(x_{j_1}, \ldots, x_{j_{n-r}}) \\ \vdots & \vdots \\ x_{i_r} & = \ell_r(x_{j_1}, \ldots, x_{j_{n-r}}) \\ 0 & = * \end{cases}$$

Les inconnues $x_{i_1}, \ldots, x_{i_r}$ sont les <u>inconnues principales</u>, les autres sont appelées <u>paramètre</u>.
On peut supprimer les équations $0 = 0$. S'il y a une équation $0 = \lambda$ avec $\lambda \neq 0$, il n'y a pas de solution : le système est <u>incompatible</u>.
Les inconnues principales dépendent des choix de pivots !

— Représentation matricielle

$$(S) \iff AX = B$$

où $A$ est la <u>matrice du système</u>, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ et $B$ est le <u>second membre</u>

$(S)$ a $n$ équations et $p$ inconnues donc $A$ a $n$ lignes et $p$ colonnes.
La matrice $(A \mid B)$ est la <u>matrice augmentée du système</u>.

- Faire un opération $L$ sur les lignes d'une matrice $M$ revient à multiplier $M$ à gauche par une matrice $R$ où $R$ est obtenue en appliquant $L$ sur $I_n$.
- La méthode du pivot matriciel par lignes :

**Définition** (Rang d'une matrice)**:** Soit $M$ une matrice et $R$ la matrice échelonnée réduite par lignes associée à $M$. Le nombre de lignes non nulles de $R$ (le nombre de pivots) est appelée rang de $M$.
Soit $S$ un système de matrice augmentée $(A \mid B)$. Le rang de $S$ est le rang de la matrice $A$.
Le rang est noté rg.

**Proposition** (Interprétation)**:**
- Soit $S$ un système de $n$ équations, $p$ inconnues de rang $r$.
  $r$ est le nombre d'inconnues principales, il y a $p - r$ paramètres.
- Soit $M \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ de rang $r$.
  $r$ est le nombre de lignes indépendantes : il y a $n-r$ lignes combinaisons linéaires des $r$ lignes indépendantes.

**Corollaire:** Soit $S$ un système de $n$ équations, $p$ inconnues de rang $n$. Alors $S$ a au moins une solution.
Si $n = p$ alors $S$ a exactement une solution.
Si $p > n$, il y a une infinité de solutions.

□

**Définition:** Soit $S$ un système à $n$ équations, $n$ inconnues et de rang $n$. On dit que $S$ est un système de Cramer (il a une unique solution)

**Proposition:** Soit $S$ un système de $n$ équations, $p$ inconnues de rang $r$.
- Si $r < n$ alors le système peut-être incompatible : il y a $n - r$ équations de la forme $0 = *$ après la méthode du pivot.
- Si $r < p$ alors il y a $p - r$ paramètres : si le système n'est pas incompatible, il y aura une infinité de solutions.

□

**Proposition:** Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $C$ une opération élémentaire sur les colonnes de $A$. On pose $A'$ la matrice obtenue en appliquant $C$ sur les colonnes de $A$.

$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A')$$

□

**Proposition:** Le rang d'une matrice est aussi le nombre de colonnes indépendantes. □

**Définition:** Une <u>matrice triangulaire supérieure</u> est une matrice carrée avec des coefficients nuls sous sa diagonale :

$$T = \begin{pmatrix} * & \cdots & * \\ 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \\ 0 & \cdots\ 0 & * \end{pmatrix} \qquad \boxed{\text{diagonale}}$$

et <u>triangulaire inférieure</u> si les coefficients au-dessus de la diagonale sont nuls :

$$T = \begin{pmatrix} * & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & 0 \\ * & \cdots & & * \end{pmatrix}$$

Un <u>système triangulaire</u> est de la forme

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +\dots & +a_{1p}x_p & = & b_1 & +\dots \\ & +a_{22}x_2 & +\dots & +a_{2p}x_p & = & b_2 & +\dots \\ & & \ddots & & \vdots & & \\ & & & a_{pp}x_p & = & b_p & +\dots \\ & & & 0 & = & \dots & \end{cases}$$

Remarque:

$$(S) \iff \begin{cases} AX = B \\ X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K}), B \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}), A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \end{cases}$$

On pose

$$\begin{aligned} \varphi : \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K}) &\longrightarrow \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ X &\longmapsto AX \end{aligned}$$

On cherche $\varphi^{-1}(\{B\})$

On sait que
- $(\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K}), +)$ est un groupe
- $(\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}), +)$ aussi

Soient $X, Y \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$

$$\varphi(X+Y) = A(X+Y) = AX + AY = \varphi(X) + \varphi(Y)$$

Donc $\varphi$ est un morphisme de groupes.
On peut résoudre $(S)$ de la fa c on suivante :
- On cherche $X_0 \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ tel que $\varphi(X_0) = B$
- On résout $\varphi(X) = 0$ ($X \in \mathrm{Ker}(\varphi)$)

C'est le système homogène associé :

$$\varphi(X) = B \iff \exists H \in \mathrm{Ker}(\varphi), X = X_0 + H$$

**Proposition:**

$$A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$$
$$B = \left(b_{k,\ell}\right)_{\substack{1 \leqslant k \leqslant p \\ 1 \leqslant \ell \leqslant q}} \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$$

$$AB = \left(c_{i,\ell}\right)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant \ell \leqslant q}} \in \mathscr{M}_{n,q}(\mathbb{K})$$
$$c_{i,\ell} = \sum_{j=1}^{n} = a_{i,j} b_{j,\ell}$$

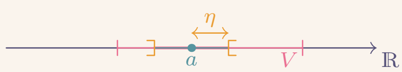
CHAPITRE

# 14 CONTINUITÉ

## 1 Définition d'une limite de fonctions

**Définition:** Soit $a \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ et $V \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$.

1. Si $a \in \mathbb{R}$, on dit que $V$ est un <u>voisinage</u> si
$$\exists \eta > 0,\ ]a-\eta, a+\eta[ \subset V.$$



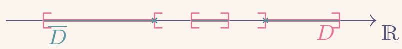

2. Si $a = +\infty$, on dit que $V$ est un <u>voisinage</u> de $a$ si
$$\exists M \in \mathbb{R},\ ]M, +\infty[\ \subset V.$$
3. Si $a = -\infty$, on dit que $V$ est un <u>voisinage</u> de $a$ si
$$\exists m \in \mathbb{R},\ ]-\infty, m[\ \subset V.$$

On note $\mathscr{V}_a$ l'ensemble des voisinages de $a$.

L'utilisation des voisinages permet d'exprimer une limite finie ou infinie plus simplement, sans disjonction de cas.

En utilisant cette nouvelle notation, on peut redéfinir la limite plus simplement.

**Définition:** Soit $f$ une fonction définie sur $D \subset \mathbb{R}$ à valeurs réelles. Soit $a \in \overline{D} = \{x \in \overline{\mathbb{R}} \mid \forall V \in \mathscr{V}_x,\ V \cap D \neq \varnothing\}$ (on "rajoute" chacune des bornes exclues des intervalles composant $D$) :



On dit que $f(x)$ tends vers $\ell$ si

$$\forall V \in \mathscr{V}_\ell,\ \exists W \in \mathscr{V}_a,\ \forall x \in W \cap D,\ f(x) \in V.$$

**Définition:** Soit $a \in \mathbb{R}$.

Un voisinage à gauche de $a$ est une partie de $\mathbb{R}$ qui contient un inveralle $]a-\eta, a]$ avec $\eta > 0$.

Un voisinage à droite de $a$ est une partie de $\mathbb{R}$ qui contient un inveralle $[a, a+\eta[$ avec $\eta > 0$.

**Proposition:** Si $f$ admet une limite finie en $a \in I$, alors cette limite vaut $f(a)$.

■

Remarque:
De même si $a \in \mathscr{D}$ et si $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ \leqslant}} f(x)$ existe (resp. $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ \leqslant}} f(x)$) alors $f(a) = \lim\limits_{\substack{x\to a\\ \leqslant}} f(x)$ (resp $f(a) = \lim\limits_{\substack{x\to a\\ \geqslant}} f(x)$ )

**Définition:** Soit $f$ définie sur $D$ et $a \in D$. On dit que $f$ est continue en $a$ si $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existe ou si $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ \neq}} f(x) = f(a)$.

**Proposition:** $f$ est continue en $a$ si et seulement si

$$\lim_{\substack{x\to a\\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x\to a\\ >}} = f(a)$$

■

**Lemme:** Soient $a \neq b$ deux éléments de $\overline{\mathbb{R}}$
Alors $\exists V \in \mathscr{V}_a, \exists W \in \mathscr{V}_b, V \cap W = \varnothing$

■

**Théorème:** Soit $f$ définie sur $\mathscr{D}$ et $a \in \overline{\mathscr{D}}$, $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$

$$f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell \iff \forall (x_n) \in \mathscr{D}^{\mathbb{N}} \left( x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a \implies f(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \right)$$

■

**Proposition:** Si $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$ et $g(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell_2$
alors

1. $f(x)+g(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell_1+\ell_2$
2. $f(x)\times g(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell_1\times\ell_2$
3. Si $\ell_2 \neq 0$, $\dfrac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x\to a]{} \dfrac{\ell_1}{\ell_2}$

■

**Proposition:** Si $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell_1$ et $g(x) \xrightarrow[x\to \ell_1]{} \ell_2$ alors $g(f(x)) \xrightarrow[x\to a]{} \ell_2$

■

**Corollaire:** Une somme, un produit, une composée de fonctions continues sont continues. □

Remarque:
Pour démontrer que $f(x)$ n'a pas de limite quands $x$ tend vers $a$. On cherche deux suites $(x_n)$ et $(y_n)$ de limite $a$ avec

$$\begin{cases} f(x_n) \longrightarrow \ell_1 \\ f(y_n) \longrightarrow \ell_2 \\ \ell_1 \neq \ell_2 \end{cases}$$

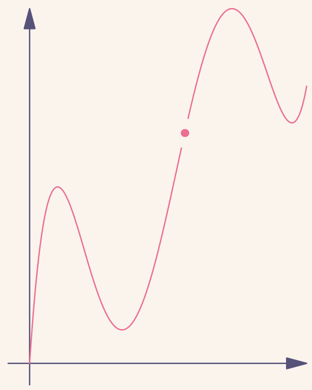
**Théorème** (Limite monotone)**:** Soit $f$ une fonction croissante sur $]a,b[$ avec $a \neq b \in \overline{\mathbb{R}}$.

1. Si $f$ est majorée,
$$\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in ]a,b[, f(x) \leqslant M$$
alors $\lim\limits_{\substack{x\to b \\ <}} f(x) = \sup\limits_{x\in]a,b[} f(x) \in \mathbb{R}$
2. Si $f$ n'est pas majorée,
$$\lim_{\substack{x\to b \\ <}} f(x) = +\infty$$
3. Si $f$ est minorée,
$$\exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in ]a,b[, f(x) \leqslant m$$
alors $\lim\limits_{\substack{x\to a \\ >}} f(x) = \inf\limits_{]a,b[} f \in \mathbb{R}$
4. Si $f$ n'est pas minorée, $\lim\limits_{\substack{x\to a \\ >}} f(x) = -\infty$

■

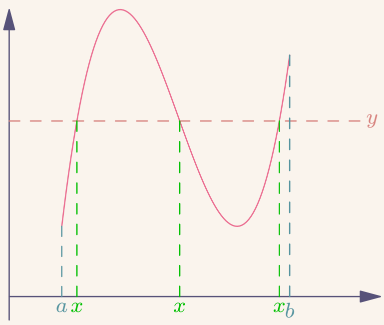
Remarque:
Avec les hypothèses ci-dessus, pour tout $x \in ]a,b[$,
$f$ est croissante sur $]a,x[$, et majorée par $f(x)$ donc $\lim\limits_{\substack{t\to x \\ <}} f(t) \in \mathbb{R}$
$f$ est croissante sur $]x,b[$ et minorée par $f(x)$ donc $\lim\limits_{\substack{t\to x \\ >}} f(t) \in \mathbb{R}$

$\lim\limits_{\substack{t \to x \\ <}} f(t) \leqslant f(x) \leqslant \lim\limits_{\substack{t \to x \\ >}} f(t)$



**Théorème** (Théorème des valeurs intermédiaires)**:** Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle $I$, $a < b$ deux éléments de $I$.

$$\forall y \in [f(a), f(b)] \cup [f(b), f(a)]\,,\ \exists x \in [a, b],\ y = f(x)$$



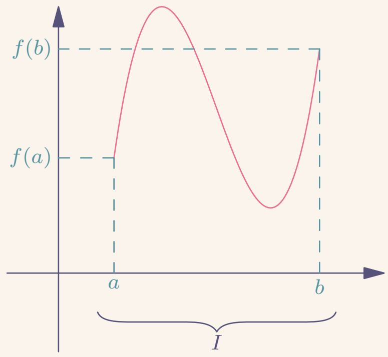

**Lemme:** Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle $I$, $a < b$ deux éléments de $I$ tels que $f(a) \leqslant 0 \leqslant f(b)$. Alors,

$$\exists x \in [a, b], f(x) = 0$$

$\blacksquare$

$\blacksquare$

**Corollaire:** Soit $f$ continue sur un intervalle $I$. Alors, $f(I)$ est un intervalle.



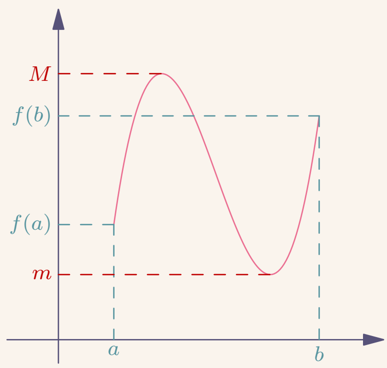

**Corollaire:** On peut généraliser le théorème des valeurs intermédiaires au cas où $\begin{cases} a \in \overline{R} \\ b \in \overline{\mathbb{R}} \end{cases}$ en rempla c ant $f(a)$ par $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} f(x)$ et $f(b)$ par $\lim\limits_{\substack{x \to b \\ <}} f(x)$

**Théorème** (Théorème de la bijection)**:** Soit $f$ continue, strictement monotone sur un intervalle $I$. Alors, $J = f(I)$ est un intervalle de même nature (ouvert, semi-ouvert ou fermé) et $f$ établit une bijection de $I$ sur $J$.

**Théorème:** Soit $f$ continue sur un segment $[a, b]$. Alors, $f$ est bornée et atteint ses bornes, i.e.

$$\exists (m, M) \in \mathbb{R}^2, f([a, b]) = [m, M]$$

⚠ On peut avoir $m \neq f(a)$ et $M \neq f(b)$

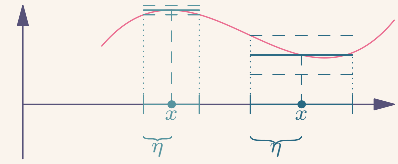


## 2 Continuité uniforme

Remarque:
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue,

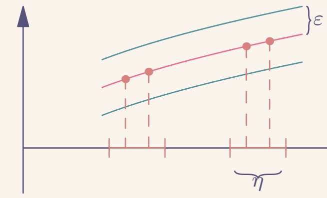
$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall y \in ]x-\eta, x+\eta[, |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$$

Ici, $\eta$ dépend de $\varepsilon$ et de $x$




Dans certaines situations, il serait préférable d'avoir

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |x - y| \leqslant \eta \implies |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$$

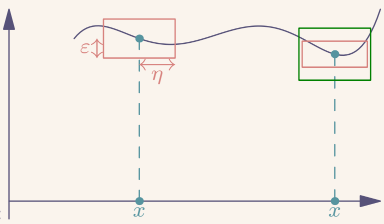



**Lemme:** Soit $f$ uniformément continue sur un intervalle $I$. Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites d'éléments dans $I$ telles que $x_n - y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Alors, $\lim\limits_{n\to+\infty} (f(x_n) - f(y_n)) = 0$ □

**Théorème** (Théorème de Heine)**:** Soit $f$ une function continue sur $[a, b]$. Alors, $f$ est uniformément continue sur $[a, b]$.

■




Remarque:

$$\begin{cases} \eta > 0 \\ \varepsilon > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} |x - y| \leqslant \eta \\ |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon \end{cases}$$

**Définition:** Soit $f : I \to \mathbb{R}$ où $I$ est un intervalle et $k \in \mathbb{R}$. On dit que $f$ est <u>$k$-lipschitzienne</u> si

$$\forall (x, y) \in I^2, |f(x) - f(y)| \leqslant k\, |x - y|$$

On dit que $f$ est lipschitzienne s'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $f$ soit $k$-lipschitzienne.

**Proposition:** Soit $f$ une fonction lipschitzienne sur $I$. Alors, $f$ est uniformément continue sur $I$ donc continue sur $I$.

■

**Théorème:** Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable sur $I$ telle qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall x \in I, \left|f'(x)\right| \leqslant M$$

Alors

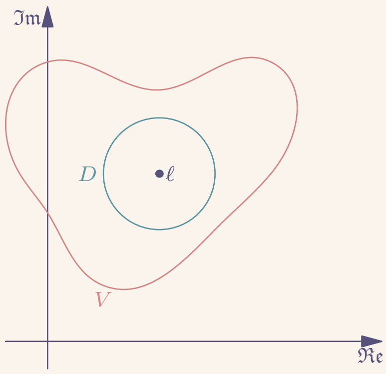
$$\forall (a,b) \in I^2, |f(a) - f(b)| \leqslant M\,|a-b|$$

donc $f$ est $M$-lipschitzienne.

**Corollaire:** Soit $f$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$. Alors $f$ est lipschitzienne.

■

## 3 Fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$




**Définition:**

$V$ est un voisinage de $\ell$ s'il existe $r > 0$ tel que $V \supset D(\ell, r)$
où $D(l,r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-\ell| < r\}$

**Proposition:** Soit $f : I \to \mathbb{C}$ et $a \in I$, $\ell \in \mathbb{C}$.

$$f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell \iff \begin{cases} \mathfrak{Re}(f(x)) \xrightarrow[x\to a]{} \mathfrak{Re}(\ell) \\ \mathfrak{Im}(f(x)) \xrightarrow[x\to a]{} \mathfrak{Im}(\ell) \end{cases}$$

□

Remarque (Rappel):

On dit que : $I \to \mathbb{C}$ est <u>bornée</u> s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in I, |f(x)| \leqslant M$$

# 4 Annexe

**Théorème:** *Théorème 2.11*
$f : I \to J$ bijective monotone avec $I$ et $J$ deux intervalles.
Alors, $f^{-1}$ est continue (et $f$ aussi)

■

**Définition:** Un <u>homéomorphisme</u> est une application bijective, continue dont la réciproque est continue.

Remarque:
Preuve du programme de colle ■

CHAPITRE

# 15

# ESPACES VECTORIELS

## 1 Définition et premières propriétés

**Définition:** Soit $E$ un ensemble muni d'une loi <u>interne</u> $+$ et d'une loi $\cdot$ définie sur $\mathbb{K} \times E$ à valeurs dans $E$ où $\mathbb{K}$ est un corps.
On dit que $(E, +, \cdot)$ est un <u>$\mathbb{K}$-espace vectoriel</u> (ou un <u>espace vectoriel sur $\mathbb{K}$</u>) si

1. $(E, +)$ est un groupe abélien
2. (a)
$$\forall u \in E, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2,$$
$$\mu \cdot (\lambda \cdot u) = (\mu \underbrace{\times}_{\times \text{ de } \mathbb{K}} \lambda) \cdot u$$
   (b) $\forall u \in E, 1_{\mathbb{K}} \cdot u = u$
3. (a)
$$\forall u \in E, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$$
$$(\lambda \cdot u) \underbrace{+}_{+ \text{ de } E} (\mu \cdot u) = (\lambda \underbrace{+}_{+ \text{ de } \mathbb{K}} \mu) \cdot u$$
   (b)
$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall (u, v) \in E^2,$$
$$\lambda \cdot (u + v) = (\lambda \cdot u) + (\lambda \cdot v)$$

Les éléments de $E$ sont alors appelés <u>vecteurs</u> et les éléments de $\mathbb{K}$ sont dits <u>scalaires</u>.
Par convention, $\cdot$ est prioritaire sur $+$.

**Proposition:** Soit $(E,+,\cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

1. $\forall u \in E, 0_{\mathbb{K}} \cdot u = 0_E$
2. $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda \cdot 0_E = 0_E$
3. $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall u \in E, \lambda \cdot u = 0_E \implies \lambda = 0_{\mathbb{K}}$ ou $u = 0_E$

■

**Proposition:** Soit $(E,+,\cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u \in E$. Alors, $-u = (-1_{\mathbb{K}}) \cdot u$

■

## 2 Sous-espaces vectoriels

**Définition:** Soit $(E,+,\cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit $F \subset E$.
On dit que $F$ est un sous-$\mathbb{K}$-espace vectoriel de $E$ si

1. $F \neq \varnothing$
2. $\forall (u,v) \in F^2, u+v \in F$
3. $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall u \in F, \lambda u \in F$

**Proposition:** Avec les notations précédentes, $(F,+,\cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel

■

**Proposition:** Soit $(E,+,\cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $F \subset E$.
$F$ est un sous-espace vectoriel de $(E,+,\cdot)$ si et seulement si

1. $F \neq \varnothing$
2. $\forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2, \forall (u,v) \in F^2, \lambda \cdot u + \mu \cdot v \in F$

■

**Définition:** Soient $(E,+,\cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(u_1,\dots,u_n) \in E^n$. Une combinaison linéaire de $(u_1,\dots,u_n)$ est un vecteur de $E$ de la forme $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i$ où $(\lambda_1,\dots,\lambda_n) \in \mathbb{K}^n$

Remarque:
On peut aussi démontrer que $F$ est un sous-espace vectoriel de $E$ si et seulement si

$$F \neq \varnothing \text{ et } \forall u,v \in F, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda u + v \in F$$

**Proposition:** Soit $(E,+,\cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\mathscr{F}$ une famille non vide de sous-espaces vectoriels de $E$. Alors $\bigcap_{F \in \mathscr{F}} F$ est un sous-espace vectoriel de $E$.

■

Remarque (Attention ⚠):
Une réunion de sous-espaces vectoriels n'est pas un sous-espace vectoriel en général.

**Définition:** Soient $F$ et $G$ deux sous-espaces vectoriels de $E$. On définit leur <u>somme</u> $F+G$ par

$$F+G=\{x+y \mid x \in F, y \in G\}$$

**Proposition:** Avec les notations précédentes, $F+G$ est le plus petit sous-espace vectoriel de $E$ contenant $F \cup G$.

■

**Définition:** Soit $(E,+,\cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(F_i)_{i\in I}$ une famille quelconque non vide de sous-espaces vectoriels de $E$. On définit $\sum_{i \in I} F_i$ par

$$\begin{aligned}\sum_{i\in I} F_i &= \left\{ \sum_{i\in I} x_i \mid (x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} F_i ; (x_i) \text{ presque nulle} \right\} \\ &= \left\{ \sum_{i\in I} x_i \mid (x_i) \in \prod_{i\in I} F_i ; \{i \in I \mid x_i \neq 0_E\} \text{ est fini} \right\}\end{aligned}$$

$\sum_{i\in I} F_i$ est l'ensemble de sommes <u>finies</u> obtenues à partir d'éléments de $\prod_{i\in I} F_i$

**Proposition:** Une somme quelconque de sous-espaces vectoriels est le plus petit sous-espace vectoriel contenant leur réunion. □

**Définition:** Soient $F$ et $G$ deux sous-espaces vectoriels de $E$. On dit qu'ils sont en <u>somme directe</u> si

$$\forall u \in F+G, \exists!(x,y) \in F \times G, u = x+y$$

Dans ce cas, l'espace $F+G$ est noté $F \oplus G$

**Proposition:** Soient $(E,+,\cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $F$ et $G$ deux sous-espaces vectoriels de $E$

*$F$ et $G$ sont en somme directe si et seuelement si $F \cap G = \{0_E\}$*

■

Remarque:
Ce résultat est inutile pour l'instant (en l'absence d'arguments dimensionnels) pour prouver un resultat de la forme $E = F \oplus G$

**Définition:** Soit $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On dit que $F$ et $G$ sont supplémentaires dans $E$ si

$$E = F \oplus G$$

en d'autres termes,

$$\forall x \in E, \exists!(y, z) \in F \times G, x = y + z$$

**Définition:** Soit $(F_i)_{i \in I}$ une famille non vide de sous-espaces vectoriels de $(E, +, \cdot)$. On dit qu'ils sont en somme directe si

$$\forall x \in \sum_{i \in I} F_i, \exists!(x_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} F_i \text{ presque nulle telle que } x = \sum_{i \in I} x_i$$

Dans ce cas, on écrit $\bigoplus_{i \in I} F_i$ à la place de $\sum_{i \in I} F_i$

## 3 Familles de vecteurs

**Définition:** Soit $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $A \in \mathscr{P}(E)$. Le sous-espace vectoriel engendré par $A$ est le plus petit sous espace vectoriel $V$ de $E$ tel que $A \subset V$.
On le note $\mathrm{Vect}(A)$

**Définition:** Soit $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u \in E \setminus \{0_E\}$. La droite (vectorielle) engendrée par $u$ est $\mathbb{K}u = \mathrm{Vect}(u) = \mathrm{Vect}(\{u\})$. Soit $v \in E$. On dit que $u$ et $v$ sont colinéaires si $v \in \mathbb{K}u$. Si $v$ n'est pas colinéaire à $u$ alors, $\mathrm{Vect}(u, v) = \mathbb{K}u + \mathbb{K}v$ est appelé plan (vectoriel) engendré par $u$ et $v$.

**Proposition:** Soit $(e_i)_{i \in I}$ un famille non vide de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel

$(E, +, \cdot)$. Alors,

$$\begin{aligned}\text{Vect}\left((e_i)_{i\in I}\right) &= \left\{\sum_{i\in I}\lambda_i e_i \mid (\lambda_i)_{i\in I}\in\mathbb{K}^I \text{ et } (\lambda_i) \text{ presque nulle}\right\}\\ &= \sum_{i\in I}\mathbb{K}e_i\end{aligned}$$

■

**Définition:** On dit que $(e_i)_{i\in I}$ est une famille génératrice de $E$ si

$$E = \text{Vect}\left((e_i)_{i\in I}\right)$$

**Proposition:** Soit $(e_i)_{i\in I}$ une famille génératrice de $E$ et $(u_j)_{j\in J}$ une surfamille de $(e_i)_{i\in I}$ constituée de vecteurs de $E$ :

$$\forall i\in I, \exists j\in J, e_i = u_j$$

Alors, $(u_j)_{j\in J}$ engendre $E$. □

**Proposition:** Soit $(e_i)_{i\in I}$ une famille génératrice de $E$ et $i_0\in I$

$$\begin{aligned}(e_i)_{i\in I\setminus\{i_0\}} \text{ engendre } E &\iff e_{i_0}\in\text{Vect}\left((e_i)_{i\in I\setminus\{i_0\}}\right)\\ &\iff e_{i_0} \text{ est une combinaison linéaire des } e_i\ (i\in I, i\neq i_0)\end{aligned}$$

■

**Proposition:** Soit $(e_i)_{i\in I}$ une famille génératrice de $E$, $i_0\in I$.

1. On pose $u_i = \begin{cases} e_i & \text{si } i\neq i_0\\ \lambda e_{i_0} & \text{sinon}\end{cases}$ où $\lambda\in\mathbb{K}\setminus\{0_\mathbb{K}\}$

   Alors, $(u_i)_{i\in I}$ engendre $E$
2. Soit $v\in\text{Vect}\left((e_i)_{i\in I\setminus\ \{i_0\}}\right)$.

   On pose $u_i = \begin{cases} e_i & \text{si } i\neq i_0\\ e_{i_0}+v & \text{sinon}\end{cases}$ où $\lambda\in\mathbb{K}\setminus\{0_\mathbb{K}\}$

   Alors, $(u_i)_{i\in I}$ engendre $E$

■

**Définition:** Soit $(e_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs. On dit que $(e_i)_{i\in I}$ est <u>libre</u> si aucun vecteur de cette famille n'est une combinaison linéaire des autres vecteurs de cette

famille :
$$\forall i \in I, e_i \notin \text{Vect}\left((e_j)_{j \in I \setminus \{i\}}\right)$$
On dit aussi que les $e_i$ sont linéairement indépendants

**Proposition:**

$$(e_i)_{i \in I} \text{ est libre } \iff \forall (\lambda_i) \in \mathbb{K}^I \text{ presque nulle }, \left(\sum_{i \in I} \lambda_i e_i = 0_E \implies \forall i \in I, \lambda_i = O_{\mathbb{K}}\right)$$

■

**Proposition:** Soit $(e_i)_{i \in I}$ une famille libre de $E$. Alors
$$\sum_{i \in I} \mathbb{K} e_i = \bigoplus_{i \in I} \mathbb{K} e_i$$
i.e.
$$\forall u \in \sum_{i \in I} \mathbb{K} e_i, \exists! (\lambda_i) \in \mathbb{K}^I \text{ presque nulle telle que } u = \sum_{i \in I} \lambda_i e_i$$
En d'autres termes, tout vecteur de $E$ a au plus une décomposition en combinaisons linéaires des $e_i, i \in I$

■

**Proposition:** Soit $(e_i)_{i \in I}$ une famille libre de $E$.

1. Toute sous famille de $(e_i)$ est encore libre
2. Soit $u \in E$, $\mathscr{F} = (e_i \mid i \in I) \cup \{u\}$.
$$\mathscr{F} \text{ est libre } \iff u \notin \text{Vect}(e_i \mid i \in I)$$
3. (a) Quand on remplace un vecteur $e_i$ par $\lambda e_i$ avec $\lambda \neq 0_{\mathbb{K}}$, la famille obtenue est libre.
   (b) Quand on remplace un vecteur $e_i$ par $v + e_i$ avec $v \in \text{Vect}(e_j \mid j \neq i)$, la famille obtenue est libre.

**Définition:** Soit $(e_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de $E$. On dit que $(e_i)$ est une base de $E$ si c'est à la fois une famille libre et génératrice de $E$ ; i.e. si
$$E = \bigoplus_{i \in I} \mathbb{K} e_i$$
i.e. si
$$\forall u \in E, \exists! (\lambda_i) \in \mathbb{K}^I \text{ presque nulle telle que } u = \sum_{i \in I} \lambda_i e_i$$
Dans ce cas, on dit que les $\lambda_i$ sont les coordonnées de $u$ dans la base $(e_i)_{i \in I}$

CHAPITRE

# 16

# DÉRIVATION

## 1 Définition et premières propriétés

Dans ce paragraphe, $f$ désigne une fonction définie sur un intervalle ouvert non vide $I$ à valeurs réelles.

**Définition:** Soit $a \in I$. On dit que $f$ est dérivable en $a$ si $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ a une limite qui est finie quand $x \to a$.
Dans ce cas, cette limite est notée $f'(a)$ et est appelée nombre dérivée de $f$ en $a$
On dit que $f$ est dérivable sur $I$ si $f$ est dérivable en tout $a \in I$.
L'application $\begin{array}{rcl} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ a & \longmapsto & f'(a) \end{array}$ est la dérivée de $f$ et est notée $f'$

**Proposition:**

$f$ est dérivable en $a \iff f$ a un développement limité d'ordre 1 au voisinage de $a$

■

**Proposition:** Si $f$ est dérivable en $a$ alors $f$ est continue en $a$.

■

**Proposition:** Soient $f$ et $g$ dérivables en $a$

1. $f+g$ est dérivable en $a$ et $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$
2. $f \times g$ est dérivable en $a$ et $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$

3. Si $g(a) \neq 0$, alors $\frac{f}{g}$ est dérivable en $a$ et

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{(g(a))^2}$$

■

**Proposition:** Soit $f$ dérivable en $a$ et $g$ dérivable en $f(a)$. Alors, $f \circ g$ est dérivable en $a$ et

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a)$$

■

**Proposition:** On suppose que $f$ est bijective dérivable en $a$ et $f'(a) \neq 0$. Si $f^{-1}$ est continue, alors $f^{-1}$ est dérivable en $f(a)$ et

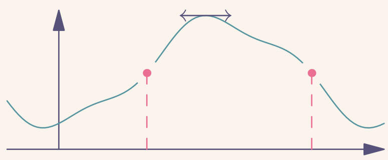
$$\left(f^{-1}\right)'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}$$

■

## 2 Théorème de Rolle et accroissements finis

**Théorème** (Théorème de Rolle)**:** Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. On suppose que $f(a) = f(b)$.
Alors,

$$\exists c \in ]a, b[, f'(c) = 0$$



■

**Définition:** On dit que $f$ présente un maximum local en $a$ s'il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall x \in ]a - \eta, a + \eta[, f(x) \leqslant f(a)$$

et un minimum local en $a$ s'il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall x \in ]a - \eta, a + \eta[, f(x) \geqslant f(a)$$

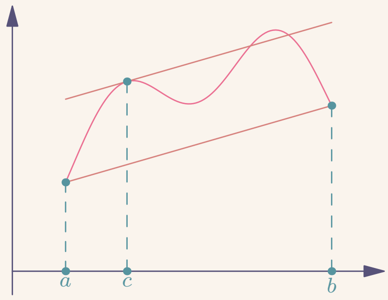
Un extremum local est un minimum local ou un maximum local.

**Proposition:** Soit $a \in I$ tel que $f(a)$ est un extremum local de $f$ où $f$ est dérivable en $a$. Alors, $f'(a) = 0$ □

**Définition:** Soit $f$ dérivable et $a \in I$. On dit que $a$ est un point critique de $f$ si $f'(a) = 0$. On dit que $f(a)$ est une valeur critique.

**Théorème** (Théorème des accroissements finis)**:** Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.
Alors, il existe $c \in ]a, b[$ tel que

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$




■

**Proposition:** Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable avec $I$ un intervalle non vide.

1. $f$ est croissante sur $I \iff \forall x \in I, f'(x) \geqslant 0$
2. $f$ est décroissante sur $I \iff \forall x \in I, f'(x) \leqslant 0$
3. $\forall x \in I, f'(x) > 0 \implies f$ strictement croissante
4. $\forall x \in I, f'(x) < 0 \implies f$ strictement décroissante
5. $f$ constante $\iff \forall x \in I, f'(x) = 0$

■

**Théorème** (Théorème de la limite de la dérivée)**:** Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue (sur $I$), $a \in I$. On suppose $f$ dérivable sur $I \setminus \{a\}$ et que $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ \neq}} f'(x)$ existe.

Alors,

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \xrightarrow[\substack{x \to a \\ \neq}]{} \lim_{\substack{x \to a \\ \neq}} f'(a)$$

■

**Proposition:** Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable. On suppose qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in I, \left|f'(x)\right| \leqslant M$$

Alors $f$ est $M$-lipschitzienne sur $I$.

■

## 3 Dérivées $n$-ièmes

**Définition:** On dit que $f$ est une fois dérivable si $f$ est dérivable. Dans ce cas, on note $f^{(1)}$ la fonction $f'$.
Pour $n \in \mathbb{N}_*$, on dit que $f$ est dérivable $n$ fois si $f$ est dérivable $n-1$ fois et $f^{(n-1)}$ est dérivable une fois. Dans ce cas, $f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)'$.

Remarque (Convention):

$$f^{(0)} = f$$

**Définition:** $f$ est de classe $\mathscr{C}^n$ si $f$ est dérivables $n$ fois et $f^{(n)}$ est continue.

**Proposition:** Soit $f$ dérivable $n$ fois et $k \leqslant n$.
Alors $f$ est dérivables $k$ fois et $f^{(n)} = \left(f^{(k)}\right)^{(n-k)}$ □

**Proposition:** Soit $f$ et $g$ deux fonctions dérivables $n$ fois en $a$.
Alors, $f+g$ est dérivable $n$ fois en $a$ et

$$(f+g)^{(n)}(a) = f^{(n)}(a) + g^{(n)}(a)$$

Si $f$ et $g$ sont de classe $\mathscr{C}^n$, alors, $f+g$ est de classe $\mathscr{C}^n$

■

**Proposition** (Leibniz)**:** Soient $f$ et $g$ dérivables $n$ fois en $a$. Alors, $f \times g$ est dérivables $n$ fois en $a$. et

$$(*): \qquad (f \times g)^{(n)}(a) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n)}(a) g^{(n-k)}(a)$$

Si $f$ et $g$ sont de classe $\mathscr{C}^n$ alors $f \times g$ est de classe $\mathscr{C}^n$.

■

**Proposition:** Soient $f$ et $g$ dérivables $n$ fois (resp. de classe $\mathscr{C}^n$). On suppose $g(a) \neq 0$.
Alors, $\frac{f}{g}$ est dérivables $n$ fois (resp. $\mathscr{C}^n$) en $a$.

■

**Proposition:** Soit $f$ dérivable $n$ fois en $a$ et $g$ dérivable $n$ fois en $f(a)$ (resp. $f$ et $g$ de classe $\mathscr{C}^n$).
Alors, $g \circ f$ est dérivable $n$ fois en $a$ (resp. de classe $\mathscr{C}^n$).

■

**Définition:** On dit que $f$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ si $f$ est de classe $\mathscr{C}^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, i.e. $f$ est dérivable une infinité de fois.

**Proposition** (formule de Taylor avec reste intégral)**:** Soit $f : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ et $a \in I$. Alors

$$(*) \qquad \forall x \in I, f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}\, dt$$

■

**Proposition** (Inégalité de Taylor-Lagrange)**:** Soit $f : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ et $M \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in I, \left|f^{(n+1)}(x)\right| \leqslant M$$

Alors, pour tout $a \in I$,

$$\forall x \in I, \left|f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)\right| \leqslant M\frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

■

# 4 Fonctions à valeurs complexes

**Définition:** Soient $f : I \to \mathbb{C}$, ($I$ intervalle de $\mathbb{R}$) et $a \in I$.
$f$ est dérivable en $a$ si $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ \neq}} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \in \mathbb{C}$

**Proposition:**

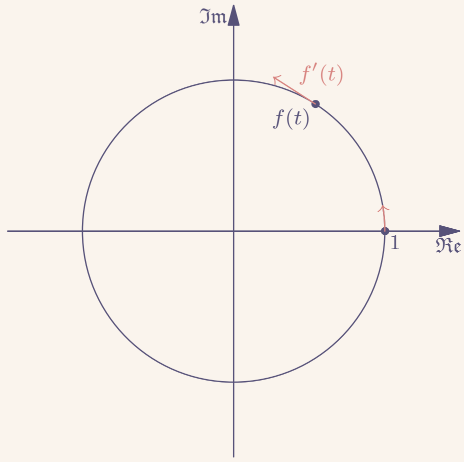
$$f \text{ est dérivable en } a \iff \mathfrak{Re}(f) \text{ et } \mathfrak{Im}(f) \text{ sont dérivables en } a$$

Dans ce cas, $f'(a) = \mathfrak{Re}(f)'(a) + i\mathfrak{Im}(f)'(a)$ □

**Proposition:** La somme, le produit, de fonctions dérivables sont dérivables ; le quotient également si le dénominateur ne s'annule pas. □

**Proposition:** idem avec les dérivées $n$-ièmes □

Remarque (Attention ⚠):
Le théorème de Rolle n'est plus vraie.




$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ t &\longmapsto e^{it} \end{aligned}$$

$f(0) = f(2\pi) = 1$
$f$ est continue sur $[0, 2\pi]$ et dérivable sur $]0, 2\pi[$
$\forall t, f'(t) = ie^{it} \neq 0$

> **Proposition:** La formule de Taylor avec reste intégral et l'inégalité de Taylor-Lagrange sont aussi vrais dans $\mathbb{C}$. $\square$

CHAPITRE

# 17

# DIMENSION FINIE

**Définition:** Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On dit que $E$ est de dimension finie si $E$ a au moins une famille génératrice finie. On dit que $E$ est de dimension infinie sinon.

**Théorème** (Théorème de la base extraite)**:** Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel non nul de dimension finie. Soit $\mathscr{G}$ une famille génératrice finie de $E$. Alors, il existe une base $\mathscr{B}$ de $\mathscr{E}$ telle que $\mathscr{B} \subset \mathscr{G}$.

■

**Corollaire:** Tout espace de dimension finie a une base. □

**Théorème** (Théorème de la base incomplète)**:** Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $\mathscr{G}$ une famille génératrice finie de $E$. $\mathscr{L}$ une famille libre de $E$. Alors, il existe une base $\mathscr{B}$ de $E$ telle que

$$\mathscr{L} \subset \mathscr{B} \text{ et } \mathscr{B} \setminus \mathscr{L} \subset \mathscr{G}$$

■

**Théorème:** Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Toutes les bases de $E$ ont le même cardinal.

■

**Lemme:** Soient $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de $E$ telles que $\mathscr{B} \subset \mathscr{B}'$. Alors, $\mathscr{B} = \mathscr{B}'$.

■

**Lemme** (Lemme d'échange)**:** Soient $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$ deux bases de $E$ et $u \in \mathscr{B}_1 \setminus \mathscr{B}_2$. Alors, il existe $v \in \mathscr{B}_2$ tel que $(\mathscr{B}_1 \setminus \{u\}) \cup \{v\}$ soit une base de $E$.

■

■

**Définition:** Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Le cardinal commun à toutes les bases de $E$ est appelé dimension de $E$ est notée $\dim(E)$ ou $\dim_{\mathbb{K}}(E)$
C'est donc aussi le nombre de coordonnées de n'importe quel vecteur dans n'importe quelle base.

**Corollaire:** Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $\mathscr{L}$ une famille libre de $E$, $\mathscr{G}$ une famille génératrice de $E$. On note $n = \dim(E)$

1. $\#\mathscr{G} \geqslant n$ et ($\#\mathscr{G} = n \implies \mathscr{G}$ est une base de $E$)
2. $\#\mathscr{L} \leqslant n$ et ($\#\mathscr{L} = n \implies \mathscr{L}$ est une base de $E$)

**Corollaire:** $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ est de dimension infinie. $\forall i \in \mathbb{N}, e_i : x \mapsto x^i$
$(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est libre dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

**Proposition:** Soient $E$ et $F$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie. Alors $E \times F$ est de dimension finie et $\dim(E \times F) = \dim(E) + \dim(F)$

■

Remarque (Convention):

$$\dim\left(\{0_E\}\right) = 0$$

**Théorème:** Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $F$ un sous-espace vectoriel de $E$. Alors, $F$ est de dimension finie et $\dim(F) \leqslant \dim(E)$
Si $\dim(F) = \dim(E)$, alors $F = E$

■

**Proposition** (Formule de Grassmann)**:** Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $F$ et $G$ deux sous-espace vectoriels de $E$. Alors,

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$$

■

**Corollaire:** Avec les hypothèse précédentes,

$$E = F \oplus G \iff \begin{cases} F \cap G = \{0_E\} \\ \dim(E) = \dim(F) + \dim(G) \end{cases}$$

■

**Proposition:** Soit $F$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n$. Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de $F$. L'application

$$\begin{aligned} f : \mathbb{K}^n &\longrightarrow F \\ (\lambda_1, \dots, \lambda_n) &\longmapsto \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \end{aligned}$$

est bijective.
Si $\mathbb{K}$ est infini, $\mathbb{K}^n$ aussi et donc $F$ aussi.
Si $\#\mathbb{K} = p \in \mathbb{N}_*$,

$$\begin{array}{l} \#\mathbb{K}^n = p^n \\ \quad \| \\ \#F \end{array}$$

CHAPITRE

# 18

# POLYNÔMES FORMELS

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne un corps

## 1 Définition

**Définition:** — Un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$ est une suite presque nulle de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$

— Le polynôme nul, noté 0 est la suite nulle.

— Soit $P = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un polynôme non nul.
$\{n \in \mathbb{N} \mid a_n \neq 0_{\mathbb{K}}\}$ est non-vide et majoré. Le degré de $P$ est $\max\{n \in \mathbb{N} \mid a_n \neq 0_{\mathbb{K}}\}$, et on le note $\deg(P)$ et $a_{\deg(P)}$ est le coefficient dominant de $P$, il est noté $\mathrm{dom}(P)$.

— Le degré du polynôme nul est $-\infty$

**Proposition – Définition:** Soient $P = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $Q = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$. Alors, $P + Q = (a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un polynôme appelé somme de $P$ et $Q$.

■

**Proposition – Définition:** Soient $P = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $Q = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$. On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}, c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

La suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est presque nulle. Ce polynôme est appelé produit de $P$ et $Q$ et noté $PQ$.

■

Remarque (Notation):
Soit $P = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Le polynôme $(\lambda a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est noté $\lambda P$

Remarque (Notation):
On pose $X = (0_\mathbb{K}, 1_\mathbb{K}, 0_\mathbb{K}, \dots) = (\delta_{1,n})_{n\in\mathbb{N}}$

**Théorème:** Soit $P = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un polynôme non nul à coefficients dans $\mathbb{K}$. Alors

$$P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \qquad \text{où } n = \deg(P) \text{ et } X^0 = (1, 0, \dots)$$

■

Remarque (Notation):
On note $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ dont l'indéterminée $(0, 1, 0, \dots)$ est notée $X$.

**Proposition:** $\big(\mathbb{K}[X], +, \times, \cdot\big)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre commutative i.e.

1. $\big(\mathbb{K}[X], +, \times\big)$ est un anneau commutatif
2. $\big(\mathbb{K}[X], +, \cdot\big)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel
3. $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall (P, Q) \in \big(\mathbb{K}[X]\big)^2, \lambda \cdot (P \times Q) = (\lambda \cdot P) \times Q = P \times (\lambda \cdot Q)$

■

Remarque:
$(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}), +, \times, \cdot)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre non commutative (si $n > 1$)

**Proposition:** $i : \begin{array}{ccc} \mathbb{K} & \longrightarrow & \mathbb{K}[X] \\ \lambda & \longmapsto & \lambda X^0 \end{array}$ est un morphisme d'algèbre injectif, i.e.

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \begin{cases} i(\lambda + \mu) = i(\lambda) + i(\mu) \\ i(\lambda \cdot \mu) = i(\lambda) \times i(\mu) \end{cases}$$

et $i$ est injective.

Remarque (Notation):
On identifie $\lambda \in \mathbb{K}$ avec $\lambda X^0 \in \mathbb{K}[X]$. Ainsi, on peut écrire $X^0 = 1$, on peut écrire $2+X+3X^2$ au lieu de $2X^0 + X + 3X^2$

**Proposition:** Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$

— $\deg(P + Q) \leqslant \max\big(\deg(P), deg(Q)\big)$
— Si $\deg(P) \neq \deg(Q)$, alors
 — $\deg(P + Q) = \max\big(\deg(P), \deg(Q)\big)$
 — $\mathrm{dom}(P + Q) = \begin{cases} \mathrm{dom}(P) & \text{si } \deg(P) > \deg(Q) \\ \mathrm{dom}(Q) & \text{si } \deg(P) < \deg(Q) \end{cases}$
— Si $\deg(P) = \deg(Q)$ et $\mathrm{dom}(P) + \mathrm{dom}(Q) \neq 0$,

alors $\begin{cases} \deg(P+Q) = \deg(P) = \deg(Q) \\ \mathrm{dom}(P+Q) = \mathrm{dom}(P) + \mathrm{dom}(Q) \end{cases}$

— Si $\deg(P) = \deg(Q)$ et $\deg(P) + \deg(Q) = 0$, alors $\deg(P+Q) < \deg(P)$

■

**Proposition:** Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$. Alors

$$\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$$

■

## 2 Évaluation

**Définition:** Soit $A$ une $\mathbb{K}$-algèbre et $P \in \mathbb{K}[X]$. On pose $P = \sum_{k=0}^{n} e_k X^k$. Soit $a \in A$.

On pose

$$\begin{aligned} P(a) &= \sum_{k=0}^{n} e_k a^k \\ &= e_0 1_A + e_1 a + e_2 a^2 + \cdots + e_n a^n \in A \end{aligned}$$

On dit qu'on a <u>évalué</u> $P$ en $a$, ou <u>spécialisé</u> $X$ avec la valeur de $a$, ou <u>remplacé</u> $X$ par $a$, <u>substitué</u> $a$ à $X$.

**Définition:** Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $a \in \mathbb{K}$.
On dit que $a$ est une <u>racine de $P$</u> si $P(a) = 0_{\mathbb{K}}$.

**Définition:** Soit $P \in \mathbb{K}[X] \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que c'est un <u>polynôme de matrices</u>.

**Définition:** Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$.

Alors $P(Q) = \sum_{k=0}^{n} a_k Q^k \quad \in \mathbb{K}[X]$

C'est la <u>composée</u> de $P$ et $Q$.

Remarque (⚠ Attention):
Ne pas confondre $\underbrace{P(X+1)}_{\text{composée}}$ et $\underbrace{P(X+1)}_{\text{produit}}$.

On a $\underbrace{P(X+1)}_{\text{produit}} = (X+1)\,P = P(X)\,(X+1) = P \times (X+1)$

**Proposition:** Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ avec $\begin{cases} Q \neq 0 \\ P \neq 0 \end{cases}$. On a

$$\deg\big(P(Q)\big) = \deg(P) \times \deg(Q)$$

□

**Théorème:** Soit $A$ une $\mathbb{K}$-algèbre. L'application

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{K}[X] &\longrightarrow A^A \\ P &\longmapsto f_P : \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & A \\ a & \longmapsto & P(a) \end{array} \end{aligned}$$

vérifie

1. $\forall P, Q \in \mathbb{K}[X], \varphi(P+Q) = \varphi(P) + \varphi(Q)$
2. $\forall P, Q \in \mathbb{K}[X], \varphi(PQ) = \varphi(P) \times \varphi(Q)$
3. $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall P \in \mathbb{K}[X], \varphi(\lambda P) = \lambda \varphi(P)$

□

**Définition:** Soit $P \in \mathbb{K}[X]$,

$$P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$$

Le polynôme dérivé de $P$ est

$$P' = \sum_{k=0}^{n} k a_k X^{k-1} = \sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1}$$

où

$$\forall k \in [\![1, n]\!], k a_k = \underbrace{a_k + \cdots + a_k}_{k \text{ fois}}$$

$$0_{\mathbb{N}} a_k = 0_{\mathbb{K}}$$

Remarque:
Si $P \in \mathbb{R}[X]$, $f_p : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & P(x) \end{array}$

$f_{P'} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & P'(x) \end{array}$ alors $f_{P'} = f'_P$

**Proposition:**

$$\forall P \in \mathbb{K}[X], \deg(P') = \begin{cases} \deg(P) - 1 & \text{si } \deg(P) > 0 \\ -\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

**Proposition:** Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

1. $(P+Q)' = P' + Q'$
2. $(PQ)' = P'Q + PQ'$
3. $(\lambda P)' = \lambda P'$

■

**Définition:** Pour $k \in \mathbb{N}$, on définit la dérivée $k$-ième d'un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ par
- si $k = 0$, $P^{(k)} = P$
- si $k = 1$, $P^{(1)} = P'$
- si $k > 1$, $P^{(k)} = \left(P^{(k-1)}\right)'$

**Proposition:**

$$\forall k, j \in \mathbb{N}^2, \left(X^k\right)^{(j)} = \begin{cases} 0 & \text{si } j > k \\ k(k-1)\cdots(k-j+1)X^{k-j} = \dfrac{k!}{(k-j)!}X^k & \text{si } j \leqslant k \end{cases}$$

■

**Proposition:** Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, $\lambda \in \mathbb{K}$
1. $\forall k \in \mathbb{N}, (P+Q)^{(k)} = P^{(k)} + Q^{(k)}$
2. $\forall k \in \mathbb{N}, (PQ)^{(k)} = \displaystyle\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} P^{(i)} Q^{(k-i)}$
3. $\forall k \in \mathbb{N}, (\lambda P)^{(k)} = \lambda P^{(k)}$

■

# 3 Arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$

**Définition:** Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$. On dit que $A$ divise $B$ (dans $\mathbb{K}[X]$) s'il existe $C \in \mathbb{K}[X]$ tel que

$$AC = B$$

On dit dans ce cas que $A$ est un diviseur de $B$ ou que $B$ est un multiple de $A$. On le note alors $A \mid B$
On dit que $A$ et $B$ sont associés s'il existe $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ tel que $A = \lambda B$. Il s'agit d'une relation d'équivalence.

**Proposition:** Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$.

$$\left.\begin{matrix} A \mid B \\ B \mid A \end{matrix}\right\} \iff A \text{ et } B \text{ sont associés}$$

■

**Lemme:** $\mathbb{K}[X]$ est un anneau intègre.

■

**Lemme:**

$$\mathbb{K}[X]^{\times} = \mathbb{K} \setminus \{0\}$$

■

**Proposition:** $|$ est une relation réflexive et transitive. □

**Proposition:** Soient $A, B, C \in \mathbb{K}[X]$ tels que $A \mid B$ et $A \mid C$. Alors

$$\forall (P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2, A \mid BQ + CP$$

□

**Proposition – Définition:** Soit $A \in \mathbb{K}[X], B \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$.

$$\exists !(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2, \begin{cases} A = PQ + R \\ \deg(R) < \deg(B) \end{cases}$$

On dit que $Q$ est le quotient et $R$ le reste de la division (euclidienne) de $A$ par $B$.

■

**Théorème:** Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $a \in \mathbb{K}$.

$$P(a) = 0 \iff X - a \mid P$$

■

**Corollaire:** Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ non nul de degré $n$. Alors, $P$ a au plus $n$ racines distinctes dans $\mathbb{K}$

■

**Définition:** Soient $A$ et $B$ deux polynômes dont l'un au moins est non nul, $D \in \mathbb{K}[X]$. On dit que $D$ est un PGCD de $A$ et $B$ si $D$ est un diviseur commun de $A$ et $B$ et de degré maximal.

**Proposition:** Avec les hypothèse précédents, deux PGCD quelconques de $A$ et $B$ sont nécessairement associés

■

Remarque:
Dans la preuve précédente, on a aussi montré les deux propositions suivantes.

**Théorème** (Théorème de Bézout)**:** Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$ tels que $A \neq 0$ ou $B \neq 0$
Soit $D$ un PGCD de $A$ et $B$. Alors

$$\exists (U, V) \in \mathbb{K}[X]^2, AU + BV = D$$

■

**Proposition:** Avec les hypothèses précédents,

$$\forall \Delta \in \mathbb{K}[X],$$
$$\left.\begin{array}{l}\Delta \mid A \\ \Delta \mid B\end{array}\right\} \iff \Delta \mid D$$

■

**Définition:** On dit qu'un polynôme est unitaire si sont coefficient dominant vaut 1.

**Proposition – Définition:** Soient $A$ et $B$ deux polynômes dont l'un au moins est non nul. Parmi tous les PGCD de $A$ et $B$, un seul est unitaire. On le note $A \wedge B$.

■

**Proposition:** Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$ avec $B \neq 0$. Soit $R$ le reste de la division de $A$ par $B$. Alors,

$$A \wedge B = B \wedge R$$

■

**Théorème** (Théorème de Gauß)**:** Soient $A, B, C$ trois polynômes non nuls tels que
$\begin{cases} A \mid BC \\ A \wedge B = 1 \end{cases}$
Alors, $A \mid C$

■

**Corollaire:** Avec les notations précédentses,

$$\left.\begin{array}{l}A \mid B \\ B \mid C \\ A \wedge B = 1\end{array}\right\} \implies AB \mid C$$

**Proposition:** Soient $A$ et $B$ deux polynômes non nuls et $D$ un PGCD de $A$ et $B$. Soit $x \in \mathbb{K}$.

$$A(x) = B(x) = 0 \iff D(X) = 0$$

■

**Définition:** Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.

On dit que $P$ n'est pas irréductible si il existe $(Q, R) \in \mathbb{K}[X]^2$ non constants tels que $P = QR$ **ou** si $P$ est constant.

Sinon, on dit que $P$ est irréductible.

**Théorème** (Théorème de D'Alembert - Gauß)**:**

$$\forall P \in \mathbb{C}[X] \text{ non constant}, \exists a \in \mathbb{C}, P(a) = 0$$

□

**Corollaire:** Les polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont exactement les polynômes de degré 1.

■

**Définition:** Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $a \in \mathbb{K}$, $\mu \in \mathbb{N}$.
On dit que $a$ est une racine de $P$ de multiplicité $\mu$ si

$$\begin{cases} (X-a)^{\mu} \mid P \\ (X-a)^{\mu+1} \nmid P \end{cases}$$

Si $\mu = 1$, on dit que $a$ est une racine simple.
Si $\mu = 2$, on dit que $a$ est une racine double.

Remarque:
$a$ est une racine de multiplicité 0 si et seulement si $P(a) \neq 0$

**Lemme:** Soient $(A, B) \in \mathbb{R}[X]^2$ non nuls. On suppose que $A$ divise $B$ dans $\mathbb{C}[X]$
Alors, $A$ divise $B$ dans $\mathbb{R}[X]$

■

**Proposition:** Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, $\mu \in \mathbb{N}$.
Si $a$ est une racine de $P$ de multiplicité $\mu$ alors $\overline{a}$ est une racine de $P$ de multiplicité $\mu$.

■

**Corollaire:** Les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont les polynômes de degré 1 et les polynômes de degré 2 à discriminant strictement négatifs.

■

**Théorème:** Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Tout polynôme de $\mathbb{K}$ se découpe en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{K}[X]$ et cette décomposition est unique à multiplication par une constante non nulle près. □

**Proposition:** Soient $A, B \in \mathbb{C}[X]$ non nuls.

$$A \mid B \iff \begin{array}{l} \forall a \in \mathbb{C}, \text{ si } a \text{ est une racine de } A \text{ de multiplicité } \mu \in \mathbb{N}, \\ \text{alors } a \text{ est racine de } B \text{ avec une multiplicité} \geqslant \mu \end{array}$$

■

**Proposition:** Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré $n > 0$
Alors $P$ a exactement $n$ racines comptées avec multiplicité.

■

## 4 L'espace vectoriel $\mathbb{K}[X]$

Remarque (Rappel):
$(\mathbb{K}[X], +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel engendré par $(1, X, X^2, \ldots)$

**Proposition:** La famille $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est libre.

■

**Corollaire:**

$$\dim\big(\mathbb{K}[X]\big) = +\infty$$

□

**Définition:** Pour $n \in \mathbb{N}$, on note

$$\mathbb{K}_n[X] = \big\{P \in \mathbb{K}[X] \mid \deg(P) \leqslant n\big\}$$

**Théorème:** $\mathbb{K}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$ de dimension $n+1$

■

**Proposition:** Soit $(P_i)_{i\in I}$ une famille de polynômes non nuls telle que

$$\forall i \neq j, \deg(P_i) \neq \deg(P_j)$$

Alors $(P_i)_{i\in I}$ est libre.

■

**Théorème** (Formule de Taylor)**:** Soit $P \in \mathbb{K}_n[X]$ et $a \in \mathbb{K}$.

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k$$

■

**Proposition:** Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $a \in \mathbb{K}$.

$$\left.\begin{array}{r} a \text{ est une racine de } P \\ \text{de multiplicité } \mu \end{array}\right\} \iff \left\{\begin{array}{l} \forall k \leqslant \mu - 1, P^{(k)}(a) = 0 \\ P^{(\mu)}(a) \neq 0 \end{array}\right.$$

■

**Corollaire:** Avec les notations précédentes, si $a$ est une racine de $P$ de multiplicité $\mu$, alors $a$ est une racine de $P'$ de multiplicité $\mu - 1$

□

**Définition:** On dit qu'un polynôme $P$ est <u>scindé</u> sur $\mathbb{K}$ si $P$ est un produit de polynômes de $\mathbb{K}[X]$ de degré 1, i.e. toutes les racines de $P$ sont dans $\mathbb{K}$

**Définition:** Soit $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ avec

$$\forall i \neq j, x_i \neq x_j$$

On pose

$$\forall i \in [\![1, n]\!], L_i = \prod_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq i}} \frac{X - x_j}{x_i - x_j}$$

$L_i$ est le <u>$i$-ème polynôme interpolateur de Lagrange</u> associé à $(x_1, \ldots, x_n)$ :

$$\forall j \in [\![1, n]\!], L_i(x_j) = \delta_{i,j}$$

**Proposition:** Avec les notations précédentes, $(L_1, \ldots, L_n)$ est une base de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$.

■

CHAPITRE

# 19

# APPLICATIONS LINÉAIRES

## 1 Premières propriétés

**Définition:** Soient $E$ et $F$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f : E \to F$. On dit que $f$ est linéaire si

$$\forall (x, y) \in E^2, \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2, f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$$

**Définition:** On dit qu'un problème est linéaire s'il se présente sous la forme :

$$\text{Résoudre } \varphi(x) = y$$

où l'inconnue est $x \in E$, $y$ est un paramètre de $F$ avec $\varphi : E \to F$ linéaire.

Remarque (Notation):
Soient $E$ et $F$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.
L'ensemble des applications linéaires de $E$ dans $F$ est $\mathscr{L}(E, F)$.
Si $F = E$, alors on note plus simplement $\mathscr{L}(E)$ à la place de $\mathscr{L}(E, E)$.
Les éléments de $\mathscr{L}(E)$ sont appelés endomorphismes (linéaires) de $E$.

**Proposition:** Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$, $g \in \mathscr{L}(F, G)$. Alors $g \circ f \in \mathscr{L}(E, G)$.

■

**Proposition:** $\mathscr{L}(E, F)$ est un sous-espace vectoriel de $F^E$.

■

**Proposition:** $\left(\mathscr{L}(E), +, \circ, \cdot\right)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre (non commutative en général).

■

**Corollaire:** Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $u \in \mathscr{L}(E)$. On peut former $P(u) \in \mathscr{L}(X)$ : on dit que $P(u)$ est un polynôme d'endomorphisme.

**Proposition:** Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$ bijective. Alors $f^{-1} \in \mathscr{L}(F, E)$.

■

Remarque (Notation):
On note $\mathrm{GL}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de $E$ bijectifs, $\mathrm{GL}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de $E$ dans $F$ bijectives.
Les éléments de $\mathrm{GL}(E)$ sont appelés automorphismes (linéaires) de $E$.

**Corollaire:** $\mathrm{GL}(E)$ est un sous-groupe de $\left(S(E), \circ\right)$

**Définition:** $\mathrm{GL}(E)$ est dit " le groupe linéaire de $E$".

## 2 Noyau et image

**Proposition:** Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$, $U$ un sous-espace vectoriel de $E$ et $V$ un sous-espace vectoriel de $F$.

1. $f(U)$ est un sous-espace vectoriel de $F$.
2. $f^{-1}(V)$ est un sous-espace vectoriel de $E$.

■

**Corollaire:** Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$.

1. $\mathrm{Ker}(f) = f^{-1}\left(\{0_F\}\right) = \{x \in E \mid f(x) = 0_E\}$ est un sous-espace vectoriel de $E$.
2. $\mathrm{Im}(f) = f(E) = \{f(u) \mid u \in E\}$ est un sous-espace vectoriel de $E$.

□

Remarque (Rappel):
Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$

$$\begin{aligned} f \text{ injective} &\iff \mathrm{Ker}(f) = \{0_E\} \\ f \text{ surjective} &\iff \mathrm{Im}(f) = F \end{aligned}$$

## 3 Théorème du rang

Dans ce paragraphe, $E$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

**Proposition:** Soit $f : E \to F$ un isomorphisme (i.e. une application linéaire bijective). Alors, $\dim(E) = \dim(F)$

■

La première partie de la preuve précédente justifie le résultat suivant.

**Proposition:** Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$ injective. $\mathscr{L} = (e_1, \dots, e_p)$ une famille libre de $E$. Alors $\big(f(e_1), \dots, f(e_n)\big)$ est une famille libre de $F$. En particulier, $\dim(F) \geqslant \dim(E)$.
□

La deuxième partie de la preuve prouve :

**Proposition:** Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$ surjective et $\mathscr{G} = (e_1, \dots, e_p)$ une famille génératrice de $E$. Alors $\big(f(e_1), \dots, f(e_p)\big)$ est une famille génératrice de $F$. En particulier,

$$\dim(F) \leqslant \dim(E)$$

□

**Théorème** (Théorème du rang)**:** Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$.

$$\dim(E) = \dim\big(\operatorname{Ker}(f)\big) + \dim\big(\operatorname{Im}(f)\big)$$

■

Remarque:
Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et $F$ un sous-espace vectoriel de $E$.

Cas1 $F = \{0_E\}$, alors $E$ est un supplémentaire de $F$.

Cas2 $F \neq \{0_E\}$. Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de $F$. Alors $\mathscr{B}$ est une famille libre de $E$. On complète $\mathscr{B}$ en une base $(e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$ de $E$. On pose $G = \operatorname{Vect}(e_{p+1}, \dots, e_n)$. On démontre que

$$F \oplus G = E$$

**Corollaire:** Soient $E$ et $F$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de même dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E,F)$.

$$\begin{aligned} f \text{ injective} &\iff f \text{ surjective} \\ &\iff f \text{ bijective} \end{aligned}$$

■

**Corollaire:** Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ avec $E$ de dimension finie. Alors,

$$f \in \mathrm{GL}(E) \iff f \text{ injective} \iff f \text{ surjective}$$

□

REMARQUE:
Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$, $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de $E$. Alors

$$\boxed{\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Vect}\big(f(e_1), \dots, f(e_n)\big)}$$

$\dim\big(\operatorname{Im}(f)\big) = \operatorname{rg}\big(f(e_1), \dots, f(e_n)\big)$

**Définition:** Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$. Le rang de $f$ est

$$\operatorname{rg}(f) = \dim\big(\operatorname{Im}(f)\big)$$

## 4 Formes linéaires

**Définition:** Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Une forme linéaire sur $E$ est une application linéaire de $E$ dans $\mathbb{K}$.
L'ensemble des formes linéaires est noté $E^* = \mathscr{L}(E, \mathbb{K})$. $E^*$ est appelé espace dual de $E$.

**Proposition:** Toute forme linéaire est soit nulle, soit surjective.

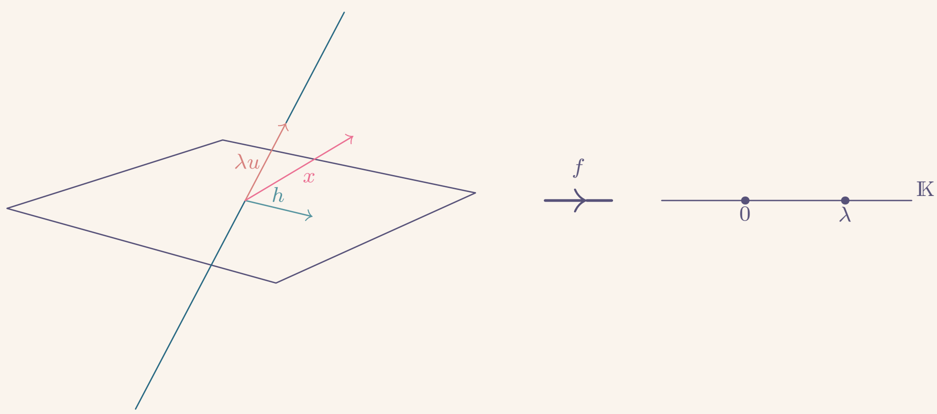
■

**Proposition:** Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n$ et $f \in E^* \setminus \{0\}$. Alors $\operatorname{Ker}(f)$ est de dimension $n-1$.

■

**Proposition:** Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n$ et $H$ un sous-espace vectoriel de $E$ de dimension $n-1$. Alors,

$$\exists f \in E^*, \operatorname{Ker}(f) = H$$




■

**Proposition:** Avec les notations précédentes,
$\{f \in E^* \mid \mathrm{Ker}(f) = H\}$ est une droite de $E^*$ privée de l'application nulle. En d'autres termes, les équations de $H$ sont 2 à 2 proportionelles.

■

**Définition:** Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $H$ un sous-espace vectoriel de $E$. On dit que $H$ est un hyperplan de $E$ s'il existe une droite $D$ de $E$ telle que

$$H \oplus D = E$$

En reprenant les démonstrations précédentes, on a encore les résultats suivants :

**Proposition:** Soit $H$ un hyperplan de $E$. Alors, $\{f \in E^* \mid \mathrm{Ker}(f) = H\}$ est une droite de $E^*$ privée de l'application nulle. □

**Proposition:** Soit $f \in E^*$ non nulle. Alors $\mathrm{Ker}(f)$ est un hyperplan de $E$.

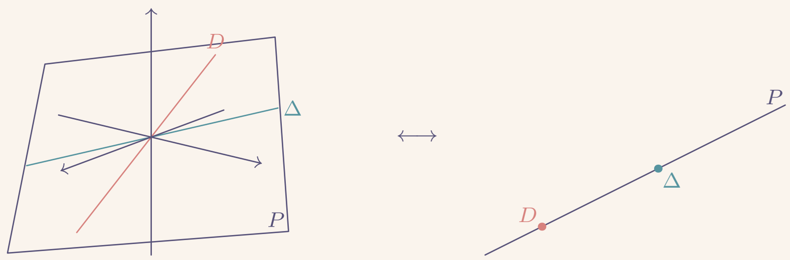
■

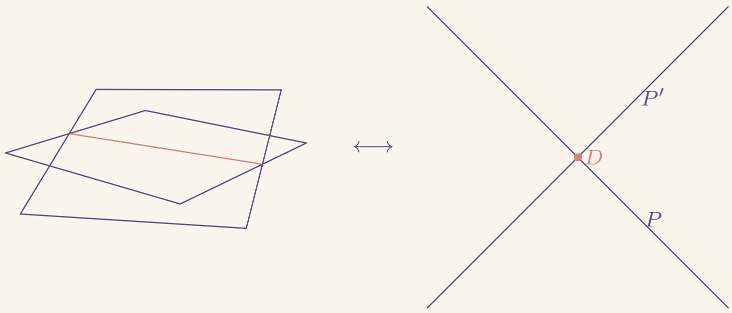
## Hors-Programme

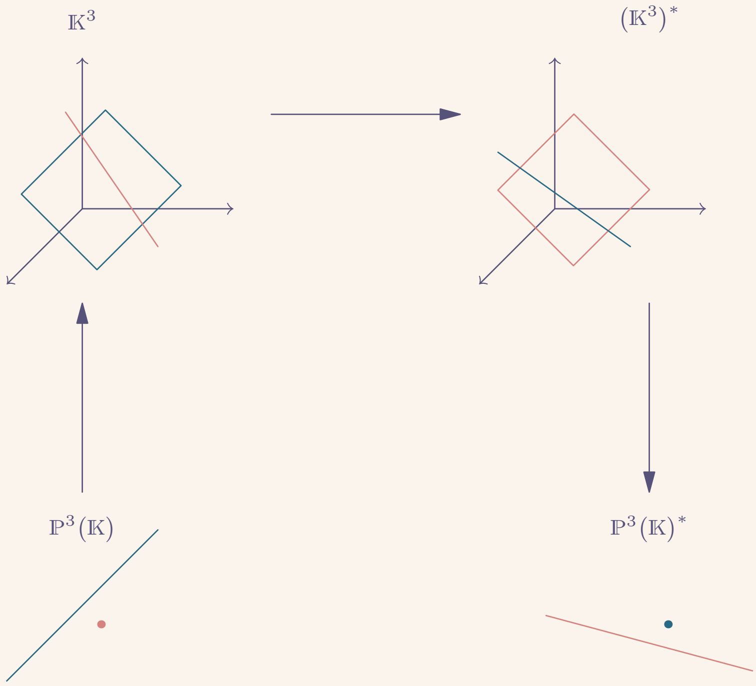
$$\mathbb{P}^3(\mathbb{K}) = \{D \setminus \{0\} \mid D \text{ droite vectorielle de } \mathbb{K}^3\}$$

Une droite projective de $\mathbb{P}^3(\mathbb{K})$ est un plan vectoriel de $\mathbb{K}^3$ privé de 0.

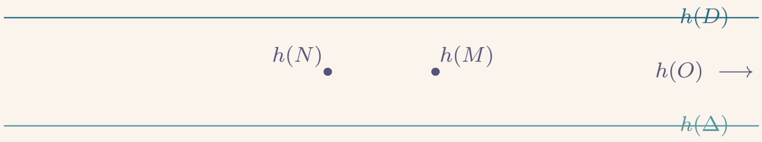
À faire : schéma A






À faire : schémas B et C




## 5 Projections et symétries

**Définition:** Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $F$ et $G$ deux sous-espaces de $E$ supplémentaires :

$$E = F \oplus G$$

Soit $x \in E$.

$$\exists!(a, b) \in F \times G, x = a + b$$

Le vecteur $a$ est appelé projeté de $x$ sur $F$ parallèlement à $G$.
Le vecteur $b$ est appelé projeté de $x$ sur $G$ parallèlement à $F$.
La projection sur $F$ parallèlement à $G$ est l'application qui à $x \in E$ associe son projeté sur $F$ parallèlement à $G$.

**Proposition:** Soient $F$ et $G$ deux sous-espaces vectoriels de $E$ supplémentaires et $p$ la projection sur $F$ parallèlement à $G$.

1. $p \in \mathscr{L}(E)$
2. $p_{|F} = \mathrm{id}_F$ et $p_{|G} = 0$
3. $p \circ p = p$
4. $\mathrm{id}_E - p$ est la projection sur $G$ parallèlement à $F$.

■

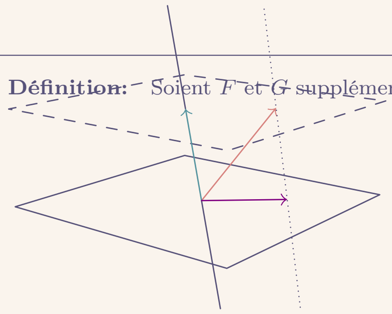
**Définition:** Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. On dit que $f$ est un projecteur si $f \circ f = f$

**Proposition:** Soit $f$ un projecteur de $E$. Alors $f$ est la projection sur $\mathrm{Im}(f)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(f)$. En particulier,

$$\mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f) = E$$

■

**Définition:** Soient $F$ et $G$ supplémentaires dans $E$ : $E = F \oplus G$



Soit $x \in E$. On décompose $x$ :

$$x = a + b \text{ avec } \begin{cases} a \in F \\ b \in G \end{cases}$$

et on forme

$$y = a - b$$

On dit que $y$ est le symétrique de $x$ par rapport à $F$ parallèlement à $G$
La symétrie par rapport à $F$ parallèlement à $G$ est l'application qui à tout $x \in E$ associe son symétrique parallèlement à $G$ par rapport à $F$.

**Proposition:** Soient $F$ et $G$ supplémentaires dans $E$, $s$ la symétrie par rapport à $F$ parallèlement à $G$.

1. $s \in \mathscr{L}(E)$
2. $s_{|E} = \mathrm{id}_F$ et $s_{|G} = -\mathrm{id}_G$
3. $s \circ s = \mathrm{id}_E$

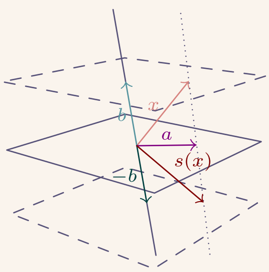
■

**Définition:** Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. On dit que $f$ est involutive si $f \circ f = \mathrm{id}_E$.

**Proposition:** Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ involutif. Alors $f$ est la symétrie par rapport à $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(f + \mathrm{id}_E)$. En particulier,

$$\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(f + \mathrm{id}_E) = E$$

■



CHAPITRE

# 20

# FRACTIONS RATIONNELLES

## 1 Construction de $\mathbb{K}(X)$

**Proposition – Définition:** On définit la relation $\sim$ sur $\mathbb{K}[X] \times \big(\mathbb{K}[X] \setminus \{0\}\big)$ par

$$(P, Q) \sim (A, B) \iff PB = QA$$

Cette relation est une relation d'équivalence. On note $\big(\mathbb{K}[X] \times (\mathbb{K}[X] \setminus \{0\})\big)/\sim$. Les éléments de $\mathbb{K}(X)$ sont appelés fractions rationnelles.
On note $\dfrac{P}{Q}$ la classe d'équivalence du couple $(P, Q)$.

**Proposition:** Soient $(P, Q) \in \mathbb{K}[X] \times \big(\mathbb{K}[X] \setminus \{0\}\big)$ et $R \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$. Alors

$$\frac{PR}{QR} = \frac{P}{Q}$$

**Définition:** Soit $(P, Q) \in \mathbb{K}[X] \setminus \big(\mathbb{K}[X] \setminus \{0\}\big)$. On dit que la fraction $\dfrac{P}{Q}$ est sous forme irréductible si $P \wedge Q = 1$.

**Proposition – Définition:** Soient $(P, Q) \sim (A, B)$. Alors

$$\deg(P) - \deg(Q) = \deg(A) - \deg(B)$$

Le degré de $\dfrac{P}{Q}$ est $\deg(P) - \deg(Q)$. On note ce "nombre" $\deg\left(\dfrac{P}{Q}\right)$.

**Proposition – Définition:** Soient $(P,Q)\sim(A,B)$ et $(R,S)\sim(C,D)$. Alors, $(PR,QS)\sim(AC,BD)$.
Le produit de $\frac{P}{Q}$ avec $\frac{R}{S}$ est $\frac{PR}{QS}$

■

**Proposition – Définition:** Avec les notations précédentes,

$$(PS+RQ,QS)\sim(AD+BC,BD)$$

On définit la somme de $\frac{P}{Q}$ et $\frac{R}{S}$ par

$$\frac{P}{Q}+\frac{R}{S}=\frac{PS+RQ}{QS}$$

■

**Théorème:** $\big(\mathbb{K}(X),+,\times\big)$ est un corps.

■

**Proposition:**

$$\forall P,A\in\mathbb{K}[X],\forall Q\in\mathbb{K}[X]\setminus\{0\},\qquad \frac{P}{Q}+\frac{A}{Q}=\frac{P+A}{Q}$$

**Proposition:** $i:\begin{array}{ccc}\mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}(X)\\ P & \longmapsto & \frac{P}{1}\end{array}$ est un morphisme d'anneaux injectif.

■

**Définition:** Soient $\lambda\in\mathbb{K}$ et $F=\frac{P}{Q}\in\mathbb{K}(X)$. On pose

$$\lambda F=\frac{\lambda P}{Q}=\frac{\lambda}{1}\times\frac{P}{Q}$$

**Proposition:** $\big(\mathbb{K}(X),+,\cdot\big)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $i:\begin{array}{ccc}\mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}(X)\\ P & \longmapsto & \frac{P}{1}\end{array}$ est linéaire. □

Remarque:
On peut identifier $P\in\mathbb{K}[X]$ avec $\frac{P}{1}\in\mathbb{K}(X)$ i.e. écrire $P=\frac{P}{1}$ et alors $\begin{cases}\mathbb{K}[X] \text{ est un sous-anneau de } \mathbb{K}(X)\\ \mathbb{K}[X] \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{K}(X)\end{cases}$

De plus, les deux définitions de degré coïncident.

**Proposition:** Soit $F, G \in \mathbb{K}(X)$.

1. $\deg(F+G) \leqslant \max(\deg F, \deg G)$
   Si $\deg(F) \neq \deg(G)$ alors $\deg(F+G) = \max(\deg F, \deg G)$ ;
2. $\deg(FG) = \deg(F) + \deg(G)$ ;
3. Si $F \neq 0$, $\deg\left(\frac{1}{F}\right) = -\deg(F)$.

■

**Définition**

## 2 Décomposition en éléments simples

**Lemme:**

$$\forall F \in \mathbb{K}(X), \exists!(E,G) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}(X), \begin{cases} F = E + G \\ \deg(G) < 0 \end{cases}$$

On dit que $E$ est la partie entière de $F$.

■

**Lemme:** Soit $F = \dfrac{P}{AB}$ avec

$$\begin{cases} (P,A,B) \in \mathbb{K}[X]^3; \\ A \neq 0; B \neq 0; \\ A \wedge B = 1; \deg F < 0. \end{cases}$$

Alors,

$$\exists!(U,V) \in \mathbb{K}[X]^2, \begin{cases} F = \dfrac{U}{A} + \dfrac{V}{B} \\ \deg\left(\dfrac{U}{A}\right) < 0 \text{ et } \deg\left(\dfrac{V}{R}\right). \end{cases}$$

■

**Lemme:** Soit $H \in \mathbb{K}[X]$ irréductible, $n \in \mathbb{N}_*$, $P \in \mathbb{K}[X]$, $F = \dfrac{P}{H^n}$ et $\deg F < 0$. Alors,

$$\begin{cases} \exists!(U,V) \in \mathbb{K}[X]^2, F = \dfrac{U}{H^n} + \dfrac{V}{H^{n-1}}; \\ \deg U < \deg H; \\ \deg\left(\dfrac{V}{H^{n+1}}\right) < 0. \end{cases}$$

■

**Théorème** (Théorème de décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}(\mathbf{X})$)**:** Soit $F \in \mathbb{K}(X)$, $F = \dfrac{P}{Q}$ la forme irréductible de $F$. On note $(z_1, \ldots, z_p)$ les racines complexes de $Q$ et $(\mu_1, \ldots, \mu_p)$ leur multiplicité.

Alors,

$$\exists!(E, a_{1,1}, \dots, a_{1,\mu_1}, a_{2,1}, \dots, a_{2,\mu_2}, \dots, a_{p,1}, \dots, a_{p,\mu_p}) \in \mathbb{C}[X] \times \mathbb{C}^{\deg Q},$$
$$F = E + \sum_{i=1}^{p} \left( \sum_{j=1}^{\mu_i} \frac{a_{i,j}}{(X - z_i)^j} \right).$$

■

**Théorème** (Théorème de décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}(X)$)**:** Soit $(P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2$, $P \wedge Q = 1$, $Q$ unitaire, $Q \notin \{0, 1\}$. On pose

$$Q = \prod_{i=1}^{p} (X - a_i)^{\mu_i} \prod_{k=1}^{q} (X^2 + \alpha_k X + \beta_k)^{\nu_k}$$

avec

$$\begin{cases} p \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{N}, \\ (a_1, \dots, a_p) \in \mathbb{R}^p \\ (\alpha_1, \dots, \alpha_q, \beta_1, \dots, \beta_q) \in \mathbb{R}^{2q} \\ (\mu_1, \dots, \mu_p, \nu_1, \dots, \nu_p) \in \mathbb{N}^{p+q} \\ \forall j \in [\![1, q]\!], \alpha_k^2 - 4\beta_k < 0 \end{cases}$$

Alors

$$\begin{aligned} \exists!(E, &\gamma_{1,1}, \dots, \gamma_{1,\mu_1}, \gamma_{2,1}, \dots, \gamma_{2,\mu_2}, \dots, \gamma_{p,1}, \dots, \gamma_{p,\mu_p}, \\ &\delta_{1,1}, \dots, \delta_{1,\nu_1}, \delta_{2,1}, \dots, \delta_{2,\nu_2}, \dots, \delta_{q,1}, \dots, \delta_{q,\nu_q}, \\ &\varepsilon_{1,1}, \dots, \varepsilon_{1,\nu_1}, \varepsilon_{2,1}, \dots, \varepsilon_{2,\nu_2}, \dots, \varepsilon_{q,1}, \dots, \varepsilon_{q,\nu_q}) \\ &\in \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}^{\mu_1 + \dots + \mu_p} \times \mathbb{R}^{2(\nu_1 + \dots + \nu_q)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{P}{Q} = E + &\sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{\mu_i} \frac{\gamma_{i,j}}{(X - a_i)^j} \\ &+ \sum_{k=1}^{q} \sum_{j=1}^{\nu_k} \frac{\delta_{k,j} X + \varepsilon_{k,j}}{(X^2 + \alpha_k X + \beta_k)^j} \end{aligned}$$

□

**Définition:** Soit $F \in \mathbb{C}(X)$. Soient $(P, Q) \in \mathbb{C}[X]^2$ tels que $\begin{cases} P \wedge Q = 1 \\ F = \dfrac{P}{Q} \end{cases}$.

Les racines de $P$ sont appelées <u>zéros de $F$</u>
Les racines de $Q$ sont appelées <u>pôles de $F$</u>

**Proposition:** Soit $F \in \mathbb{C}(X)$ et $z \in \mathbb{C}$ un pôle simple de $F$. Le coefficient devant $\dfrac{1}{X - z}$ dans la décomposition en éléments simples de $F$ est $\dfrac{P(z)}{Q'(z)}$.

■

**Proposition:** Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ avec $\deg(P) \geqslant 1$, $(z_1, \dots, z_p)$ les racines de $P$, $\mu_1, \dots, \mu_p$ leur multiplicité. Alors

$$\frac{P'}{P} = \sum_{i=1}^{p} \frac{\mu_i}{X - z_i}$$

■

Remarque:
Il existe un "truc" pour retenir cette formule :

$$\frac{P'}{P} = \underbrace{\ln(P)'}_{\text{n'existe pas !}} = \left(\ln\left(\alpha \prod_{i=1}^{p} (X - z_i)^{\mu_i}\right)\right)' = \left(\sum_{i=1}^{p} \mu_i \ln(X - z_i)\right)' = \sum_{i=1}^{p} \mu_i \frac{1}{X - z_i}$$

CHAPITRE

21

# MATRICES ET APPLICATIONS LINÉAIRES

## 1 Matrices d'un vecteur

Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n$. Soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de $E$.

**Définition:** Soit $x \in E$. On sait qu'il existe un unique $n$-uplet $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$$

La matrice de $x$ dans la base $\mathscr{B}$ est la colonne

$$\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Remarque:
En général, si $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ sont 2 bases différentes, alors $\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(x) \neq \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}'}(x)$.

## 2 Matrice d'une famille de vecteurs

Soient $E$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n$, $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de $E$, $\mathscr{F} = (u_1, \ldots, u_p)$ une famille de vecteurs de $E$.

**Définition:** La matrice de $\mathscr{F}$ dans la base $\mathscr{B}$ est la matrice $M$ telle que, pour tout $j \in [\![1,p]\!]$, la $j$-ème colonne de $M$ est $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u_j)$.

**Proposition:** Soit $\mathscr{F}$ une famille de vecteurs de $E$.

$$\mathrm{rg}(\mathscr{F}) = \mathrm{rg}\left(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{F})\right)$$

■

**Corollaire:** Soit $\mathscr{F} = (u_1,\dots,u_p) \in E^p$ et $\mathscr{B} = (e_1,\dots,e_n)$ une base de $E$, et $M = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{F})$.

1. $\mathscr{F}$ est libre $\iff \mathrm{rg}(M) = p$
2. $E = \mathrm{Vect}(\mathscr{F}) \iff \mathrm{rg}(M) = n$
3. $\mathscr{F}$ base de $E \iff n = p = \mathrm{rg}(M) \iff M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$
   Dans ce cas,
   $$(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{F}))^{-1} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{F}}(\mathscr{B})$$

■

# 3 Matrices d'une application linéaire

Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$, $\mathscr{B} = (e_1,\dots,e_n)$ une base de $E$ et $\mathscr{C} = (f_1,\dots,f_p)$ une base de $F$.

**Proposition – Définition:** Soit $x \in E$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x)$. Soit $y \in F$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(y)$. On pose $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p,1} & \dots & a_{p,n} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ telle que

$$\forall j \in [\![1,n]\!], \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ \vdots \\ a_{p,j} \end{pmatrix} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}\left(f(e_j)\right)$$

Alors

$$y = f(x) \iff Y = AX$$

On dit que $A$ est la matrice de $f$ dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$. On la note $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$.

■

**Théorème:** Soient $E$ et $F$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, $\mathscr{B} = (e_1,\dots,e_n)$

une base de $E$ et $\mathscr{C} = (f_1, \dots, f_p)$ une base de $F$.

$$\begin{aligned} \Phi : \mathscr{L}(E,F) &\longrightarrow \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K}) \\ f &\longmapsto \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) \end{aligned}$$

$\Phi$ est un $\mathbb{K}$-isomorphisme linéaire.

■

**Corollaire:** Si $E$ et $F$ sont deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, alors

$$\dim\big(\mathscr{L}(E,F)\big) = \dim(E) \times \dim(F)$$

□

**Théorème:** Soient $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}(F,G)$, $\mathscr{B}$ une base de $E$, $\mathscr{C}$ une base de $F$ et $\mathscr{D}$ une base de $G$. Alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{D}}(g \circ f) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{D}}(g) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$$

■

## 4 Formules de changement de bases

**Proposition:** Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n$.
Soient $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$ deux bases de $E$ et $x \in E$. Soit $P = P_{\mathscr{B}_1 \to \mathscr{B}_2} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1}(\mathscr{B}_2)$.
Alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_2}(x) = P^{-1}\,\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1}(x)$$

■

**Proposition:** Soient $E$ et $F$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$ deux bases de $E$, et $\mathscr{C}_1, \mathscr{C}_2$ deux bases de $F$ et $f \in \mathscr{L}(E,F)$.

Soient $\begin{cases} P = P_{\mathscr{B}_1 \to \mathscr{B}_2} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1}(\mathscr{B}_2) \\ Q = P_{\mathscr{C}_1 \to \mathscr{C}_2} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}_1}(\mathscr{C}_2) \\ A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1,\mathscr{C}_1}(f) \end{cases}$ Alors,

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_2,\mathscr{C}_2}(f) = Q^{-1}AP$$

■

**Proposition – Définition:** Soient $(A,B) \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})^2$.
On dit que $A$ et $B$ sont <u>équivalentes</u> si

$$\exists (P,Q) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \times \mathrm{GL}_p(\mathbb{K}), B = Q^{-1}AP$$

Cette relation est une relation d'équivalence. □

**Théorème:** Soit $f \in \mathscr{L}(E)$, $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ deux bases de $E$, $P = P_{\mathscr{B}\to\mathscr{C}} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{C})$, $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ et $B = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(f)$.
Alors
$$B = P^{-1}AP.$$
□

**Définition:** Soit $(A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2$. On dit que $A$ et $B$ sont semblables s'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que
$$B = P^{-1}AP.$$
L'ensemble $\left\{P^{-1}AP \mid P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})\right\}$ est la classe de similitude de $A$.

**Définition:** Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
La trace de $A$ est
$$\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$$

**Proposition:**
1. $\mathrm{tr} \in \mathscr{L}\left(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}), \mathbb{K}\right) = \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^*$
2. $\forall A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$

■

**Proposition:** Soit $(A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2$.
$$A \text{ et } B \text{ semblables } \implies \mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(B)$$
■

Remarque (⚠ Attention):
$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
$\mathrm{tr}(A) = 2 = \mathrm{tr}(B)$
Or, $A$ et $B$ ne sont pas semblables, sinon
$$\begin{aligned} A &= P^{-1}BP \text{ avec } P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{K}) \qquad = P^{-1}I_2P \\ &= P^{-1}P \\ &= I_2 \neq A \end{aligned}$$

**Définition**

**Corollaire:** Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ et $\mathscr{B}$ une base de $E$. $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$. La trace de $f$ est $\mathrm{tr}(A)$.
Ce nombre ne dépend pas de la base $\mathscr{B}$ choisie. On note ce nombre $\mathrm{tr}(f)$. □

**Proposition:** Soit $p$ un projecteur de $E$ de dimension finie. Alors

$$\mathrm{tr}(p) = \mathrm{rg}(p)$$

■

## 5 Conséquences

**Proposition:** La multiplication matricielle est associative.

■

**Proposition:** Soit $(A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2$. On suppose que $AB = I_n$. Alors $(A, B) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})^2$ et $A^{-1} = B$.

■

Remarque:
Au passage, on a montré que

$$f \in \mathrm{GL}(E) \iff \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$$

et, dans ce cas,

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f^{-1}) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)^{-1}$$

**Proposition:** Soit $A \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$.
Le nombre maximal de lignes linéairement indépendantes de $A$ est égal au rang de $A$.

■

**Définition:** Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$.

La transposée de $A$, notée ${}^tA = (b_{j,i})_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ 1 \leqslant i \leqslant p}} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est définie par

$$\forall i \in [\![1, p]\!], \forall j \in [\![1, n]\!], b_{j,i} = a_{i,j}.$$

Les lignes de ${}^tA$ sont les colonnes de $A$. Les colonnes de ${}^tA$ sont les lignes de $A$.

**Corollaire:**

$$\forall A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}({}^tA)$$

□

**Proposition:** $\begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \\ A & \longmapsto & {}^tA \end{array}$ est la symétrie par rapport à $S_n(\mathbb{K})$ parallèlement à $A_n(\mathbb{K})$ où

$$S_n(\mathbb{K}) = \{A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \mid {}^tA = A\} = \begin{pmatrix} \ddots & (u) \\ (u) & \ddots \end{pmatrix}$$

et

$$A_n(\mathbb{K}) = \{A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \mid {}^tA = -A\} = \begin{pmatrix} 0 & & (u) \\ & \ddots & \\ (-u) & & 0 \end{pmatrix}$$

et donc

$$S_n(\mathbb{K}) \oplus A_n(\mathbb{K}) = \mathscr{M}_n(\mathbb{K}).$$

■

**Proposition:** Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.

$${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$$

■

**Corollaire:** Si $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ alors ${}^tA \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et

$$\left({}^tA\right)^{-1} = {}^t\left(A^{-1}\right)$$

■

# 6 Matrices par blocs

**Proposition:** Soient $F$ et $G$ supplémentaires dans $E$ :

$$E = F \oplus G.$$

Soit $f \in \mathscr{L}(F)$ et $g \in \mathscr{L}(G)$. Alors

$$\exists! h \in \mathscr{L}(E) h_{|F} = f,\ h_{|G} = g \text{ et } h = f \circ p + g \circ q$$

où $\begin{cases} p \text{ est la projection sur } F \text{ parallèlement à } G \\ q \text{ est la projection sur } G \text{ parallèlement à } F \end{cases}$.

On a aussi $q = \mathrm{id}_E - p$.

■

**Proposition:** On reprend les notations et hypothèses précédentes. Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une base de $F$, et $(f_1, \dots, f_q)$ une base de $G$. Alors, $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_p, f_1, \dots, f_q)$ est une base de $E$ et

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(h) = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B \end{array}\right)$$

où $\begin{cases} A = \mathrm{Mat}_{(e_1,\dots e_p)}(f) \\ B = \mathrm{Mat}_{(f_1,\dots,f_q)}(g) \end{cases}$ □

**Proposition:** Soient $(A, A') \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2$ et $(B, B') \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})^2$.

1.
$$\left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} A' & 0 \\ \hline 0 & B' \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} AA' & 0 \\ \hline 0 & BB' \end{array}\right)$$

2.
$$\left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B \end{array}\right) \in \mathrm{GL}_{n+p}(\mathbb{K}) \iff \begin{cases} A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \\ B \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K}) \end{cases}$$

et dans ce cas,
$$\left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B \end{array}\right)^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} A^{-1} & 0 \\ \hline 0 & B^{-1} \end{array}\right)$$

3.
$$\mathrm{tr}\left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B \end{array}\right) = \mathrm{tr}\, A + \mathrm{tr}\, B$$

■

**Proposition:** Soient $A, A' \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $B, B' \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $C, C' \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ et $D, D' \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$.

$$\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} A' & B' \\ \hline C' & D' \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} AA' + BC' & AB' + BD' \\ \hline CA' + DC' & CB' + DD' \end{array}\right)$$

Cette formule se généralise à un nombre quelconque de blocs :

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1,n} \\ \hline A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2,n} \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline A_{p,1} & A_{p,2} & \cdots & A_{p,n} \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c|c|c} A'_{11} & A'_{12} & \cdots & A'_{1,n} \\ \hline A'_{21} & A'_{22} & \cdots & A'_{2,n} \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline A'_{p,1} & A'_{p,2} & \cdots & A'_{p,n} \end{array}\right)$$

Cette matrice se calcyle comme on s'y attend si les dimensions des blocs autorisent les produits.

**Proposition:** Le rang d'une matrice $A$, c'est la taille de la plus grande matrice carrée inversible que l'on peut extraire de $A$. □

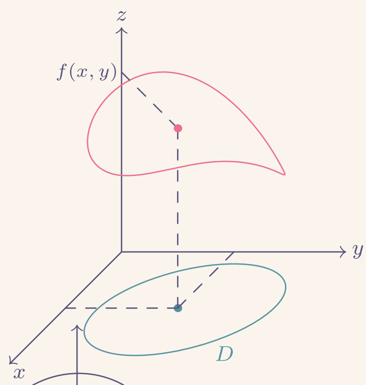
CHAPITRE

# 22

# FONCTIONS DE DEUX VARIABLES

## 1 Quelques généralités

On s'interesse dans ce chapitre à des fonctions définies sur une partie $D$ de $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

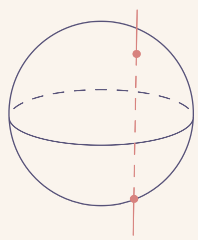


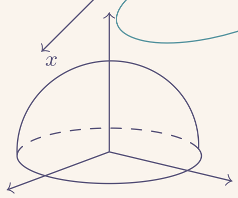

Par exemple,

$$f : (x,y) \mapsto 5xy + \sqrt{x^2+y^2}$$

Une sphère n'est pas la surface représentative d'une fonction. Mais, une demi-sphère oui :

$$f : (x,y) \mapsto \sqrt{1-x^2-y^2}.$$





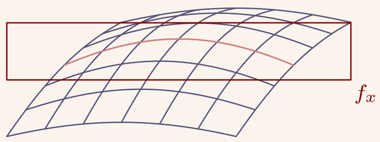
La surface de la demisphère est

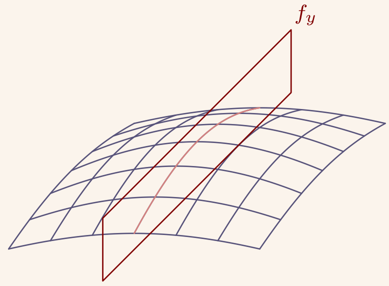
$$S = \{(x,y,f(x,y)) \mid (x,y) \in D_O(1)\}.$$

où $D_O(1)$ est le disque unitaire à l'origine.

### Pointdevuenaïf

Soit $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. On fixe $y$ et on étudie $f_y : x \mapsto f(x,y)$. Ou, on fixe $x$ et on étudie $f_x : y \mapsto f(x,y)$.



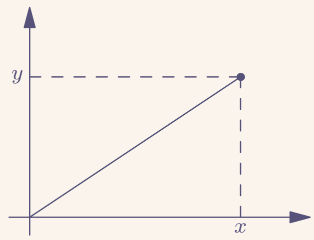

### Lebonpointdevue

On reprend les notions d'une fonction d'une seule variable (limite, continuité, développement limité, ...) que l'on adapte aux fonctions à deux variables.

## 2 Topologie de $\mathbb{R}^2$

**Définition:** La norme (euclidienne) de $\mathbb{R}^2$ est l'application définie par

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2}.$$




**Proposition:** La norme euclidienne vérifie :

1. (séparation)
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \|(x,y)\| = 0 \iff x = y = 0,$$
2. (homogénéité positive)
$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \|\lambda(x,y)\| = |\lambda| \, \|(x,y)\|$$
3. (inégalité triangulaire)
$$\forall (x,y),(a,b) \in \mathbb{R}^2, \|(x,y)+(a,b)\| \leqslant \|(x,y)\| + \|(a,b)\|.$$

■

**Définition:** Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $r \in \mathbb{R}_+$.

La boule ouverte (ou disque ouvert) de centre $(a,b)$ et de rayon $r$ est

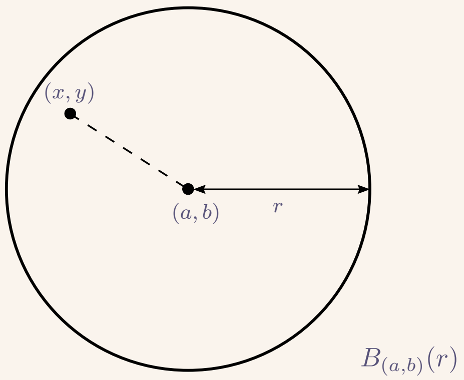
$$B_{(a,b)}(r) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \|(x,y)-(a,b)\| < r\right\}.$$

La <u>boule fermée</u> (ou <u>disque fermé</u>) de centre $(a, b)$ et de rayon $r$ est

$$\overline{B_{(a,b)}}(r) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \|(x, y) - (a, b)\| \leqslant r\right\}.$$

La <u>sphère</u> (ou <u>boule</u>) de centre $(a, b)$ et de rayon $r$ est

$$S_{(a,b)}(r) = \partial\overline{B_{(a,b)}}(r) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \|(x, y) - (a, b)\| = r\right\}.$$

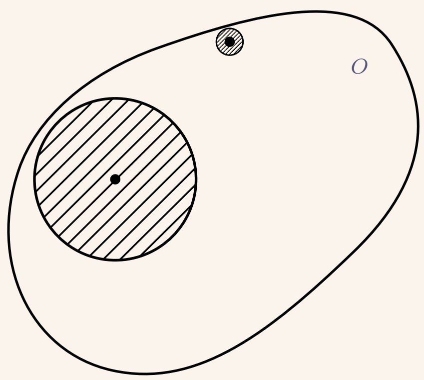



Remarque:
On parle de boule en dimension quelconque.

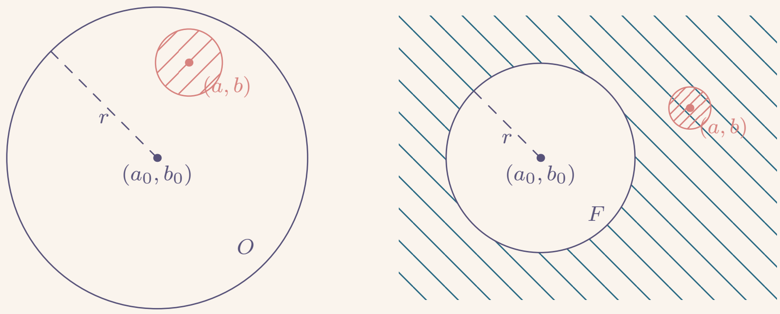
**Définition:** Une <u>partie ouverte</u> $O$ de $\mathbb{R}^2$ (ou <u>un ouvert</u>) si

$$\forall (x, y) \in O, \exists r > 0, B_{(a,b)}(r) \subset O.$$

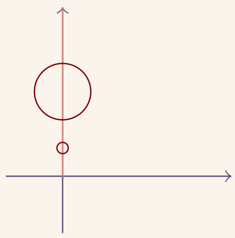
Une partie $F$ est <u>fermée</u> su $\mathbb{R}^2 \setminus F$ est ouverte.



**Proposition:** Une boule ouverte est ouverte. Une boule fermée est fermée.




■



**Définition:** Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $V \in \mathscr{P}(\mathbb{R}^2)$.
On dit que $V$ est un voisinage de $(a, b)$ s'il existe $r > 0$ tel que

$$B_{(a,b)}(r) \subset V.$$

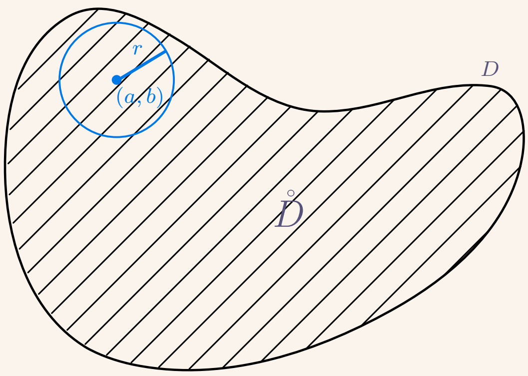
**Proposition:** Un ouvert non vide est un voisinage en chacun de ces points. □

**Définition:** Soit $D \subset \mathbb{R}^2$. Un <u>point intérieur</u> de $D$ est un couple $(a, b) \in D$ tel que

$$\exists r > 0, B_{(a,b)}(r) \subset D.$$

en d'autres termes, si $D$ est un voisinage de $(a, b)$.
On note $\mathring{D}$ l'ensemble des points intérieurs à $D$. C'est <u>l'intérieur</u> de $D$.

**Proposition:** $\mathring{D}$ est le plus grand ouvert $O$ de $\mathbb{R}^2$ tel que $O \subset D$.




■

**Définition:** Soit $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\ell \in \mathbb{R}$, $(a,b) \in \mathring{D}$.

On dit que <u>$f(x,y)$ tend vers $\ell$ quand $(x,y)$ tend vers $(a,b)$</u> ou que $\ell$ est <u>une limite</u> de $f$ en $(a,b)$ si

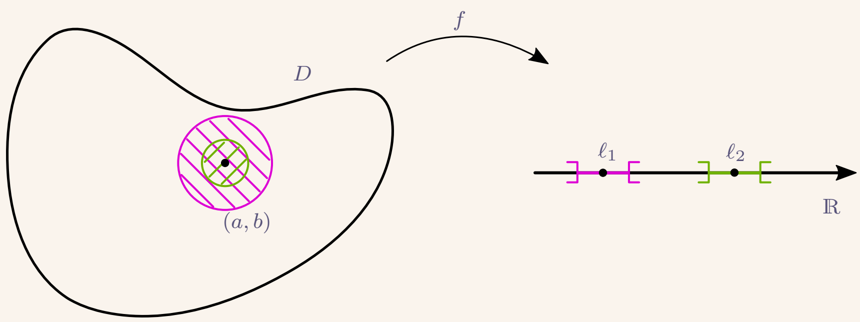
$$\forall \varepsilon > 0, \exists r > 0, \forall (x,y) \in D, \|(x,y)-(a,b)\| < r \implies |f(x,y)-\ell| \leqslant \varepsilon.$$

en d'autres termes si

$$\forall V \in \mathscr{V}_\ell, \exists W \in \mathscr{V}_{(a,b)}, \forall (x,y) \in W \cap D, f(x,y) \in V.$$

**Proposition** (unicité de la limite)**:** Soit $f : D \to \mathbb{R}$, $(a,b) \in \mathring{D}$, $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}$ telles que $\ell_1$ et $\ell_2$ sont des limites de $f$ en $(a,b)$.

Alors $\ell_1 = \ell_2$.



■

**Définition:** Soit $f : D \to \mathbb{R}$, $(a, b) \in \mathring{D}$.

On dit que $f$ est continue en $(a, b)$ si

$$f(x, y) \xrightarrow[(x,y)\to(a,b)]{} f(a, b).$$

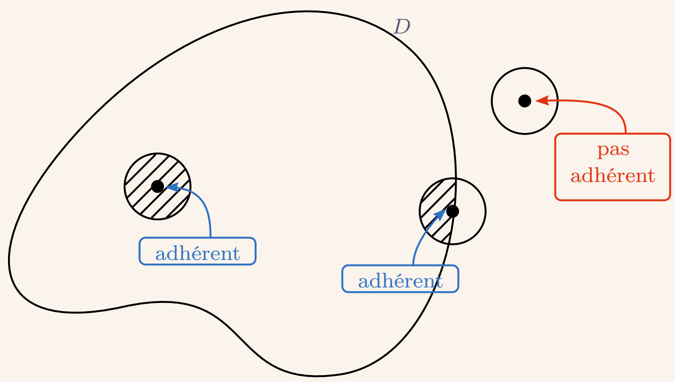
**Proposition:** Si $f(x, y) \xrightarrow[(x,y)\to(a,b)]{} \ell$

alors $\begin{cases} f(x, b) \xrightarrow[x\to a]{} \ell \\ f(a, y) \xrightarrow[y\to b]{} \ell. \end{cases}$

■

Contre-exemple : exercice 3.

**Définition:** Soient $D \subset \mathbb{R}^2$ et $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.




On dit que $(x, y)$ est adhérent à $D$ si

$$\forall r > 0, B_{(x,y)}(r) \cap D \neq \varnothing.$$

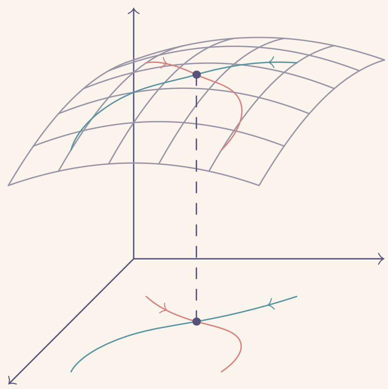
L'ensemble des points adhérents à $D$ est noté $\overline{D}$. On dit que $\overline{D}$ est l'adhérence de $D$.

**Définition:** Soit $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et $(a, b) \in \overline{D}$, $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que $f$ tend vers $\ell$ quand $(x, y)$ tend vers $(a, b)$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists r > 0, \forall (x, y) \in B_{(a,b)}(r) \cap D, |f(x, y) - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

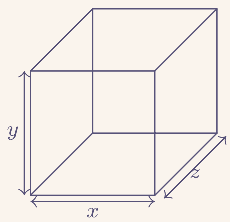
**Proposition:**

1. Dans ce contexte, il y a unicité de la limite
2. La limite d'une somme, d'un produit, d'un quotien, d'une composée se comporte comme dans le cas d'une seule variable.
3. Soit $f : D \to \mathbb{R}$ continue. Soient $g : I \to \mathbb{R}$ et $h : I \to \mathbb{R}$ continues telles que
$$\forall t \in I, \big(g(t), h(t)\big) \in D.$$
Alors
$$t \in I \mapsto f\big(g(t), h(t)\big) \in \mathbb{R}$$
est continue.



## 3 Dérivation

Motivation :




$$S(x, y, z) = 2(xy + xz + yz)$$
$$V(x, y, z) = xyz$$

On cherche à minimiser $S$ avec la contrainte $V = 1$.

Soit $f : \begin{array}{ccl} \left(\mathbb{R}_*^+\right)^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & S\left(x, y, \dfrac{1}{xy}\right) = 2\left(xy + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{x}\right). \end{array}$

On cherche $(a, b) \in \left(\mathbb{R}_*^+\right)^2$ tel que
$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_*^+), f(x, y) \geqslant f(a, b).$$

**Définition:** Soit $f : U \to \mathbb{R}$ où $U$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Soit $(a, b) \in U$.

Si $\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{f(x, b) - f(a, b)}{x - a} \in \mathbb{R}$, alors on dit que $f$ a une dérivée partielle suivant $x$ en $(a, b)$ et cette limite est notée
$$\partial f_1(a, b) = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b).$$

Si $\lim\limits_{y\to b} \dfrac{f(a,y)-f(a,b)}{y-b} \in \mathbb{R}$, alors on dit que $f$ a une dérivée partielle suivant $y$ en $(a,b)$ et la limite est notée

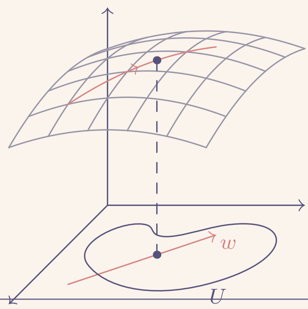
$$\partial f_2(a,b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a,b).$$

**Définition:**
Soit $f : U \to \mathbb{R}$ où $U$ est un ouvert. Soit $(a,b) \in U$. Soit $w = (w_1, w_2) \in \mathbb{R}^2$.
Si

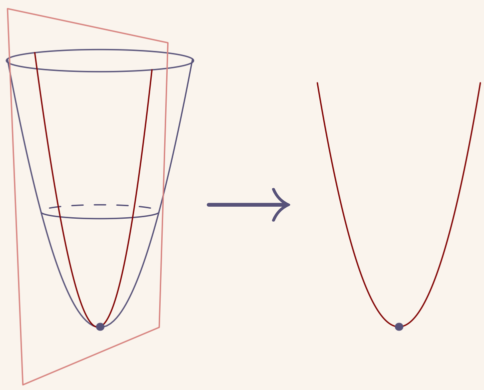
$$\lim_{t\to 0} \frac{f(a+tw_1, b+tw_2) - f(a,b)}{t}$$

existe et est réelle, alors on dit que $f$ a une dérivée dans la direction de $w$ et la limite est notée

$$\mathrm{d}f(w)\,(a,b) = D_w(f)\,(a,b).$$




Remarque:



**Théorème:** Soit $f : U \to \mathbb{R}$, $(a,b) \in U$. On suppose que $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ existent en $(a,b)$ et sont **continues** en $(a,b)$. Alors,

$$\forall (h,k) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } (a+h, b+k) \in U,$$
$$f(a+h,b+k) = f(a,b) + h\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + k\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) + \underset{(h,k)\to(0,0)}{o}\big(\|(h,k)\|\big).$$

On dit que $f$ est de classe $\mathscr{C}^1$ si $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ existent et sont continues.

□

Remarque:

En physique, cette formule correspond à :

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y.$$

En effet :

$$\begin{aligned}\mathrm{d}f &= f(x+\mathrm{d}x, y+\mathrm{d}y) - f(x,y)\\ &= \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

**Proposition:** Soit $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ en $(a,b) \in U$. Alors,

$$\forall w = (w_1, w_2) \in \mathbb{R}^2, \mathrm{d}f(w)\,(a,b) = w_1 \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + w_2 \frac{\partial f}{\partial y}(a,b).$$

■

**Définition:** Avec les hypothèses précédentes, en posant

$$\nabla f(a,b) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a,b), \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\right)$$

on obtient

$$\mathrm{d}f(w)\,(a,b) = \langle w \mid \nabla f(a,b)\rangle$$

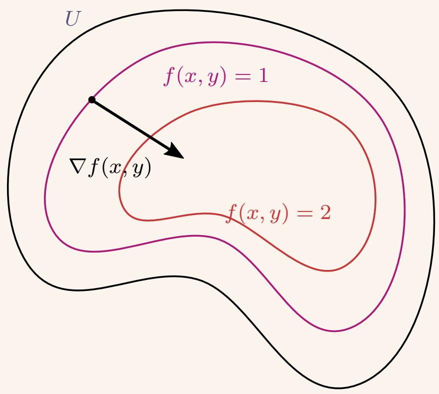
où $\langle\cdot|\cdot\rangle$ est le produit scalaire.

Le vecteur $\nabla f(a,b)$ est appelé gradient de $f$ en $(a,b)$.

Le développement limité à l'ordre 1 de $f$ devient

$$f\big((a,b)+w\big) = f(a,b) + \langle w \mid \nabla f(a,b)\rangle + \underset{w\to 0}{o}(\|w\|)$$

**Proposition:** Soit $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$.



$\nabla f$ est orthogonal au lignes de niveaux de $f$, son orientation va dans le sens d'une augmentation de $f$.

∎

Remarque:

$$\begin{aligned} V : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y,z) &\longmapsto -mgz \end{aligned}$$

l'énerge potentielle de pesenteur

On a donc

$$\nabla V(x,y,z) = \left(\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}\right) = (0,0,-mg) = \vec{P}.$$

**Lemme:** Soit $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$, $\gamma : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & U \\ t & \longmapsto & \big(x(t), y(t)\big) \end{array}$ où $x$ et $y$ sont dérivables.

On pose

$$\forall t \in I, \gamma'(t) = \big(x'(t), y'(t)\big).$$

Alors $f \circ \gamma : I \to \mathbb{R}$ est dérivable et

$$\begin{aligned} \forall t \in I, (f \circ \gamma)'(t) &= \mathrm{d}f\big(\gamma'(t)\big)\big(\gamma(t)\big) \\ &= \big\langle \gamma'(t) \mid \nabla f\big(\gamma(t)\big)\big\rangle \\ &= x'(t)\frac{\partial f}{\partial x}\big(x(t), y(t)\big) + y'(t)\frac{\partial f}{\partial y}\big(x(t), y(t)\big). \end{aligned}$$

∎

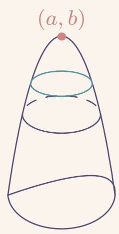
**Définition:** Soit $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ et $(a,b) \in U$. On dit que $(a,b)$ est un point critique de $f$ si $\nabla f(a,b) = 0$ i.e. $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0$.

Dans ce cas, $f(a,b)$ est appelé valeur critique de $f$.

**Proposition:**
Soit $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ et $(a,b) \in U$ tel que

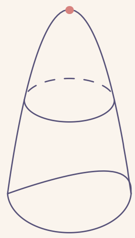
$$\exists r > 0, \forall (x,y) \in B_{(a,b)}(r), f(x,y) \leqslant f(a,b)$$

Alors $\nabla f(a,b) = (0,0)$.

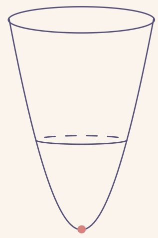



∎

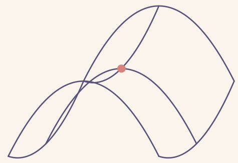
Remarque:
Un minimum local est aussi une valeur critique.



(a) Maximum local



(b) Minimum local



(c) Point de selle / Point col

**Proposition** (règle de la chaîne)**:** Soit $f$ : $\begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & f(x,y) \end{array}$ de classe $\mathscr{C}^1$ et $U, V$ deux ouverts de $\mathbb{R}^2$.

Soit $\varphi : \begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & U \\ (u,v) & \longmapsto & \varphi(u,v) = \big(x(u,v), y(u,v)\big) \end{array}$.

On suppose que $x$ et $y$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $V$.

Alors, $f \circ \varphi : \begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (u,v) & \longmapsto & f\big(\varphi(u,v)\big) \end{array}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et

$$\begin{aligned} \forall (u_0, v_0) \in V, \frac{\partial (f \circ \varphi)}{\partial u}(u_0, v_0) &= \frac{\partial f}{\partial x}\big(\varphi(u_0, v_0)\big) \times \frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0) \\ &+ \frac{\partial f}{\partial y}\big(\varphi(u_0, v_0)\big)\frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \forall (u_0, v_0) \in V, \frac{\partial (f \circ \varphi)}{\partial v}(u_0, v_0) &= \frac{\partial f}{\partial x}\big(\varphi(u_0, v_0)\big) \times \frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0) \\ &+ \frac{\partial f}{\partial y}\big(\varphi(u_0, v_0)\big)\frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0) \end{aligned}$$

Remarque:
Soit $\mathscr{B} = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$, $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ avec $U$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Soit $(x, y) \in U$.

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\big(\nabla f(x,y)\big) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix}$$

Soit

$$\begin{aligned} \varphi : V &\longrightarrow U \\ (u,v) &\longmapsto \big(x(u,v), y(u,v)\big) \end{aligned}$$

avec $x, y$ de classe $\mathscr{C}^1$. Soit $g = f \circ \varphi$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\big(\nabla g(u,v)\big) &= \begin{pmatrix} \dfrac{\partial g}{\partial u}(u,v) \\ \dfrac{\partial g}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u}(u,v)\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \dfrac{\partial y}{\partial u}(u,v)\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) \\ \dfrac{\partial x}{\partial v}(u,v)\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \dfrac{\partial y}{\partial v}(u,v)\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} \\
&= \underbrace{\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u}(u,v) & \dfrac{\partial y}{\partial u}(u,v) \\ \dfrac{\partial x}{\partial v}(u,v) & \dfrac{\partial y}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix}}_{J(u,v)} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} \\
&= J(u,v)\,\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\big(\nabla f(x,y)\big)
\end{aligned}$$

où $J(u,v) = \big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\big(\nabla x(u,v)\big) \vdots \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\big(\nabla y(u,v)\big)\big)$.

On dit que $J(u,v)$ est <u>la jacobienne</u> de $\varphi$ en $(u,v)$. L'application linéaire canoniquement associée à $J(u,v)$ est la <u>différentielle de $\varphi$</u> en $(u,v)$ noté $\mathrm{d}\varphi(u,v)$.

On a $\mathrm{d}\varphi(u,v) \in \mathscr{L}(R^2)$ et $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\big(\mathrm{d}\varphi(u,v)\big) = J(u,v)$.

Par exemple, la jacobienne du changement de coordonnées polaires est

$$J = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial r} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \theta} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -r\sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}.$$

$\underbrace{\det(J)}_{\text{le jacobien}} = r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r$

Dans une intégrale double, si $(x,y) = \varphi(u,v)$, alors $\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \det(J)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$.

Ici,

$$\mathrm{d}x \ \mathrm{d}y = r \ \mathrm{d}r \ \mathrm{d}\theta.$$

■

CHAPITRE

# 23

# DÉNOMBREMENT

## 1 Cardinal d'un ensemble

**Lemme:** Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geqslant 2$, et $X \subsetneq [\![1, n]\!]$ avec $X \neq \varnothing$ ($\subsetneq$ signifie inclus et différent). Alors

$$\exists\, 0 < p < n, \exists f : X \to [\![1, p]\!] \text{ bijective .}$$

■

**Lemme:** Soient $n, p$ deux entiers non-nuls et $f : [\![1, p]\!] \to [\![1, n]\!]$ une surjection. Alors $p \geqslant n$.

■

**Lemme:** Soient $n \geqslant 1$ et $p \geqslant 1$, $f : [\![1, p]\!] \to [\![1, n]\!]$. Alors $p \leqslant n$.

■

**Corollaire:** Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$ et $f : [\![1, n]\!] \to [\![1, p]\!]$ bijective. Alors $n = p$

**Définition:** Soit $X$ un ensemble. On dit que $X$ est <u>fini</u> si $X = \varnothing$ ou s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et une bijection $f : X \to [\![1, n]\!]$.

Soit $X$ un ensemble fini. Le <u>cardinal</u> de $X$ est
- 0 si $X = \varnothing$
- sinon, c'est le seul entier $n \in \mathbb{N}^*$ pour lequel il existe une bijection de $X$ dans $[\![1, n]\!]$.

On le note $\mathrm{Card}(X)$, $\#X$ ou $|X|$.

**Proposition:** Soit $E$ un ensemble fini et $X \in \mathscr{P}(E)$.
Alors $X$ est fini et $\#X \leqslant \#E$.
Si $\#X = \#E$, alors $X = E$.

■

**Proposition:** Soit $E$ un ensemble fini, $(A, B) \in \mathscr{P}(E)^2$ tel que $A \cap B = \varnothing$.
Alors
$$\#(A \cup B) = \#A + \#B.$$

■

**Proposition:** Soient $E$ un ensemble fini, $n \in \mathbb{N}^*$, $(A_1, \ldots, A_n) \in \mathscr{P}(E)^n$ telles que
$$\forall i \neq j, A_i \cap A_j = \varnothing.$$
Alors
$$\#\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \#A_i$$

■

**Proposition:** Soient $E$ un ensemble fini, $(A, B) \in \mathscr{P}(E)^2$. Alors
$$\#(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cap B).$$

■

**Proposition:** Soient $E$ un ensemble fini, $(A, B) \in \mathscr{P}(E)^2$ avec $B \subset A$. Alors
$$\#(A \setminus B) = \#A - \#B.$$

□

**Proposition:** Soient $E$ et $F$ deux ensembles finis et $f : E \to F$.
1. Si $f$ est injective, alors $\#E \leqslant \#F$,
2. Si $f$ est surjective, alors $\#E \geqslant \#F$,
3. Si $f$ est bijective, alors $\#E = \#F$,

■

**Proposition** (principe des tiroirs – pigeonhole principle)**:** Soit $f : E \to F$ telle que $\#E > \#F$. Alors
$$\exists (x, y) \in E^2, \begin{cases} x \neq y, \\ f(x) = f(y) \end{cases}$$

■

**Proposition:** Soit $E \to F$ où $E$ et $F$ sont finis et $\#E = \#F$.

$$f \text{ injective } \iff f \text{ surjective } \iff f \text{ bijective }.$$

■

## 2 Dénombrement

**Proposition:** Soient $E$ et $F$ deux ensembles finis. Alors $E \times F$ est fini et

$$\#(E \times F) = \#E \times \#F.$$

■

**Proposition:** Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $E_1, \ldots, E_n$ des ensembles finis. Alors $\prod_{i=1}^{n} E_i$ est fini et

$$\#\left(\prod_{i=1}^{n} E_i\right) = \prod_{i=1}^{n}(\#E_i).$$

■

**Corollaire:** Soit $E$ un ensemble fini de cardinal $n$ et $p \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$\#(E^p) = n^p.$$

En d'autres termes, il y a $n^p$ <u>p-listes</u> de $E$, où une $p$-lise de $E$ est un $(x_1, \ldots, x_p)$ de $E^p$.

**Définition:** Soit $E$ un ensemble fini et $p \in \mathbb{N}^*$. Un <u>$p$-arrangement</u> de $E$ est une $p$-liste de $E$ d'éléments deux à deux distincts :

$$(x_1, \ldots, x_p) \in E^p \text{ est un } p\text{-arrangement} \iff \forall i \neq j, x_i \neq x_j.$$

**Proposition:** Soit $E$ un ensemble fini de cardinal $n$ et $p \in \mathbb{N}^*$. Il y a exactement $\dfrac{n!}{(n-p)!}$ $p$-arrangements si $p \leqslant n$ et $0$ si $p > n$.

■

Dans la preuve précédente, on a utilisé principe des bergers :

**Lemme** (principe des bergers)**:** Soit $f : E \to F$ surjective telle que

$$\exists k, \forall y \in F, \#\big(f^{-1}(\{-1\})\big) = k$$

En d'autres termes, tous les éléments de $F$ ont le même nombre d'antécédants.

Si $F$ est fini, alors
$$\#E = k\,\#F.$$

**Proposition:** Soit $E$ un ensemble fini de cardinal $n$. Il y a $n!$ permutations de $E$.

**Définition:** Soit $E$ un ensemble fini et $p \in \mathbb{N}^*$. Une <u>$p$-combinaison</u> de $E$ est une partie de $E$ de cardinal $p$.

**Proposition:** Soit $E$ fini de cardinal $n$ et $p \in \mathbb{N}^*$. Il y a exactement $\binom{n}{p}$ parties de $E$ de cardinal $p$.

**Corollaire:**
$$\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2, \binom{n}{p} \in \mathbb{N}.$$

**Proposition:** Soit $E$ et $F$ deux ensembles finis. Alors $F^E$ est fini et
$$\#(F^E) = (\#F)^{\#E}.$$

**Proposition:** Soit $E$ fini de cardinal $n$. Alors $\#\mathscr{P}(E) = 2^n$.

## 3 Preuves combinatoires

**Proposition:**
$$\forall k \leqslant n \in \mathbb{N}, \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

**Proposition:**
$$\forall k \leqslant n, \quad \binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}.$$

**Proposition:** Soit $(A, +, \times)$ un anneau, $(a, b) \in A^2$ tel que $a \times b = b \times a$. Alors

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

■

CHAPITRE

# 24

# GROUPE SYMÉTRIQUE

**Définition:** Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Le groupe symétrique est noté $S_n$ : l'ensemble des permutations de $[\![1, n]\!]$ muni de $\circ$.

$$\# S_n = n!$$

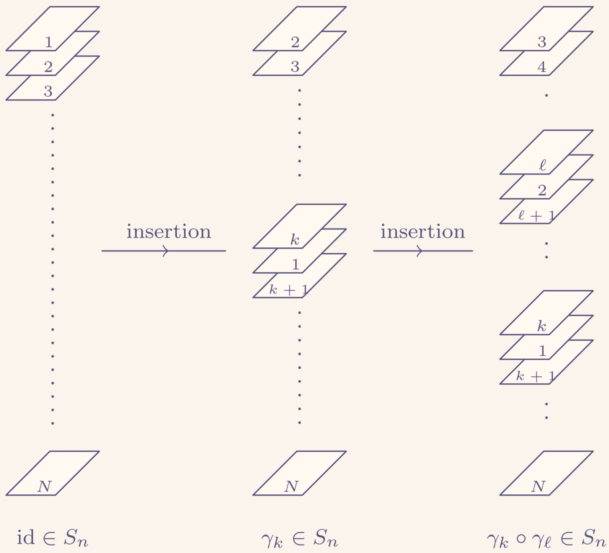
## 1 Mise en situation

### Bon mélange d'un jeu de cartes :

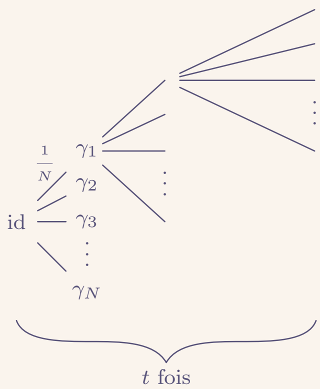
Soit un jeu neuf de $N$ cartes. On procède à un mélange par insertion : on place la carte qui est au-dessus n'importe où dans le paquet, étape que l'on répète $t$ fois.

*Pour quelles valeurs de $t$ obtient-on un jeu bien mélangé ?*

Modélisation : On numérote les cartes de 1 à $N$ dans l'ordre initial du jeu.




On peut modéliser par un arbre le mélange dont les nœuds sont des permutations des éléments de $S_N$.




On dit que le jeu est bien mélangé après $t$ insertions si chaque élément de $S_N$ est une <u>feuille</u> de cet arbre et la probabilité d'obtenir cette permutation est $\frac{1}{N!}$.

Avec $N = 4$, on a

$$\gamma_1 = \mathrm{id} \qquad \gamma_2 = \begin{matrix}1\\2\\3\\4\end{matrix} \to \begin{matrix}2\\1\\3\\4\end{matrix}$$

$$\gamma_3 = \begin{matrix}1\\2\\3\\4\end{matrix} \to \begin{matrix}3\\1\\2\\4\end{matrix} \qquad \gamma_4 = \begin{matrix}1\\2\\3\\4\end{matrix} \to \begin{matrix}4\\1\\2\\3\end{matrix}.$$

Avec $k = 2$ et $\ell = 1$,

$$\begin{matrix}1\\2\\3\\4\end{matrix} \xrightarrow{\gamma_2 \circ} \underbrace{\begin{matrix}2\\1\\3\\4\end{matrix}}_{\gamma_2} \xrightarrow{\gamma_1 \circ} \underbrace{\begin{matrix}2\\1\\3\\4\end{matrix}}_{\gamma_2}$$

Avec $k = 2$ et $\ell = 2$, on a

$$\begin{matrix}1\\2\\3\\4\end{matrix} \to \begin{matrix}2\\1\\3\\4\end{matrix} \to \begin{matrix}1\\2\\3\\4\end{matrix}.$$

Et avec $k = 2$ et $\ell = 3$, on a

$$\begin{matrix}1\\2\\3\\4\end{matrix} \to \begin{matrix}2\\1\\3\\4\end{matrix} \to \begin{matrix}1\\3\\2\\4\end{matrix}.$$

$$\gamma_2 \circ \gamma_3 : \begin{matrix}1 \mapsto 1\\2 \mapsto 3\\3 \mapsto 2\\4 \mapsto 4\end{matrix}$$

*Est-ce-que toute permutation peut s'écrire comme un produit des $\gamma_k$ avec $k \in [\![1, N]\!]$ ?*

## 2 Cycles

Remarque (Notation):
Soit $\sigma \in S_n$.

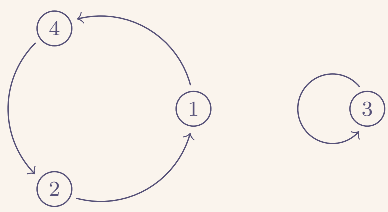
$$\begin{aligned}\sigma : [\![1, N]\!] &\longrightarrow [\![1, N]\!]\\ i &\longmapsto \begin{cases} * & \text{si } i = 1\\ * & \text{si } i = 2\\ & \vdots\\ * & \text{si } i = N.\end{cases}\end{aligned}$$

On écrit plutôt

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & N\\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \cdots & \sigma(N)\end{pmatrix}$$

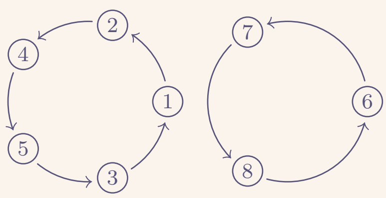
Remarque:
Avec $N = 4$ et

$$\sigma = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 4 & 1 & 3 & 2\end{pmatrix}$$




Avec $N = 8$ et

$$\sigma = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8\\ 2 & 4 & 1 & 5 & 3 & 7 & 8 & 6\end{pmatrix}$$



**Définition:** Soit $\sigma \in S_N$ et $x \in [\![1, N]\!]$.

L'orbite de $x$ pour $\sigma$ est

$$\{x, \sigma(x), \sigma^2(x), \dots\} = \{\sigma^i(x) \mid i \in \mathbb{N}\}.$$

On note l'ordre $d$ de $\sigma$ : si $\sigma \neq \mathrm{id}$, $\begin{cases} \sigma^d = \mathrm{id}, \\ \sigma^{d-1} \neq \mathrm{id}\,. \end{cases}$ L'orbite de $x$ est

$$\{x, \sigma(x), \dots, \sigma^{d-1}(x)\}.$$

Les orbites de $\sigma$ partitionnent $[\![1, N]\!]$.

**Définition:** Soit $\gamma \in S_N$. On dit que $\gamma$ est un $k$-cycle si $\gamma$ a $N-k$ points fixes et les $k$ autres éléments sont dans une même orbite.

Remarque (Notation):
Soit $\gamma$ un $k$-cycle tel que $\gamma(x) \neq x$. On note

$$\gamma = \begin{pmatrix} x & \gamma(x) & \gamma^2(x) & \cdots & \gamma^{k-1}(x) \end{pmatrix}.$$

**Définition:** Soit $\sigma \in S_n$. Le support de $\sigma$ est

$$\mathrm{Supp}(\sigma) = \{x \in [\![1, n]\!] \mid \sigma(x) \neq x\}.$$

**Théorème:** Toute permutation de $S_n$ est une composée de cycles à supports disjoints et ces cycles sont uniques.

■

**Proposition:** Soit $\gamma$ un $k$-cycle.

Alors l'ordre de $\gamma$ est $k$ :

$$\begin{cases} \gamma^k = \mathrm{id} \\ \forall \ell \in [\![1, k-1]\!]\,, \gamma^\ell \neq \mathrm{id} \end{cases}$$

■

**Proposition:** Soit $\gamma = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_k \end{pmatrix}$ un $k$-cycle et $\sigma \in S_n$. Alors

$$\sigma\gamma\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} \sigma(a_1) & \cdots & \sigma(a_k) \end{pmatrix}$$

est un $k$-cycle.

■

## 3 Transpositions

**Définition:** Une transposition est un cycle de longueur 2 : $\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$ avec $a \neq b$.

**Théorème:** Toute permutation se décompose en produit de transpositions.

■

## 4 Signature d'une permutation

**Définition:** Soit $\sigma \in S_n$.

Un inversion de $\sigma$ est $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ tel que $i < j$ et $\sigma(i) > \sigma(j)$.

La signature de $\sigma$, notée $\varepsilon(\sigma)$ vaut $(-1)^k$ où $k$ est le nombre d'inversions de $\sigma$.

**Proposition:** Soit $\tau$ un transposition. Alors $\varepsilon(\tau) = -1$.

■

**Théorème:** $\varepsilon : (S_n, \circ) \to \big(\{-1, 1\}, \times\big)$ est un morphisme de groupes.

■

**Définition:** On dit qu'une permutation $\sigma$ est paire si $\varepsilon(\sigma) = 1$, impaire si $\varepsilon(\sigma) = -1$.

**Proposition – Définition:** On note

$$A_n = \{\sigma \in S_n \mid \varepsilon(\sigma) = 1\}.$$

C'est un sous-groupe de $S_n$ : on l'appelle groupe alterné.

■

Remarque:
$\#A_n = \dfrac{n!}{2}$. En effet :

$$\begin{aligned} A_n &\longrightarrow \{\sigma \in S_n \mid \varepsilon(\sigma) = 1\} \\ \sigma &\longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \sigma \end{aligned}$$

est une bijection.

CHAPITRE

# 25

# SÉRIES NUMÉRIQUES

## 1 Défintions et premières propriétés

**Définition:** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. La suite des sommes partielles associée à $(u_n)$ est

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

Étudier la série des $(u_n)$, c'est étudier la convergence de la suite $(S_n)$.

On dit que la série $\sum u_n$ converge si $(S_n)$ converge. Dans ce cas, $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ est notée $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ et on l'appelle la somme de la série, et la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$$

est appelée suite des restes partiels.

**Proposition:** Soit $(v_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.
La série $\sum(v_{n+1} - v_n)$ converge si et seulement si $(v_n)$.

■

**Proposition:** Soit $\sum u_n$ une série.
SI $\sum u_n$ converge ALORS $u_n \longrightarrow 0$.

Remarque:
La réciproque est Fausse.

■

Remarque:
Avec les notations précédentes, si $u_n \not\longrightarrow 0$, alors $\sum u_n$ diverge. On dit qu'elle diverge grossièrement.

## 2 Séries à termes positifs

**Proposition:** Soit $(u_n) \in \left(\mathbb{R}^+\right)^{\mathbb{N}}$. Alors $\left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

■

**Théorème:** Soient $u$ et $v$ deux suites réelles telles que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \boxed{0 \leqslant u_n} \leqslant v_n.$$

1. Si $\sum v_n$ converge, Alors $\sum u_n$ converge
2. Si $\sum u_n$ diverge, Alors $\sum v_n$ diverge.

■

**Corollaire:** Soient $u, v$ deux suites réelles POSITIVES telles que $u = O(v)$.

1. Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge.
2. Si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge.

□

**Théorème:** Soient $u$ et $v$ deux suites réelles POSITIVES telles que $u = o(v)$.

1. Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge.
2. Si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge.

□

**Théorème** (règle des équivalents)**:** Soient $u$ et $v$ deux suites réelles POSITIVES telles que $u \sim v$. Alors

$$\sum u_n \text{ converge} \iff \sum v_n \text{ converge}.$$

■

## 3 Comparaison avec une intégrale

**Théorème:** Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\sum \frac{1}{n^\alpha} \text{ converge } \iff \alpha > 1$$

Dans ce cas, on note

$$\zeta(\alpha) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}.$$

■

**Théorème:** Soit $f : [a, +\infty[ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ continue, décroissante de limite nulle, avec $a \in \mathbb{N}$. Alors,

$$\sum_{n \geqslant a} f(n) \text{ converge } \iff \left( \int_a^n f(x) \, \mathrm{d}x \right)_n \text{ converge.}$$

■

## 4 Opérations sur les séries

**Proposition:** L'ensemble $E = \{u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \mid \sum u_n \text{ converge}\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et

$$\begin{aligned} S : E &\longrightarrow \mathbb{C} \\ u &\longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \end{aligned}$$

est une forme linéaire. □

Remarque:
La somme d'une série convergente et d'une série divergente diverge. Le produit d'une série divergente par un scalaire non nul diverge.

## 5 Séries absolument convergente

**Théorème:** Soit $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Si $\sum |u_n|$ converge, ALORS $\sum u_n$ converge.

Remarque:
La réciproque est FAUSSE. On a vu en exercice que la série harmonique alternée $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ converge vers $\ln 2$, alors que $\sum \frac{1}{n}$ diverge. ■

**Définition:** Soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On dit que $\sum u_n$ converge absolument si $\sum |u_n|$ converge.

On dit que $\sum u_n$ est semi-convergente si

$$\begin{cases} \sum u_n \text{ converge,} \\ \sum |u_n| \text{ diverge.} \end{cases}$$

**Corollaire:** Soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $v \in \left(\mathbb{R}^+\right)^{\mathbb{N}}$ telles que $u = O(v)$.
Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge absolument. □

# 6 Séries alternées

**Théorème:** Soit $u \in \left(\mathbb{R}^+\right)^{\mathbb{N}}$ décroissante de limite nulle. Alors $\sum (-1)^n u_n$ converge.

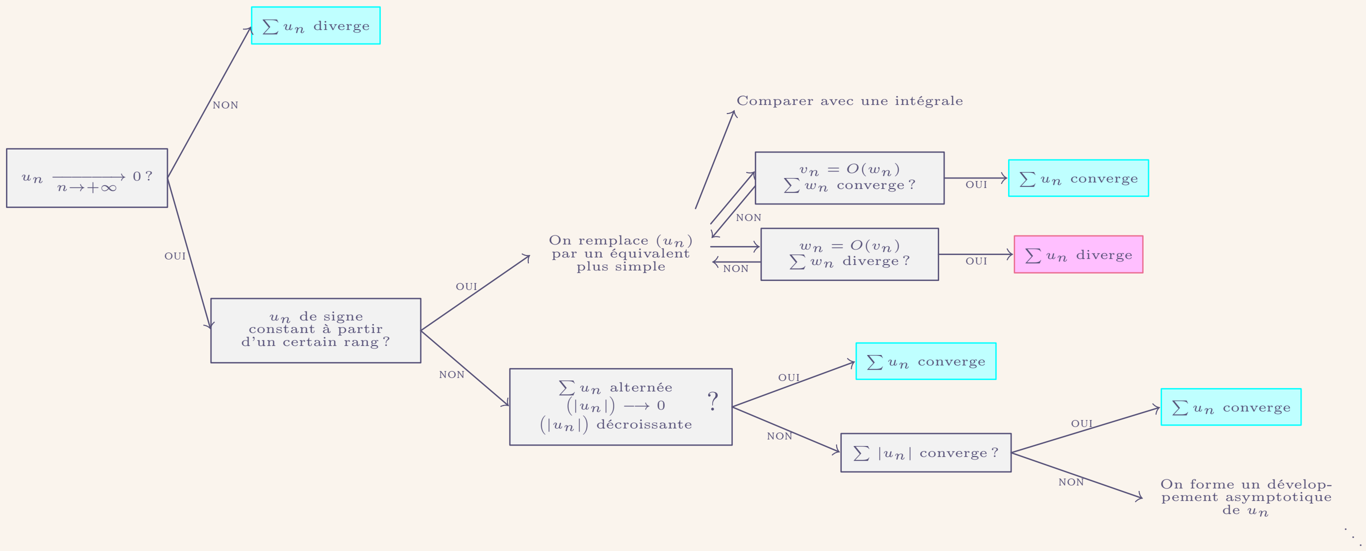
■

**Proposition:** Soit $u$ une suite de signe constant telle que $\left(|u_n|\right)_n$ est décroissante de limite nulle. Alors, $\sum (-1)^n u_n$ converge et

$$\forall n \in \mathbb{N}, R_n \text{ est du signe de } (-1)^{n+1} u_{n+1} \ \text{ et } \ |R_n| \leqslant |u_n|$$

□

# 7 Résumé et exemples



$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ ?
NON
$\sum u_n$ diverge
OUI
$u_n$ de signe constant à partir d'un certain rang ?
OUI
On remplace $(u_n)$ par un équivalent plus simple
Comparer avec une intégrale
$v_n = O(w_n)$
$\sum w_n$ converge ?
OUI
$\sum u_n$ converge
NON
$w_n = O(v_n)$
$\sum w_n$ diverge ?
OUI
$\sum u_n$ diverge
NON
NON
$\sum u_n$ alternée
$(|u_n|) \longrightarrow 0$
$(|u_n|)$ décroissante
?
OUI
$\sum u_n$ converge
NON
$\sum |u_n|$ converge ?
OUI
$\sum u_n$ converge
NON
On forme un dévelop-pement asymptotique de $u_n$

# 8 Applications

## 8.1 Formule de Stirling

**Proposition:** On a :

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n ?.$$

■

## 8.2 Développement décimal

**Proposition:** Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\begin{cases} a_0 \in \mathbb{Z}, \\ \forall n \geqslant 1, a_n \in [\![0,9]\!] \end{cases}$$

La série $\sum \dfrac{a_n}{10^n}$ converge.

■

**Définition:** Soit $x \in \mathbb{R}$. On dit que $x$ admet un <u>développement décimal</u> si

$$\exists a_0 \in \mathbb{Z}, (a_n)_{n\geqslant 1} \in [\![0,9]\!]^N, x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{10^n}.$$

**Théorème:** Tou réel $x \in [0,1[$ admet un développement décimal :

$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lfloor 10^n x \rfloor - 10\lfloor 10^{n-1}x \rfloor}{10^n}$$

■

**Théorème:** Soit $x \in ]0,1[$.

1. Si $x$ n'est pas décimal (i.e. on ne peut pas l'écrire comme $p/10^n$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$), alors $x$ a un unique développement décimal.
2. Si $x$ est décimal, alors $x$ a exactement 2 développements décimaux :
   — il y en a un où, à partir d'un certain rang, tous les chiffres sont nuls,
   — et un autre où tous les chiffres sont égaux à 9 à parir d'un certain rang.

■

Remarque:
Avec $x = 0{,}54\underline{54}\dots$, $100x = 54{,}54\underline{54}\dots = 54 + x$. On a donc $x = \dfrac{54}{99}$.

Avec $x = 0{,}987\,123\,\underline{123}\ldots$, on a

$$\begin{aligned} x &= \frac{987}{1000} + 0{,}000\,\underline{123}\ldots \\ &= \frac{987}{1000} + \frac{1}{10^3}\underbrace{(0{,}\underline{123}\ldots)}_{y} \end{aligned}$$

On a $1000y = 123 + y$ et donc $y = \dfrac{123}{999}$ et donc $x = \dfrac{987 + \frac{123}{999}}{1000}$.

## 8.3 Exponentielle

**Proposition:**

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$$

■

**Proposition:**

$$\forall z \in \mathbb{C}, \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z$$

□

CHAPITRE

# 26

# DÉTERMINANT

## 1 Motivation

Soit $E$ un espace vectoriel de dimension $n$, $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de $E$.

Soit $\mathscr{C} = (u_1, \dots, u_n)$ une famille de $E$. On souhaite trouver un “calcul” sur les coordonées des vecteurs de $\mathscr{C}$ qui nous dira si $\mathscr{C}$ est un base ou non de $E$.

Remarque:

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{C}) = \begin{pmatrix} x & x' \\ y & y' \end{pmatrix}$$

## 2 Définitions

**Définition:** Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n < +\infty$ et $f : E^n \longrightarrow \mathbb{K}$. On dit que $f$ est <u>multilinéaire</u> si

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \forall (u_1, \dots, u_{i-1}, u_{i+1}, \dots, u_n) \in E^{n-1},$$

$$\text{l'application } \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ u & \longmapsto & f(u_1, \dots, u_{i-1}, u, u_{i+1}, \dots, u_n) \end{array} \text{ est linéaire.}$$

On dit que $f$ est <u>antisymétrique</u> si

$$\begin{gathered} \forall i < j, \forall (u_1, \dots, u_n) \in E^n, \\ f(u_1, \dots, u_{i-1}, u_j, u_{i+1}, \dots, u_{j-1}, u_i, u_{j+1}, \dots, u_n) \\ = -f(u_1, \dots, u_{i-1}, u_i, u_{i+1}, \dots, u_{j-1}, u_j, u_{j+1}, \dots, u_n). \end{gathered}$$

On dit que $f$ est <u>alternée</u> si

$$\forall (u_1, \dots, u_n) \in E^n, \big(\exists i < j, u_i = u_j \implies f(u_1, \dots, u_n) = 0\big).$$

**Proposition:** Soit $\mathbb{K}$ un corps tel que $1+1 \neq 0$, $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n$ et $f : E^n \to \mathbb{K}$ une forme multilinéaire.

Alors,

$$f \text{ alternée} \iff f \text{ antisymétrique.}$$

■

Dans le reste du chapitre, $\mathbb{K}$ est un corps avec $1+1 \neq 0$.

**Théorème:** Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n$. L'ensemble des formes multilinéaires alternées de $E$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{(E^n)}$ de dimension 1.

■

**Définition:** Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n$ et $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de $E$.

Il existe une unique forme $f$ multilinéaire alternée sur $E$ telle que $f(e_1, \dots, e_n) = 1$. Elle est donnée par la formule

$$\forall (u_1, \dots, u_n) \in E^n, f(u_1, \dots, u_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} a_{\sigma(j),j}$$

où

$$\forall i, j,\ a_{i,j} \text{ est la } i\text{-ème coordonnée de } u_j \text{ dans la base } \mathscr{B}.$$

Cette application est appelée <u>déterminant dans la base $\mathscr{B}$</u> et noté $\det_{\mathscr{B}}$.

**Proposition:** Soient $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathscr{C} = (u_1, \dots, u_n)$ deux bases de $E$. Alors

$$\det_{\mathscr{C}} = \det_{\mathscr{C}}(e_1, \dots, e_n)\ \det_{\mathscr{B}}$$

i.e.

$$\forall (v_1, \dots, v_n) \in E^n, \det_{\mathscr{C}}(v_1, \dots, v_n) = \det_{\mathscr{C}}(e_1, \dots, e_n)\ \det_{\mathscr{B}}(v_1, \dots, v_n).$$

■

Remarque (notation):
Avec les notations précédentes, on note $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{C})$ au lieu de $\det_{\mathscr{B}}(u_1, \dots, u_n)$.

**Corollaire:** Avec les notations précédentes, $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{C}) \neq 0$ et

$$\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{C}) = (\det_{\mathscr{C}}(\mathscr{B}))^{-1}$$

■

**Théorème:** Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de $E$, $\mathscr{C} = (u_1, \dots, u_n)$ une famille liée (i.e. $\mathscr{C}$ n'est pas libre). Alors $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{C}) = 0$.

■

## 3 Déterminant d'un endomorphisme

**Proposition:** Soit $f \in \mathscr{L}(E)$, $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de $E$. Alors,

$$\exists! \lambda \in \mathbb{K},\ \forall (u_1, \ldots, u_n) \in E,\ \det_{\mathscr{B}}\big(f(u_1), \ldots, f(u_n)\big) = \lambda \det_{\mathscr{B}}(u_1, \ldots, u_n).$$

■

**Proposition:** Soit $f \in \mathscr{L}(E)$, $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ deux bases de $E$. Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ tel que

$$\forall (u_1, \ldots, u_n) \in E^n, \begin{cases} \det_{\mathscr{B}}\big(f(u_1), \ldots, f(u_n)\big) = \lambda \det_{\mathscr{B}}(u_1, \ldots, u_n), \\ \det_{\mathscr{C}}\big(f(u_1), \ldots, f(u_n)\big) = \mu \det_{\mathscr{C}}(u_1, \ldots, u_n). \end{cases}$$

Alors, $\lambda = \mu$.

■

**Définition:** Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Le <u>déterminant</u> de $f$ est le seul scalaire vérifiant,

$$\forall \mathscr{B} \text{ base de } E,\ \forall (u_1, \ldots, u_n), \det_{\mathscr{B}}\big(f(u_1),\ \ldots,\ f(u_n)\big) = \lambda \det_{\mathscr{B}}(u_1, \ldots, u_n)$$

et on le note $\lambda = \det(f)$.

Remarque:
Si $n = 2$,

$$\mathrm{Aire}\big(f(u_1), f(u_2)\big) = \det(f)\,\mathrm{Aire}(u_1, u_2).$$

**Proposition:** Soient $f$ et $g$ deux endomorphismes de $E$. Alors,

$$\det(f \circ g) = \det f \times \det g.$$

■

**Corollaire:** Si $f \in \mathrm{GL}(E)$, alors $\det(f) \neq 0$ et $\det(f^{-1}) = \det(f)^{-1}$.

■

**Proposition:** Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. On suppose $f \notin \mathrm{GL}(E)$. Alors $\det(f) = 0$.

■

## 4 Déterminant d'une matrice carrée

**Définition:** Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Le déterminant de $A$ est

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} a_{\sigma(j),j}$$

**Proposition:** Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n$, $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de $E$, $(u_1, \ldots, u_n) \in E^n$ et $A = \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(u_1, \ldots, u_n)$.

Alors,

$$\det_{\mathscr{B}}(u_1, \ldots, u_n) = \det(A).$$

**Proposition:** Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n$, $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de $E$, $f \in \mathscr{L}(E)$ et $A = \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$. Alors, $\det(A) = \det(f)$.

■

**Proposition:** Soit $(A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2$.

$$\det(AB) = \det(A)\det(B).$$

■

**Proposition:** Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

$$A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \iff \det(A) \neq 0$$

Dans ce cas, $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$. □

**Proposition:**

$$\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}), \det({}^tA) = \det(A).$$

■

**Proposition:** Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $C$ une opération sur les colonnes et $A'$ la matrice obtenue en appliquant $C$ sur les colonnes $A$.

1. Si $C = c_i \longleftrightarrow c_j$ (avec $i \neq j$), alors $\det(A') = -\det(A)$.
2. Si $C = c_i \longleftrightarrow \lambda c_i$, alors $\det(A') = \lambda \det(A)$.
3. Si $C = c_i \longleftrightarrow c_i + \lambda c_j$ (avec $i \neq j$), alors $\det(A') = \det(A)$.

■

**Corollaire:** Le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit de ses coefficients diagonaux.

■

**Proposition:** Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $L$ une opération sur les lignes, $A'$ la matrice obtenue en appliquant $L$ sur les lignes de $A$.

1. Si $L = \ell_i \longleftrightarrow \ell_j$ (avec $i \neq j$), $\det(A') = -\det(A)$.
2. Si $L = \ell_i \longleftrightarrow \lambda\ell_i$, $\det(A') = \lambda\det(A)$.
3. Si $L = \ell_i \longleftrightarrow \ell_i + \lambda\ell_j$ (avec $i \neq j$), $\det(A') = \det(A)$.

□

# 5 Développement suivant une ligne ou une colonne

**Proposition** (Laplace)**:** Soit $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

$$\forall j \in [\![1, n]\!]\,,\ \det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} m_{i,j}$$

où $m_{i,j}$ est le <u>mineur</u> d'indices $(i, j)$, i.e. le déterminant de la matrice obtenue en supprimant la ligne $i$ et la colonne $j$ de la matrice $A$.

$$\forall i \in [\![1, n]\!]\,,\ \det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} m_{i,j}.$$

□

**Proposition** (Vandermonde)**:** Soient $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$.

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{j<i} (a_j - a_i)$$

■

**Proposition – Définition:** Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, et $\mathrm{com}(A)$ la <u>comatrice</u> de $A$ : c'est la matrice

$$\left((-1)^{i+j}\ m_{i,j}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$$

où $m_{i,j}$ est le mineur d'indices $(i, j)$ de $A$.

On a

$$A\ {}^t\mathrm{com}(A) = {}^t\mathrm{com}(A)\ A = \det(A)\ I_n.$$

Si $\det A \neq 0$, alors

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\ {}^t\mathrm{com}(A).$$

■

Remarque:
En pratique, on n'utilise jamais cette formule pour trouver $A^{-1}$ (sauf si $n=2$).

Retour sur la diagonalisation

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On cherche $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que

$$P\ A\ P^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^n)$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = A$ où $\mathscr{B}$ est la base canonique de $\mathbb{K}^n$. On cherche $\mathscr{C} = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{K}^n$ telle que

$$\exists \lambda_i, f(u_i) = \lambda_i u_i$$

$$\begin{aligned}
& \exists \lambda \in \mathbb{K},\ \exists u \neq 0,\ f(u) = \lambda u \\
\iff & \exists \lambda \in \mathbb{K},\ \exists u \neq 0,\ u \in \mathrm{Ker}(f - \lambda\,\mathrm{id}_{\mathbb{K}^n}) \\
\iff & \exists \lambda \in \mathbb{K},\ f - \lambda\,\mathrm{id}_{\mathbb{K}^n} \text{ n'est pas injective} \\
\iff & \exists \lambda \in \mathbb{K},\ f - \lambda\,\mathrm{id}_{\mathbb{K}^n} \notin \mathrm{GL}(\mathbb{K}^n) \\
\iff & \exists \lambda \in \mathbb{K},\ \det(\lambda - \mathrm{id}_{\mathbb{K}^n}) = 0 \\
\iff & \exists \lambda \in \mathbb{K},\ \underbrace{\det(A - \lambda I_n)}_{\text{polynôme caractéristique de } A} = 0
\end{aligned}$$

CHAPITRE

# 27 ESPACE PROBABILISÉ FINI

## 1 Définitions

**Définition:** Soit $\Omega$ un ensemble fini. Une probabilité sur $\Omega$ est une application

$$P : \mathscr{P}(\Omega) \longrightarrow [0,1]$$

telle que

1. $P(\Omega) = 1$,
2. $\forall A, B \in \mathscr{P}(W),\ A \cap B = \varnothing \implies P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Dans ce cas, on dit que $(\Omega, P)$ est un espace probabilisé.

**Définition:** Soit $(\Omega, P)$ un espace probabilisé.

L'ensemble $\Omega$ est appelé univers, les singletons $\{\omega\}$ avec $\omega \in \Omega$ sont appelés événements élémentaires, les parties de $\Omega$ sont appelées événements, $\varnothing$ est appelé événement impossible et $\Omega$ est appelé événement certain.

Soient $A, B \in \mathscr{P}(\Omega)$. On dit que $A$ et $B$ sont incompatibles si $A \cap B = \varnothing$.

**Proposition:** Soit $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ un ensemble de cardinal $n$ et $(p_1, \dots, p_n) \in [0,1]^n$ tel que $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$. Il existe une unique probabilité $P$ sur $\Omega$ que

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ P\big(\{\omega_i\}\big) = p_i.$$

■

**Lemme:** Soit $P$ une probabilité sur $\Omega$ et $(A_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une famille d'événements 2 à 2 incompatibles. Alors
$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

■

**Proposition:** Soit $P$ une probabilitésur $\Omega$.
1. $P(\varnothing) = 0$ ;
2. $\forall A, B \in \mathscr{P}(\Omega),\ A \subset B \implies P(A) \leqslant P(B)$ ;
3. $\forall A, B \in \mathscr{P}(\Omega),\ P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$.

■

## 2 Probabilité conditionnelle

**Proposition – Définition:** Soit $(\Omega, P)$ un espace probabilisé et $A \in \mathscr{P}(\Omega)$ tel que $P(A) \neq 0$.

L'application
$$\begin{aligned} \mathscr{P}(\Omega) &\longrightarrow [0,1] \\ X &\longmapsto \frac{P(A\cap X)}{P(A)} \end{aligned}$$

est une probabilité. Elle est notée $P_A$ et est appelée <u>probabilité sachant $A$</u>.

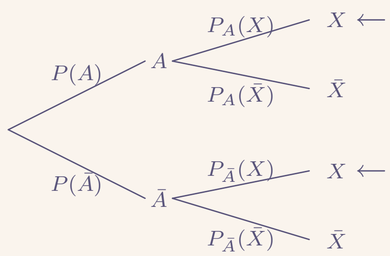
Elle est parfois notée $P(A \mid B)$.

■

**Proposition:** Soit $(\Omega, P)$ un espace probabilisé et $A \in \mathscr{P}(\Omega)$ tel que $P(A) \neq 0$.
$$\forall X \in \mathscr{P}(\Omega),\ P(A\cap X) = P(A)\ P_A(X).$$

□

**Proposition:** Soit $(\Omega, P)$ un espace probabilisé, $A \in \mathscr{P}(\Omega)$ tel que $P(A) \in \left]0,1\right[$.
$$\forall X \in \mathscr{P}(\Omega),\ P(X) = P(A)\, P_A(X) + P\left(\bar{A}\right)\ P_{\bar{A}}(X).$$




■

**Définition:** Soit $(\Omega, P)$ un espace probabilisé. Un <u>système complet d'événements</u> est une partition de $\Omega$.

**Proposition** (probabilités totales)**:** Soit $(\Omega, P)$ un espace probabilisé, $(A_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ un système complet d'événements tel que

$$\forall i \in [\![1, n]\!]\,,\ P(A_i) > 0.$$

Alors,

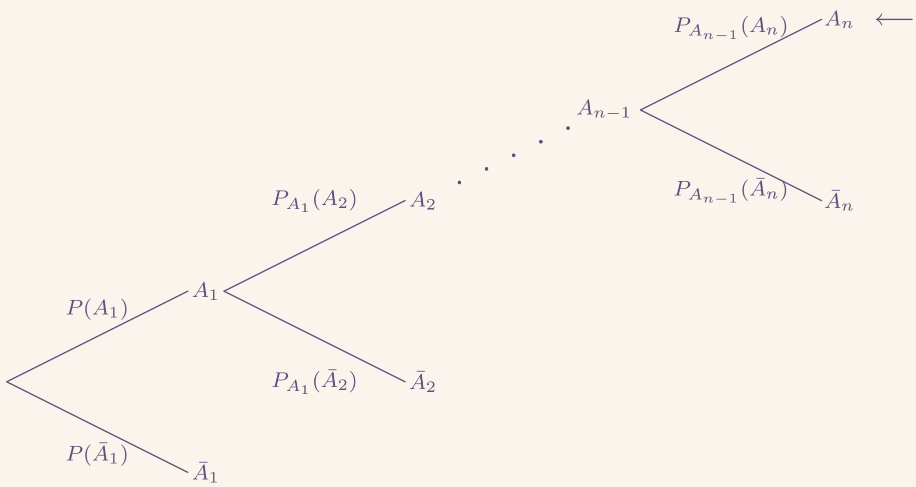
$$\forall x \in \mathscr{P}(\Omega),\ P(X) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) P_{A_i}(X).$$

**Proposition** (probabilités composées)**:** Soit $(\Omega, P)$ un espace probabilisé, $(A_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ des événements tels que

$$P(A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}) \neq 0.$$

Alors,

$$P(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1)\, P_{A_1}(A_2)\, P_{A_1\cap A_2}(A_3) \cdots P_{A_1\cap\cdots\cap A_{n-1}}(A_n)$$




**Proposition** (Bayes)**:** Soit $(\Omega, P)$ un espace probabilisé, $A, B \in \mathscr{P}(\Omega)$ tels que $P(A) \neq 0$ et $P(B) \in \,]0, 1[$.

$$P_A(B) = \frac{P_B(A)\ P(B)}{P(A)} = \frac{P_B(A)\ P(B)}{P_B(A)\,P(B) + P_{\bar{B}}(A)\,P\left(\bar{B}\right)}.$$

Remarque:
On appèle $P_A(B)$ la vraissemblance (*likelyhood* en anglais), $P(A)$ la probabilité a-priori (*prior distribution*), et $P_B(A)$ la probabilité a-posteriori (*posterior distribution*).

**Proposition** (Bayes)**:** Soit $(\Omega, P)$ un espace probabilisé et $(A_k)_{k\in K}$ un système complet d'événements tel que

$$\forall k \in K,\ P(A_k) \neq 0.$$

Soit $X \in \mathscr{P}(\Omega)$ tel que $P(X) \neq 0$. On a

$$\forall k \in K,\ P_X(A_k) = \frac{P_{A_k}(X)\, P(A_k)}{\sum_{j\in K} P_{A_j}(X) P(A_j)}.$$

□

## 3 Événements indépendants

**Définition:** Soient $A$ et $B$ deux événements d'un espace probabilisé $(\Omega, P)$. On dit que $A$ et $B$ sont indépendants si

$$P(A \cap B) = P(A)\, P(B).$$

Remarque:
L'indépendance d'événements au sens mathématique n'est pas la même chose que l'indépendance dans le sens commun : elle dépend de la probabilité utilisé !

**Définition:** Soit $(\Omega, P)$ un espace probabilisé et $(A_i)_{i\in I}$ une famille finie d'événements.

1. On dit que ces événements sont 2 à 2 indépendants si
$$\forall i \neq j, \quad P(A_i \cap A_j) = P(A_i)\, P(A_j)$$
2. On dit qu'ils sont mutuellement indépendants si
$$\forall J \in \mathscr{P}(I) \setminus \{\varnothing\}, \quad P\Big(\bigcap_{j\in J} A_j\Big) = \prod_{j\in J} P(A_j).$$

**Proposition:** Soit $(\Omega, P)$ un espace probabilisé et $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'événements mutuellement indépendants. Soit $J \in \mathscr{P}(I)$ et on pose

$$\forall i \in I,\ B_i = \begin{cases} \bar{A}_i & \text{si } i \in J \\ A_i & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors, $(B_i)_{i\in I}$ est une famille d'événements mutuellement indépendants.

■

CHAPITRE

# 28

# SOUS-ESPACES AFFINES D'UN ESPACE VECTORIEL

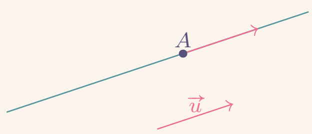
## 1 Espace affine (Hors Programme)

Motivation géométrique :

Dans les petites classes, la géométrie du plan distingue deux types d'objets élémentaires :
- le point
- le vecteur

reliés par la notion de translation.

Par exemple, une droite peut être décrite avec un point et un vecteur :




Soit $\mathbb{K}$ un corps.

**Définition:** Un $\mathbb{K}$-espace affine est un triplet $\left(E, \vec{E}, \tau\right)$ où
- $E$ est un ensemble ;
- $\vec{E}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ;

— $\tau : E \times \vec{E} \longrightarrow E$ telle que

$$\begin{cases} \forall M \in E,\ \tau\left(M, \vec{0}\right) = M, \\ \forall M \in E,\ \forall\left(\vec{u}, \vec{v}\right) \in \vec{E}^2, \tau\Big(\tau\left(M, \vec{u}\right), \vec{v}\Big) = \tau\left(M, \vec{u} + \vec{v}\right), \\ \forall (A, B) \in E^2,\ \exists! \vec{u} \in \vec{E}, \tau\left(A, \vec{u}\right) = B. \end{cases}$$

Les éléments de $E$ sont appelés points, ceux de $\vec{E}$ vecteurs.

Pour tout $\vec{u} \in \vec{E}$, l'application

$$\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ M & \longmapsto & \tau\left(M, \vec{u}\right) \end{array}$$

est la translation de vecteur $\vec{u}$.

En général, pour $M \in E$ et $\vec{u} \in \vec{E}$, au lieu d'écrire $\tau\left(M + \vec{u}\right)$, on écrit $M + \vec{u}$. Soient $(A, B) \in E^2$. L'unique vecteur $\vec{u}$ tel que $A + \vec{u} = B$ est noté $\overrightarrow{AB} = B - A$.

**Proposition:** Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Alors $(E, E, +)$ est un $\mathbb{K}$-espace affine. □

**Proposition:** Soit $\left(E, \vec{E}, \tau\right)$ un $\mathbb{K}$-espace affine. Si $E \neq \varnothing$,

$$\vec{E} = \left\{\overrightarrow{AB} \mid (A, B) \in \vec{E}\right\}.$$

■

Remarque:
On a même démontré que, pour tout $A \in E$, l'application

$$\begin{aligned} \varphi_A : \vec{E} &\longrightarrow E \\ \vec{u} &\longmapsto A + \vec{u} \end{aligned}$$

est bijective. On dit qu'on a vectorialisé $E$ au point $A$ :

$$\begin{cases} M + N := A + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} \\ \lambda N := A + \lambda \overrightarrow{AM} \end{cases}$$

**Proposition:** Soit $\left(E, \vec{E}, \tau\right)$ un $\mathbb{K}$-espace affine.

1. $\forall A \in E,\ \overrightarrow{AA} = \vec{0}$ ;
2. $\forall A, B, C \in E,\ \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ ;
3. $\forall A, B \in E,\ \overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.

■

## 2 Sous-espaces affines

**Définition:** Soit $\left(E, \vec{E}, \tau\right)$ un $\mathbb{K}$-espace affine et $F \in \mathscr{P}(E) \setminus \{\varnothing\}$.

Pour tout $A \in F$, on pose $\overrightarrow{F_A} = \left\{\overrightarrow{AB} \mid B \in F\right\}$. On dit que $F$ est un sous-espace affine de $\left(E, \vec{E}, \tau\right)$ s'il existe $A \in F$ tel que $\overrightarrow{F_A}$ est un sous-espace vectoriel de $\vec{E}$.

**Proposition:** Avec les notations précédentes, $\left(F, \overrightarrow{F_A}, \tau_{|F \times \overrightarrow{F_A}}\right)$ est un espace affine. ■

**Proposition:** Soit $F$ un sous-espace affine de $\left(E, \vec{E}, \tau\right)$. Alors

$$\forall (A, B) \in F^2,\ \overrightarrow{F_A} = \overrightarrow{F_B}.$$

■

**Corollaire:** Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$ et $y \in F$.
Les solutions de l'équation $f(x) = y$ est un sous-espace affine de direction $\operatorname{Ker} f$. □

**Proposition:** Soit $(F_i)_{i \in I}$ une famille de sous-espaces affines de $F$. Alors, $\bigcap_{i \in I} F_i$ est soit vide, soit un sous-espace affine de $F$.

De même que pour les groupes et les espaces vectoriels, on peut définir le sous-espace engendré par une partie de $E$.

**Proposition – Définition:** Soit $A \in \mathscr{P}(E)$. Le sous-espace affine engendré par $A$ est

$$\bigcap_{\substack{F \text{ sous-espace affine de } E \\ A \subset F}} F.$$

C'est le plus petit (au sens de l'inclusion) sous-espace affine contenant $A$.

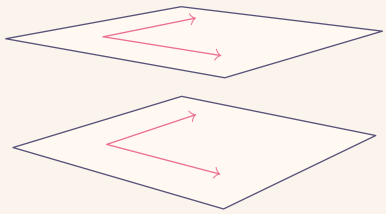
Remarque:
Si $E$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $F$ un sous-espace affine de $E$, alors

$$\begin{cases} \forall A \in F,\ F = A + \vec{F} = \{A + \vec{u} \mid \vec{u} \in \vec{F}\}, \\ \vec{F} \text{ sous-espace vectoriel de } E. \end{cases}$$

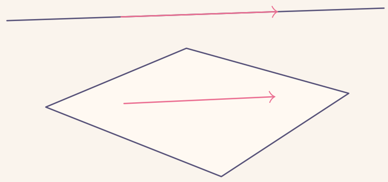
## 3 Parallèlisme et hyperplans

**Définition:** Soit $\left(E, \vec{E}, \tau\right)$ un espace affine, $F$ et $G$ deux sous-espaces affines de $E$.

1. On dit que $F$ et $G$ sont fortement parallèles si $\vec{F} = \vec{G}$.
2. On dit que $F$ et $G$ sont faiblement parallèles si $\vec{F} \subset \vec{G}$ ou $\vec{G} \subset \vec{F}$.



(a) parallélisme fort



(b) parallélisme faible

**Définition:** Soit $F$ un sous-espace affine de $\left(E, \vec{E}, \tau\right)$. L'espace

$$\vec{F} = \left\{\overrightarrow{AB} \mid A, B \in F\right\}$$

est appelé <u>direction</u> de $F$.

On dit que
- $F$ est une <u>droite affine</u> si $\vec{F}$ est une droite vectorielle,
- $F$ est une <u>plan affine</u> si $\vec{F}$ est un plan vectorielle,
- $F$ est une <u>hyperplan affine</u> si $\vec{F}$ est un hyperplan vectorielle.

## 4 Repère affine

**Définition:** Soit $F$ un sous-espaca affine de $E$. Un <u>repère</u> de $F$ est la donnée d'un point $A \in F$ ("l'origine du repère") et d'une base $\mathscr{B} = (\vec{e_i})_{i \in I}$ de $\vec{F}$ ("vecteurs direction").

**Proposition – Définition:** Soit $F$ un sous-espace affine de $E$, et $\mathscr{R} = (A, \vec{e_1}, \ldots, \vec{e_n})$ un repère de $F$. Alors, pour tout $B \in F$,

$$\exists!(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n,\ B = A + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{e_i}.$$

On dit que $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ sont les <u>coordonées</u> de $B$.

Remarque:
Les solutions d'un problème linéaire forment un espace sous-affine de direction les solutions du système homogène associé.

CHAPITRE

# 29

# PRODUIT SCALAIRE

Dans ce chapitre, $E$ désigne un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

On sait déjà calculer le produit scalaire en dimension 2 et 3 mais l'objectif de ce chapitre est de le généraliser en dimension potentiellement infinie.

## 1 Définitions

**Définition:** Un produit scalaire sur $E$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive :

$$f : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$$

1. $\forall (u_1, u_2, v) \in E^3, \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, f(\alpha u_1 + \beta u_2, v) = \alpha f(u_1, v) + \beta f(u_2, v),$ (bilinéaire)
2. $\forall (u, v) \in E^2,\ f(u, v) = f(v, u),$ (symétrie)
3. $\forall u \in E,\ f(u, u) \geqslant 0,$ (positive)
4. $\forall u \in E,\ \big(f(u, u) = 0 \iff u = 0_E\big).$ (définie)

On dit alors que $(E, f)$ est un espace préhilbertien. Si, de plus, $E$ est de dimension finie, alors on dit que $(E, f)$ est un espace euclidien.

En général, on note $\langle u \mid v \rangle$, $\langle u, v \rangle$ ou $(u \mid v)$ à la place de $f(u, v)$.

Remarque:
Même si elle est utilisée (notament au lycée), la notation $u \cdot v$ est dangeureuse car elle peut être facilement confondue par la multiplication.

**Définition:** Soit $(E, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ un esapce préhilbertien. Soit $x \in E$.

La norme (euclidienne) de $x$ est

$$\sqrt{\langle x \mid x \rangle} = \|x\|.$$

**Proposition:** 1. $\forall x \in E,\ \|x\| = 0 \iff x = 0_E$ (séparation)
2. $\forall x \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$ (homogénéité positive)
3. $\forall (x,y) \in E^2,\ \|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ (inégalité triangulaire)

□

L'inégalité triangulaire sera prouvée dans la suite du chapitre (paragraphe 2.).

**Définition:** Soit $(x,y) \in E^2$. On dit que $x$ et $y$ sont orthogonaux si $\langle x \mid y \rangle = 0$. On note cette situation $x \perp y$.

# 2 Quelques formules

Dans ce paragraphe, $\big(E, \langle \cdot \mid \cdot \rangle\big)$ est un espace préhilbertien.

**Proposition:** Soient $x, y \in E$.
1. $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x \mid y \rangle$.
2. $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\big(\|x\|^2 + \|y\|^2\big)$. (identité du parallélogramme)
3. $\langle x \mid y \rangle = \frac{1}{4}\big(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\big)$. (polarisation)

■

**Théorème** (inégalité de Cauchy–Schwarz)**:** Soient $x, y \in E$. Alors

$$\big|\langle x \mid y \rangle\big| \leqslant \|x\|\,\|y\|$$

et

$$\big|\langle x \mid y \rangle\big| = \|x\|\,\|y\| \iff x \text{ et } y \text{ sont colinéaires.}$$

■

**Corollaire** (inégalité triangulaire)**:** Soit $(x,y) \in E^2$.

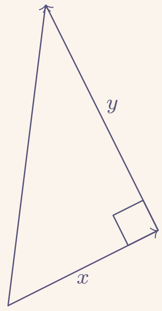
1. $\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.
2. $\|x+y\| = \|x\| + \|y\| \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}^+,\ \big(x = \lambda y \text{ ou } y = \lambda x\big)$.

■

# 3 Familles orthogonales

**Théorème** (Pythagore)**:** Soit $(x,y) \in E^2$.

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \iff x \perp y.$$




■

**Définition:** Soit $(e_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs. On dit que cette famille est orthogonale si

$$\forall i \neq j\, e_i \perp e_j.$$

Si, en plus, on a

$$\forall i \in I,\ \|e_i\| = 1,$$

alors on dit que la famille est orthonormale ou orthonormée.

**Proposition** (Pythagore)**:** Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une famille orthogonale. Alors

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} e_i\right\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|e_i\|^2.$$

**Théorème:** Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre.

■

**Algorithme** (Orthonormalisation de Gran–Schmidt)**:** On suppose $E$ de dimension finie. Soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de $E$.

— *Étape1* : On pose $v_1 = \dfrac{e_1}{\|e_1\|}$ de sorte que $\|v_1\| = 1$.

— *Étape2* : On pose

$$u_2 = e_2 - \langle e_2 \mid v_1\rangle\, v_1.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\langle u_2 \mid v_1\rangle &= \big\langle e_2 - \langle e_2 \mid v_1\rangle\, v_1 \mid v_1\big\rangle \\ &= \langle e_2 \mid v_1\rangle - \langle e_2 \mid v_1\rangle \langle v_1 \mid v_1\rangle \\ &= 0.\end{aligned}$$

On pose $v_2 = \dfrac{u_2}{\|u_2\|}$ donc $v_2 \perp v_1$ et $\|v_2\| = 1$.

— *Étape3* : On pose

$$u_2 = e_3 - \langle e_3 \mid v_1\rangle\, v_1 - \langle e_3 \mid v_2\rangle\, v_2.$$

Ainsi,

$$\langle u_3 \mid v_1\rangle = \langle e_3 \mid v_1\rangle - \langle e_3 \mid v_1\rangle \underbrace{\langle v_1 \mid v_1\rangle}_{=1} - \langle e_3 \mid v_2\rangle \underbrace{\langle v_2 \mid v_1\rangle}_{=0}$$
$$= 0$$

et

$$\langle u_3 \mid v_2\rangle = \langle e_3 \mid v_2\rangle - \langle e_3 \mid v_1\rangle \underbrace{\langle v_1 \mid v_2\rangle}_{=0} - \langle e_3 \mid v_2\rangle \underbrace{\langle v_2 \mid v_2\rangle}_{=1}$$
$$= 0.$$

On pose $v_3 = \dfrac{u_3}{\|u_3\|}$ de sorte que $v_3 \perp v_1$, $v_3 \perp v_2$ et $\|v_3\| = 1$.

— *Étape $i+1$* : On pose

$$u_{i+1} = e_{i+1} - \sum_{k=1}^{i} \langle e_{i+1} \mid v_k\rangle v_k.$$

Ainsi, pour tout $j \in [\![1, i]\!]$, on a

$$\begin{aligned}\langle u_{i+1} \mid v_j\rangle &= \langle e_{i+1} \mid v_j\rangle - \sum_{k=1}^{i} \langle e_{i+1} \mid v_k\rangle \langle v_k \mid v_j\rangle \\ &= \langle e_{i+1} \mid v_j\rangle - \langle e_{i+1} \mid v_j\rangle \|v_j\|^2 \\ &= 0.\end{aligned}$$

On pose $v_{i+1} = \dfrac{u_{i+1}}{\|u_{i+1}\|}$.

**Proposition:** Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de $E$ et $\mathscr{C}$ la base obtenue par le procédé d'orthonormalisation de Gram–Schmidt. Alors,

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_i) = \mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_i).$$

□

**Corollaire** (théorème de la base orthonormée incomplète)**:** Soit $(e_1, \dots, e_k)$ une base orthonormée d'un espace euclidien. On peut trouver $e_{k+1}, \dots, e_n$ tels que $(e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n)$ soit une base orthonormée de $E$.

■

**Théorème:** Soit $E$ un espace euclidien et $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de $E$. Soit $(x, y) \in E^2$. On pose $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \qquad y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i.$$

Alors

$$\langle x \mid y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$. Alors,

$$\langle x \mid y\rangle = X^\top Y.$$

■

**Proposition:** Soit $E$ un espace euclidien et $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de $E$. Alors,

$$\forall x \in E,\, x = \sum_{i=1}^{n} \langle x \mid e_i\rangle\, e_i.$$

■

## 4 Projection orthogonale

Dans ce paragraphe, $\big(E, \langle \cdot \mid \cdot \rangle\big)$ est un espace préhilbertien (de dimension quelconque).

**Définition:** Soit $A \in \mathscr{P}(E)$. L'orthogonal de $A$ est

$$A^\perp = \{u \in E \mid \forall a \in A,\, a \perp u\}.$$

**Proposition:**

$$\forall A \in \mathscr{P}(E),\ A^\perp \text{ est un sous-espace vectoriel de } E.$$

■

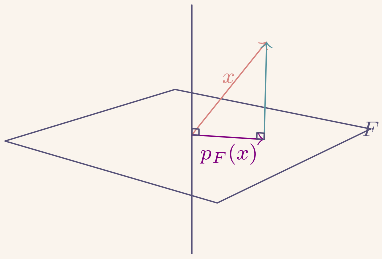
**Théorème:** Soit $F$ un sous-espace vectoriel de dimension finie de $E$. Alors

$$F \oplus F^\perp = E.$$

■

**Définition:** Dans le conditions précédentes, $F^\perp$ est appelé le supplémentaire orthogonal de $F$.

La projection sur $F$ parallèlement à $F^\perp$ est appelé projection orthogonale sur $F$. On la note $p_F$.



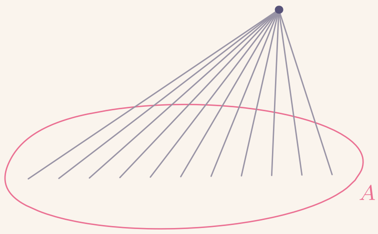

**Proposition** (inégalité de Bessel)**:** Soit $F$ de dimension finie. Alors,

$$\forall x \in E,\ \|p_F(x)\| \leqslant \|x\|.$$

■

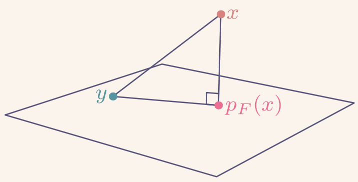
**Définition:** Soit $A \in \mathscr{P}(E)$ non vide et $x \in E$. La <u>distance</u> de $x$ à $A$ est

$$d(x, A) = \inf\big(\{\|x - a\| \mid a \in A\}\big).$$




**Théorème:** Soit $F$ un sous-espace vectoriel de $E$ de dimension finie et $x \in E$. Alors,

$$d(x, F) = \|x - p_F(x)\|.$$




■

**Proposition:** Soit $F$ un sous-espace vectoriel de $E$ de dimension finie et $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_p)$

une base orthonormée de $F$. Alors,

$$\forall x \in E,\ p_F(x) = \sum_{i=1}^{p} \langle x \mid e_i \rangle\, e_i.$$

■

**Proposition:** Soit $F$ un sous-espace vectoriel de $E$ de dimension finie. Alors,

$$\left(F^{\perp}\right)^{\perp} = F.$$

■

# 5 Annexe

Dans ce chapitre, beaucoup des résultats ne seront pas prouvés, et sont, en grande majorité, hors-programme (pour l'année de *MP2I*).

## 5.1 Produit vectoriel

**Théorème** (Riesz)**:** Soit $(E, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ un espace euclidien. L'application

$$\begin{aligned} \varphi : E &\longrightarrow E^* \\ a &\longmapsto \langle a \mid \cdot \rangle \end{aligned}$$

est un isomorphisme.

■

Ici, $E = \mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire canonique.

**Définition:** Soient $u$ et $v$ linéairement indépendants dans $E$. Soit $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $E$.

L'application

$$\begin{aligned} f : E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ w &\longmapsto \det_{\mathscr{B}}(u, v, w) \end{aligned}$$

est linéaire. D'après le théorème de Riesz,

$$\exists!\, a \in E,\ f = \langle a \mid \cdot \rangle.$$

On considère un tel vecteur $a \in E$. Donc,

$$\forall w \in E,\ \det_{\mathscr{B}}(u, v, w) = \langle a \mid w \rangle.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} (u, v, w) \text{ base de } E &\iff \langle a \mid w \rangle \neq 0 \\ &\iff w \not\perp a. \end{aligned}$$

Comme $a \not\perp a$, $(u, v, a)$ est une base de $E$. $a$ est le produit vectoriel de $u$ et $v$ et est noté $u \wedge v$.

$$\forall w \in E,\ \det_{\mathscr{B}}(u, v, w) = \underbrace{\langle u \wedge v \mid w \rangle}_{\substack{\text{produit mixte} \\ \text{noté } [u,v,w]}}.$$

**Proposition:** Soit $(u, v) \in E^2$ avec $u$ et $v$ linéairement indépendants.

1. $(u \wedge v) \perp u$ ;
2. $(u \wedge v) \perp v$ ;
3. $(u, v, u \wedge v)$ est une base directe (i.e. $\det(u, v, u \wedge v) > 0$) ;
4. $\|u \wedge v\| = \|u\| \, \|v\| \, \sin(\widehat{u, v})$.

■

**Proposition:** Soient $u = (a, b, c)$ et $v = (\alpha, \beta, \gamma)$. Alors,

$$u \wedge v = (b\gamma - c\beta, \alpha c - \gamma a, a\beta - b\alpha).$$

■

## 5.2 Calcul différentiel

**Définition:** Soit $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ où $D$ est un ouvert. Soit $a \in D$. S'il existe $\ell_a \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ telle que

$$\forall h \in \mathbb{R}^n \text{ avec } \|h\| \text{ assez petite, } f(a + h) = f(a) + \ell_a(h) + o\left(\|h\|\right)$$

alors on dit que $f$ est différentiable en $a$ et $\ell_a$ est la différentielle de $f$ en $a$. Si c'est le cas, alors

$$\exists!\, g_a \in \mathbb{R}^n,\ \forall h,\ \ell_a(h) = \langle g_a \mid h \rangle .$$

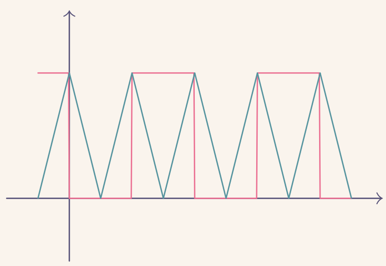
On dit que $g_a$ est le gradient de $f$ au point $a$.

Donc,

$$f(a + h) - f(a) \simeq \langle g_a \mid h \rangle .$$

Les résultats vus au chapitre 22 peuvent se retrouver avec cette nouvelle définition du gradient.

## 5.3 Séries de Fourier



Soit $E$ un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension infinie et $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ une application de $E^2$ dans $\mathbb{C}$ vérifiant

1. linéarité à gauche ;
2. $\forall (u, v) \in E^2$, $\langle v \mid u \rangle = \overline{\langle u \mid v \rangle}$ ; (symétrie hermitienne)
3. $\forall u \in E$, $\langle u \mid u \rangle \geqslant 0$ ;
4. $\forall u \in E$, $\langle u \mid u \rangle = 0 \iff u = 0_E$.

**Proposition:** $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ est semi-linéaire à droite :

$$\langle u \mid \alpha v + \beta w \rangle = \bar{\alpha} \langle u \mid v \rangle + \bar{\beta} \langle u \mid w \rangle .$$

$\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ est donc sesquilinéaire.

$\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ est dit produit héermitien.

**Définition:** Soit $\mathscr{B} = (e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ une famille de $E$. On dit que $\mathscr{B}$ est une base hilbertienne si

$$\begin{cases} \forall x \in E, \exists! \, (c_n)_{n \in \mathbb{Z}}, \, x = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e_n; \\ \forall n \in \mathbb{Z}, \, \|e_n\| = 1; \\ \forall p \neq q, \, \langle e_p \mid e_q \rangle = 0. \end{cases}.$$

Dans ce cas, $c_n = \langle x \mid e_n \rangle$.

## 5.4 Espace-temps de Minkowsky

On modélise l'espace-temps par $E = \mathbb{R}^4$ ; c'est un espace affine et on y crée un "produit scalaire" (en utilisant une "norme") :

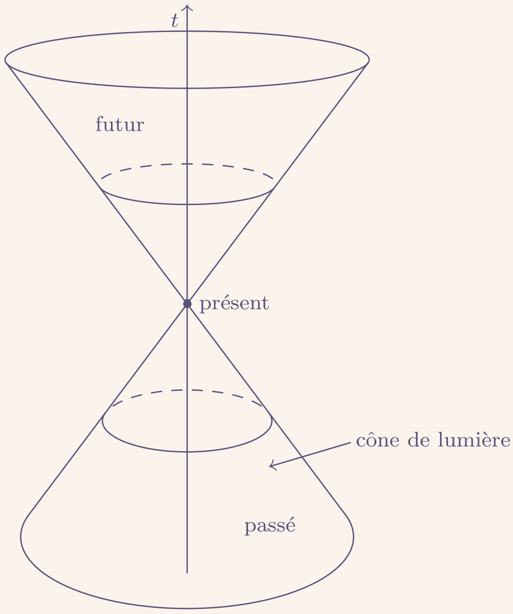
$$q(x, y, z, t) = x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2.$$

On en déduit que

$$\big\langle (x, y, z, t) \mid (x', y', z', t') \big\rangle = xx' + yy' + zz' - c^2 tt'.$$

Ce "produit scalaire" n'en est pas vraiment un : il est bilinéaire, symétrique MAIS pas positif.

$$(x, y, z, t) \text{ isotrope} \quad \iff x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2.$$




Toute information contenue dans le cône passé nous est accessible ; s'il est sur sa surface, il faut que l'information y voyage à la vitesse de la lumière. Par contre, comme le temps n'est pas symétrique, on ne peut pas voir l'information future.

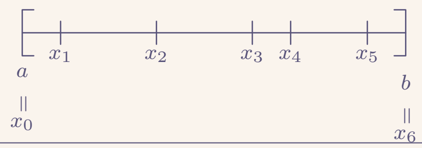
CHAPITRE

# 30

# INTÉGRALE DE RIEMANN

## 1 Intégrale d'une fonction en escaliers

**Définition:** Une <u>subdivision</u> du segment $[a, b]$ est une suite finie $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$.



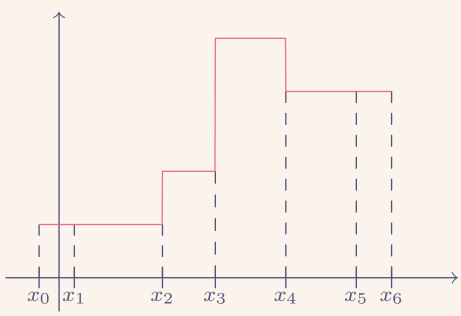

Remarque (Notation):
Dans ce chapitre, l'ensemble des subdivisions de $[a, b]$ est noté $\mathfrak{S}_{[a,b]}$.

**Définition:** Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$.

On dit que $f$ est en <u>escalier</u> s'il existe $\sigma = (x_0, \dots, x_n) \in \mathfrak{S}_{[a,b]}$ et $(c_0, \dots, c_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ tels que

$$\forall i \in [\![0, n-1]\!]\,,\ \forall x \in ]x_i, x_{i+1}[,\ f(x) = c_i.$$

On dit alors que $\sigma$ est <u>adaptée</u> à $f$.



**Définition:** Soient $\sigma = (x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathfrak{S}_{[a,b]}$ et $\sigma' = (x'_0, x'_1, \dots, x'_p) \in \mathfrak{S}_{[a,b]}$. On dit alors que $\sigma'$ est plus fine que $\sigma$ si $\{x_0, x_1, \dots, x_n\} \subset \{x'_0, x'_1, \dots, x'_n\}$. On note alors $\sigma' \prec \sigma$.

**Proposition:** Soient $\sigma_1, \sigma_2$ deux subdivisions de $[a,b]$. Alors il existe une subdivision $\sigma_3$ plus fine que $\sigma_1$ et $\sigma_2$.

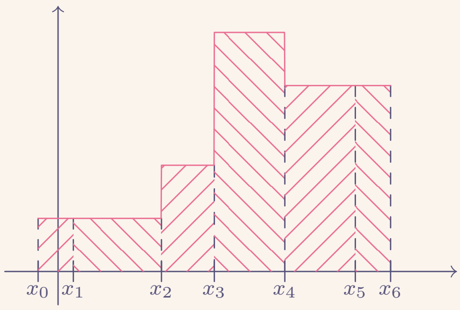
■

**Proposition – Définition:** Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction en escaliers. Soit $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$ une subdivision adaptée à $f$. Pour $i \in [\![0, n-1]\!]$, on pose $c_i$ la valeur constante de $f$ sur $]x_i, x_{i+1}[$.

Alors,

$$\sum_{i=1}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) c_i$$

ne dépend pas de la subdivision adaptée. On dit que c'est l'intégrale de $f$ sur $[a,b]$. On note ce nombre $\displaystyle\int_{[a,b]} f$.




■

Pour définir l'intégrale d'une fonction continue, on peut utiliser deux méthodes :

1. L'intégrale d'une fonction continue est la limite d'une suite de fonctions en escaliers. Ces résultats seront vus l'année prochaine en *MPI*.
2. Les sommes de Darboux ; c'est la définition que l'on va utiliser.

## 2 Sommes de Darboux

**Définition:** Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$. Soit $\sigma = (x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathfrak{S}_{[a,b]}$. La somme de Darboux supérieur de $f$ associé à $\sigma$ est

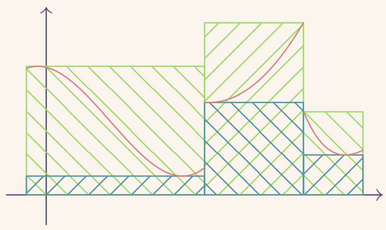
$$S_\sigma^+(f) = \sum_{i=1}^{n-1} (x_{i+1} - x_i)\, M_i$$

où $\forall i \in [\![0, n-1]\!]$, $M_i = \sup\limits_{]x_i, x_{i+1}[} f$.

La somme de Darboux inférieure de $f$ associé à $\sigma$ est

$$S_\sigma^-(f) = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i)\, m_i$$

où $m_i = \inf\limits_{]x_i, x_{i+1}[} f$.



**Proposition:** Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ bornée, $\sigma$ et $\sigma'$ deux subdivisions de $[a,b]$ avec $\sigma' \prec \sigma$. Alors

$$\begin{cases} S_{\sigma'}^+(f) \leqslant S_\sigma^+(f); \\ S_{\sigma'}^-(f) \geqslant S_\sigma^-(f). \end{cases}$$

■

**Définition:** Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ bornée.

L'intégrale supérieure de $f$ est

$$I_{[a,b]}^+(f) = \inf_{\sigma \in \mathfrak{S}_{[a,b]}} \left(S_\sigma^+(f)\right).$$

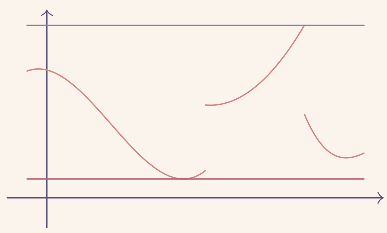
L'intégrale inférieure de $f$ est

$$I_{[a,b]}^-(f) = \sup_{\sigma \in \mathfrak{S}_{[a,b]}} \left(S_\sigma^-(f)\right).$$

Remarque (justification de l'existence des bornes inférieures et supérieures):
Soit $m = \inf\limits_{[a,b]} f$. $\forall i \in [\![0, n-1]\!]$, $M_i \geqslant m$ et donc

$$\begin{aligned} S_\sigma^+(f) &= \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) M_i \\ &\geqslant \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) m \\ &\geqslant m(b-a). \end{aligned}$$

De même, avec $M = \sup\limits_{[a,b]} f$, $\forall \sigma \in \mathfrak{S}_{[a,b]}$, $S_\sigma^-(f) \leqslant M(b-a)$.



**Proposition:** Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ bornée. Alors
$$I^-_{[a,b]}(f) \leqslant I^+_{[a,b]}(f).$$
■

**Définition:** Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ bornée. On dit que $f$ est Riemann-intégrable si $I^-_{[a,b]}(f) = I^+_{[a,b]}(f)$. Dans ce cas, ce nombre est noté $\displaystyle\int_{[a,b]} f$.

# 3 Propriétés de l'intégrale

**Proposition:** Soient $f$ et $g$ deux fonctions définies de $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Si $f \leqslant g$, alors
$$I^-_{[a,b]}(f) \leqslant I^-_{[a,b]}(g).$$
■

**Corollaire:** Soient $f$ et $g$ deux fonctions intégrables définies sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Si $f \leqslant g$, alors
$$\int_{[a,b]} f \leqslant \int_{[a,b]} g.$$
□

**Proposition** (Chasles)**:** Soit $f$ une fonction définie sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soit $c \in \,]a,b[$. Alors,
$$\begin{cases} I^-_{[a,b]}(f) = I^-_{[a,c]}(f) + I^-_{[c,b]}(f) \\ I^+_{[a,b]}(f) = I^+_{[a,c]}(f) + I^+_{[c,b]}(f). \end{cases}$$
■

**Corollaire:** Soit $f$ une fonction définie sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soit $c \in \,]a,b[$. Alors,
$$\int_{[a,b]} f = \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f.$$
□

**Proposition:** Soient $f$ et $g$ deux fonctions intégrables définies sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Alors,
$$\begin{cases} I^-_{[a,b]}(f+g) \geqslant I^-_{[a,b]}(f) + I^-_{[a,b]}(f) \\ I^+_{[a,b]}(f+g) \leqslant I^+_{[a,b]}(f) + I^+_{[a,b]}(f) \end{cases}$$
■

**Proposition:** Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a

$$I^-_{[a,b]}(\lambda f) = \begin{cases} \lambda I^-_{[a,b]}(f) & \text{si } \lambda \geqslant 0 \\ \lambda I^+_{[a,b]}(f) & \text{si } \lambda \leqslant 0 \end{cases}$$

et

$$I^+_{[a,b]}(\lambda f) = \begin{cases} \lambda I^+_{[a,b]}(f) & \text{si } \lambda \geqslant 0 \\ \lambda I^-_{[a,b]}(f) & \text{si } \lambda \leqslant 0 \end{cases}.$$

■

# 4 Théorème fondamental de l'Analyse

**Théorème:** Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue. Alors $f$ est Riemann-intégrable.

■

On a aussi démontré le théorème suivant :

**Théorème:** Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ conitnue. Alors

$$x \mapsto \int_{[a,x]} f$$

est une primitive de $f$. □

Remarque (Notation):
Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue. On note plutôt $\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ à la place de $\displaystyle\int_{[a,b]} f$.
On note aussi $\displaystyle\int_b^a f(t)\ \mathrm{d}t = -\int_{[a,b]} f$.

**Corollaire:** Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et $F$ une primitive de $f$. Alors

$$\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = F(b) - F(a).$$

■

# 5 Fonctions continues par morceaux

**Définition:** Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$. On dit que $f$ est <u>continue par morceaux</u> si,

$$\exists \sigma = (x_0, \dots, x_n) \in \mathfrak{S}_{[a,b]}, \begin{cases} \forall i \in [\![0, n-1]\!],\ f_{\big| ]x_i, x_{i+1}[} \text{ est continue;} \\ \forall i \in [\![1, n-1]\!],\ \lim\limits_{\substack{x \to x_i \\ <}} f(x) \in \mathbb{R} \text{ et } \lim\limits_{\substack{x \to x_i \\ >}} f(x) \in \mathbb{R}; \\ \lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) \in \mathbb{R};\ \lim\limits_{\substack{x \to b \\ <}} f(x) \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

**Théorème:** Toute fonction continue par morceaux sur un segment est Riemann-intégrable sur ce segment. □

**Définition:** Soit $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. On dit que $f$ est continue par morceaux sur $I$ si $f$ est continue par morceaux sur tout segment inclus dans $I$.

Remarque:


$$\begin{aligned} \delta : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 0, \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

$\delta$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$. On a $\displaystyle\int_{[0,1]} \delta = 0$, et $\forall x \in [0,1],\ f(x) \geqslant 0$. Mais, $\delta \neq 0$.

## 6 Sommes de Riemann

**Théorème:** Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux.

À faire : schéma 1

$$\lim_{n\to+\infty} \left( \sum_{i=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right)\right) = \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t.$$

■

**Proposition:** Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue par morceaux et $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f\big(\underbrace{a + i\tfrac{b-a}{n}}_{x_i}\big) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t.$$

□

Remarque:
On suppose à présent $f$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$. $f'$ est continue sur $[a,b]$ : on considère

$$M = \max_{x\in[a,b]} \left|f'(x)\right|.$$

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N}^*, \left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\right| &= \left|\sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} \big(f(t)-f(x_i)\big)\,\mathrm{d}t\right| \\
&\leqslant \sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} \left|f(t)-f(x_i)\right|\,\mathrm{d}t \\
&\leqslant \sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} M|t-x_i|\,\mathrm{d}t \\
&\leqslant M\sum_{i=0}^{n-1}\frac{(x_{i+1}-x_i)^2}{2} \\
&\leqslant \frac{M}{2}\left(\frac{b-a}{n}\right)^2 n \\
&= \frac{M(b-a)^2}{2n}.
\end{aligned}$$

Par exemple, on veut calculer une valeur approchée de $\ln 2$ à $10^{-3}$ près :

$$\ln 2 = \int_1^2 \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t.$$

Soit $f : t \mapsto \dfrac{1}{t}$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[1,2]$.

$$\forall t \in [1,2],\ \left|f'(t)\right| = \frac{1}{t^2} \leqslant 1$$

d'où $M = 1$.

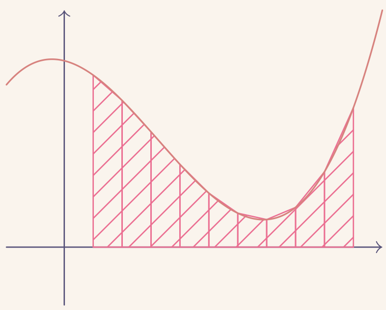
On cherche $n \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\frac{1(2-1)^2}{2n} \leqslant 10^{-3}$$

i.e. $n \geqslant 500$.

Donc, $\displaystyle\frac{1}{500}\sum_{i=0}^{499}\frac{1}{1+\frac{i}{500}} \simeq 0{,}693$ est une valeur approchée de $\ln 2$ à $10^{-3}$ près.

Remarque (Méthode des trapèzes):



Au lieu d'approximer l'intégrale par des rectangles, on utilise des trapèzes.

## 7 Retour sur les formules de Taylor

**Proposition:** Soit $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et $F$ une primitive de $f$. On suppose

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i (x-a)^i + \underset{x \to a}{o}\big((x-a)^n\big).$$

Alors,

$$F(x) = F(a) + \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \frac{(x-a)^{i+1}}{i+1} + \underset{x \to a}{o}\big((x-a)^{n+1}\big).$$

■

**Corollaire:** Soit $f : \overset{\substack{a \\ \cap}}{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^n$. Alors,

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i + \underset{x \to a}{o}\big((x-a)^n\big).$$

■

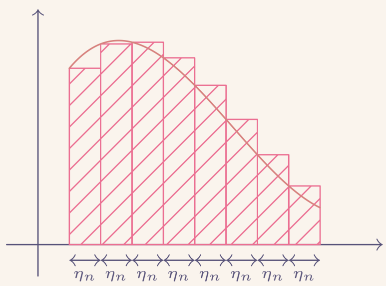
## 8 Fonctions réglées

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue. Cette fonction est donc uniformément continue (théorème de Heine) :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall (x,y) \in [a,b]^2,\ |x-y| \leqslant \eta \implies \big|f(x) - f(y)\big| \leqslant \varepsilon.$$

D'où

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \exists \eta_n > 0,\ |x-y| \leqslant \eta_n \implies \big|f(x) - f(y)\big| \leqslant \frac{1}{n}.$$




Cependant, contrairement au sommes de Darboux, cette construction utilise des notions que l'on admet : notamment, la convergence d'une suite de fonctions.

CHAPITRE

# 31

# VARIABLES ALÉATOIRES

## 1 Définitions

**Définition:** Une variable aléatoire est une application sur un espace probabilisé $(\Omega, P)$ dans $E$ où $E$ est un ensemble quelconque :

$$X : \Omega \longrightarrow E.$$

Si $E \subset \mathbb{R}$, on dit que $X$ est réelle.

Si $E$ est un espace vectoriel, on dit que $X$ est un vecteur aléatoire.

Si $E \subset \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on dit que $X$ est une matrice aléatoire.

Dans la suite du chapitre, $(\Omega, P)$ est un espace probabilisé.

**Proposition:** Soit $X : \Omega \to E$ une variable aléatoire avec $E = X(\Omega)$. L'application

$$\begin{aligned} P_X : \mathscr{P}(E) &\longrightarrow [0,1] \\ A &\longmapsto P\left(X^{-1}(A)\right) \end{aligned}$$

est une probabilité sur $E$.

■

**Définition:** Soit $X : \Omega \to E$ une variable aléatoire. $P_X$ est la loi de $X$.

Remarque (Notations):
Soit $X : \Omega \to E$ une variable aléatoire.
— Soit $A \in \mathscr{P}(E)$. $X^{-1}(A)$ est noté $(X \in A)$. D'où $P_X(A) = P(X \in A)$.
— Soit $x \in E$. $X^{-1}\big(\{x\}\big)$ est noté $(X = x)$ ; $P_X\big(\{x\}\big) = P(X = x)$.

— Si $E \subset \mathbb{R}$, $X^{-1}\big(]-\infty, x]\big)$ est noté $(X \leqslant x)$ et donc $P\big(X^{-1}\big(]-\infty, x]\big)\big) = P(X \leqslant x)$. De même avec les autres inégalités strictes et larges.

Remarque (Notation):
On note $X \sim Y$ si $X$ et $Y$ suivent la même loi, i.e. $P_X = P_Y$.

## 2 Exemples de lois

**Définition:** Soit $X : \Omega \to E$ une variable aléatoire. On dit que $X$ suit une loi uniforme si $P_X$ est l'équiprobabilité sur $X(\Omega)$. On note alors $X \sim \mathscr{U}\big(X(\Omega)\big)$.

**Définition:** Soit $X : \Omega \to \{0, 1\}$. On note $p = P(X = 1) \in [0, 1]$. On dit que $X$ suit la loi de Bernoulli de paramètre $p$. On note alors $X \sim \mathscr{B}(p)$.

**Définition:** Soit $X : \Omega \to [\![0, n]\!]$. On dit que $X$ suit la loi binomiale de paramètres $n$ et $p$ si

$$\forall k \in [\![0, n]\!]\,,\; P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

On note alors $X \sim \mathscr{B}(n, p)$.

**Théorème:** On considère une expérience aléatoire qui n'a que deux issues possibles : succès ou échec. On répète $n$ fois à l'identique cette expérience, et on note $X$ le nombre de succès. Alors $X \sim \mathscr{B}(n, p)$ où $P$ est la probabilité de succès. □

## 3 Couples de variables aléatoires

**Définition:** Soient $X : \Omega \to E$ et $Y : \Omega \to F$ deux variables aléatoires.

La loi du couple $(X, Y)$ est $P_Z$ où

$$\begin{aligned} Z : \Omega &\longrightarrow E \times F \\ \omega &\longmapsto \big(X(\omega), Y(\omega)\big) \end{aligned}$$

i.e. c'est la donnée de

$$\forall x \in X(\Omega), \forall y \in Y(\Omega), P(X = x, Y = y) = P\big((X = x) \cap (Y = y)\big).$$

**Définition:** Soient $X : \Omega \to E$ et $Y : \Omega \to F$. Les lois marginales du couple $(X, Y)$ sont $P_X$ et $P_Y$.

**Proposition:** Avec les notations précédentes,

$$\begin{aligned}\forall x \in X(\Omega),\ P(X=x) &= \sum_{y \in Y(\Omega)} P(X=x, Y=y);\\ \forall y \in Y(\Omega),\ P(Y=y) &= \sum_{x \in X(\Omega)} P(X=x, Y=y).\end{aligned}$$

■

Remarque:
Si
$$\forall y \in Y(\Omega),\ P(Y=y) \neq 0$$
alors
$$\forall x \in X(\Omega),\ P(X=x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} P_{(Y=y)}(X=x)\ P(Y=y).$$

**Définition:** Soient $X : \Omega \to E$ et $Y : \Omega \to F$ deux variables aléatoires. On dit que $X$ et $Y$ sont indépendantes si

$$\forall A \subset X(\Omega),\ \forall B \subset Y(\Omega),\ P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A)\ P(Y \in B).$$

On note alors $X \perp\!\!\!\perp Y$.

**Proposition:** Avec les notations précédentes,

$$X \perp\!\!\!\perp Y \iff \forall x \in X(\Omega), \forall y \in Y(\Omega),\ P(X=x, Y=y) = P(X=x)P(Y=y).$$

■

## 4 Familles de variables aléatoires

**Définition:** Soit $(X_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} E_i^{\Omega}$ une famille de variables aléatoires. On dit que ces variables sont indépendantes si, pour toute partie finie $J$ de $I$, et pour tout $(A_j)_{j \in J} \in \prod_{j \in J} \mathscr{P}(E_j)$,

$$P\left(\bigcap_{j \in J} (X_j \in A_j)\right) = \prod_{j \in J} P(X_j \in A_j).$$

**Proposition:** Avec les notations précédentes, $(X_i)_{i \in I}$ est une famille de variables aléatoires indédpendantes si et seulement si

$$\forall J \subset I,\ J \text{ finie},\ \forall (x_j)_{j \in J} \in \prod_{j \in J} X_j(\Omega),\ P\left(\bigcap_{j \in J} (X_j = x_j)\right) = \prod_{j \in J} P(X_j = x_j).$$

□

**Proposition:** Soit $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires suivant la même loi de

Bernoulli $\mathscr{B}(p)$. Alors,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \mathscr{B}(n,p).$$

**Proposition:** Soient $X \sim \mathscr{B}(n,p)$ et $Y \sim \mathscr{B}(m,p)$.
Si $X \perp\!\!\!\perp Y$, alors $X + Y \sim \mathscr{B}(n+m,p)$. $\square$

## 5 Espérance d'une variable aléatoire

Dans ce paragrape, toutes les variables aléatoires sont à valeurs réelles.

**Définition:** Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$. L'espérance de $X$ est

$$E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x\, P(X = x).$$

**Lemme:** Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$.

$$E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)\, P\big(\{\omega\}\big).$$

$\blacksquare$

**Théorème** (linéarité de l'espérance)**:** Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires réelles, et $\alpha, \beta$ deux réels. Alors,

$$E(\alpha X + \beta Y) = \alpha E(X) + \beta E(Y).$$

$\blacksquare$

**Corollaire:** Soit $X$ une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$. On a $E(X) = np$.

$\blacksquare$

**Définition:** Soient $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

$$\begin{tikzcd} \Omega \arrow[r, "X"] \arrow[dr, dashed] & \mathbb{R} \arrow[d, "f"] \\ & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

La composée $f \circ X$ est notée $f(X)$.

**Théorème** (formule de transfert)**:** Avec les notations précédentes,

$$E\big(f(X)\big) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x)\, P(X = x).$$

■

## 6 Variance

Dans ce paragrape, toutes les variables aléatoires sont à valeurs réelles.

**Définition:** Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire. La variance de $X$ est

$$V(X) = E\left(\left(X - E(X)\right)^2\right).$$

**Proposition:** Avec les notations précédentes,

$$V(X) \geqslant 0.$$

■

**Définition:** L'écart-type de $X$ est

$$\sigma_X = \sqrt{V(X)}.$$

**Définition:** On dit que $X$ vérifie presque sûrement une propriété si la probabilité que $X$ vérifie cette propriété vaut 1.

**Proposition:**

$$V(X) = 0 \iff X \text{ est presque sûrement constante..}$$

□

**Proposition** (Kœnig-Huygens)**:**

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2.$$

■

**Théorème:** Soit $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$.

$$V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2\,\mathrm{Cov}(X,Y)$$

où $\mathrm{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)\,E(Y)$ est la covariance de $X$ et $Y$.

■

**Proposition:** Si $X \perp\!\!\!\perp Y$, alors $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$. D'où

$$V(X+Y) = V(X) + V(Y).$$

■

**Proposition:** Soit $(X_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ des variabls aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, P)$. Alors

$$\begin{aligned} V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) &= \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \mathrm{Cov}(X_i, X_j) \\ &= \sum_{i=1}^{n} V(X_i) + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \mathrm{Cov}(X_i, X_j) \end{aligned}$$

□

**Corollaire:** Avec les notations précédentes, si les $X_i$ sont deux à deux non corrélés (i.e. $\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = 0$ pour $i \neq j$), alors

$$V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i).$$

□

**Corollaire:** Avec les notations précédentes, si les $X_i$ sont indépendantes deux à deux, alors

$$V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i).$$

□

**Corollaire:** Soit $X \sim \mathscr{B}(n,p)$. Alors,

$$V(X) = np(1-p).$$

■

**Proposition** (transfert)**:** Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires à valeurs réelles toutes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, P)$ et $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

$$E\big(f(X_1, \ldots, X_n)\big) = \sum_{x_1 \in X_1(\Omega)} \cdots \sum_{x_n \in X_n(\Omega)} f(x_1, \ldots, x_n) P(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n).$$

■

## 7 Covariance (Hors-Programme)

On se place dans une optique de Big Data. On dispose d'un tableau à $N$ lignes : chaque ligne correspond à une observation et chaque colonne à une "mesure" (ou caractéristique).

Ces caractéristiques peuvent être corrélées plus ou moins fortement et contenir plus ou moins d'information.

Plus la variance est grande, plus il y a d'information.

Soient $X$ et $Y$ deux colonnes. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\left|\operatorname{Cov}(X,Y)\right| \leqslant \sigma_X\,\sigma_Y \quad \text{donc} \quad -1 \leqslant \frac{\operatorname{Cov}(X,Y)}{\sigma_X\,\sigma_Y} \leqslant 1.$$

Si $Y = \alpha X + \beta$ :
$$\left|\frac{\operatorname{Cov}(X,Y)}{\sigma_X, \sigma_Y}\right| = 1.$$

L'objectif est de modifier les colonnes de fa c on à extraire le plus d'informations possible sur le moins de colonnes possibles.

La matrice de covariance est

$$A = \big(\operatorname{Cov}(X_i, X_j)\big)_{\substack{1\leqslant i\leqslant N\\ 1\leqslant j\leqslant N}}.$$

On aimerait que la matrice $A$ soit diagonale avec de grands coefficients diagonaux.

L'année prochaine, nous verrons le théorème suivant :

> **Théorème** (théorème spectral)**:** Toute matrice symétrique réelle est diagonalisable dans une base orthonormée de vecteurs propres.

Il existe donc des variables aléatoires $Y_1, \dots, Y_k$ combinaisons linéaires des $X_1, \dots, X_k$ telles que

$$\big(\operatorname{Cov}(Y_i, Y_j)\big) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_k \end{pmatrix}.$$

De plus, le maximum de $V(\alpha_1 X_1 + \cdots + \alpha_k X_k)$ avec la condition que $\alpha_1^2 + \cdots + \alpha_k^2 = 1$ est $V(Y_1) = \lambda_1$.

**Définition** (Multiplicateurs de Lagrange)**:** Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ où $U$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On cherche $\displaystyle\max_{(x_i)_{i\in[\![1,n]\!]}\in R^n} f(x_1, \dots, x_n)$ avec la contrainte $g(x_1, \dots, x_n)$.

On pose

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}^{n+1} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_n, \lambda) &\longmapsto f(x_1, \dots, x_n) + \lambda g(x_1, \dots, x_n). \end{aligned}$$

On cherche les points critiques de $F$ :

$$\begin{aligned} \nabla F(x_1, \dots, x_n, \lambda) = 0 &\iff \begin{cases} \forall i,\ \dfrac{\partial F}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n, \lambda) = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda}(x_1, \dots, x_n, \lambda) = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \forall i,\ \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n) + \lambda \dfrac{\partial g}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ g(x_1, \dots, x_n) = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Si $(x_1, \dots, x_n, \lambda)$ est le maximum de $F$, alors
$\forall y_1, \dots, y_n, \mu \in \mathbb{R}^{n+1}$ $F(x_1, \dots, x_n, \lambda) \geqslant F(y_1, \dots, y_n, \mu)$
$$f(x_1, \dots, x_n) + \underbrace{\lambda g(x_1, \dots, x_n)}_{=0} \geqslant f(y_1, \dots, y_n)$$

# 8 Loi des grands nombres

**Lemme** (inégalité de Марков [a])**:** Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}^+$ une variable aléatoire positive.

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ P(X \geqslant t) \leqslant \frac{E(X)}{t}$$

ou encore,

$$\forall u \in \mathbb{R}_+^*,\ P\big(X \geqslant u\,E(X)\big) \leqslant \frac{1}{u}.$$

*a.* Марков : Markov

■

**Lemme** (inégalté de Bienaymé-чебышёв [a])**:** Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle. On pose $\mu = E(X)$ et $\sigma = \sigma_X$. Alors,

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ P\big(|X - \mu| \geqslant t\big) \leqslant \frac{\sigma^2}{t^2}$$

ou encore

$$\forall u \in \mathbb{R}_*^+,\ P\big(|X - \mu| \geqslant u\sigma\big) \leqslant \frac{1}{u^2}.$$

*a.* чебышёв : Tchebychev

■

Remarque (Application):
On considère une expérience de Bernoulli de paramètre $p \in ]0,1[$. On répète $n$ fois cette expérience à l'identique et on note $Y_n$ le nombre moyen de succès.

On pose, pour $i \in [\![1, n]\!]$,

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si la } i\text{-ème expérience est un succès} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Les $(X_i)$ sont mutuellement indépendants ; d'où

$$Y_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Et donc

$$E(Y_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \frac{1}{n} np = p.$$

Comme les $(X_i)$ sont deux à deux indépendantes,

$$V(Y_n) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} V(X_i) = \frac{1}{n^2} npq = \frac{pq}{n} \quad \text{où } q = 1 - p.$$

D'où, d'après l'inégalité de Bienaymé-чебышёв,

$$\forall \varepsilon > 0,\ P(|Y_n - p| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{pq}{n\varepsilon^2} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

On en déduit que

$$\forall \varepsilon > 0,\ P(|Y_n - p| < \varepsilon) \geqslant \underbrace{1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2}}_{\substack{\mathcal{s} \\ \text{“seuil”}}}.$$

— Par exemple, avec $\varepsilon = 10^{-2}$ et $\mathcal{s} = 95\,\%$, on a

$$\begin{aligned}\frac{95}{100} = \mathcal{s} = 1 - \frac{pq}{n \times 10^{-4}} &\iff \frac{5}{100} = \frac{pq}{n\,10^{-4}} \\ &\iff 20 = \frac{n\,10^{-4}}{pq} \\ &\iff n = 20 \underbrace{pq}_{\leqslant \frac{1}{4}} 10^4 \leqslant 5 \times 10^4.\end{aligned}$$

En répétant 50 000 fois l'expérience, on est sûr à 95 % que la valeur observée de $Y_{50\,000}$ est dans l'intervalle $\left[p - 10^{-2}, p + 10^{-2}\right]$.

— Avec $n = 12$ et $\mathcal{s} = 95\,\%$, on a

$$\begin{aligned}\frac{95}{100} = \mathcal{s} = 1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2} &\iff \frac{pq}{n\varepsilon^2} = \frac{5}{100} \\ &\iff \frac{\varepsilon^2 n}{pq} = 20 \\ &\iff \varepsilon^2 = \frac{20}{n} pq \leqslant \frac{5}{12}.\end{aligned}$$

Donc, $\varepsilon = \sqrt{\dfrac{5}{12}} \simeq 0{,}65$.

— Avec $n = 12$ et $\varepsilon = 10^{-2}$,

$$\begin{aligned}P\big(|Y_{12} - p| < \varepsilon\big) &\geqslant 1 - \frac{pq}{12 \cdot 10^{-4}} \\ &\geqslant 1 - \frac{1}{48 \cdot 10^{-4}} \\ &\geqslant \underbrace{1 - \frac{1}{48} \times 10^4}_{<0}\end{aligned}$$

**Théorème** (loi faible des grands nombres — Hors-programme)**:** Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de varialbe aléatoires indépedantes de même loi définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, P)$. On note $\mu$ leur espérance commune.

$$\forall \varepsilon > 0,\ \lim_{n\to+\infty} P\Big(\big|\bar{X}_n - \mu\big| > \varepsilon\Big) = 0$$

où $\forall n,\ \bar{X}_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$.

■

**Proposition** (lemme des coalitions)**:** Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires à valeurs réelles d'un même ensemble probabilisé mutuellement indépendantes. Soient $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^{n-p} \to \mathbb{R}$. Alors, $f(X_{i_1}, \ldots, X_{i_p})$ et $g(X_{j_1}, \ldots, X_{j_{n-p}})$ sont indépendantes si

$$\begin{cases}\{i_1, \ldots, i_p\} \cap \{j_1, \ldots, j_{n-p}\} = \varnothing \\ \forall k \neq \ell,\ i_k \neq i_\ell \text{ et } j_k \neq j_\ell.\end{cases}$$

CHAPITRE

# 32 FAMILLES SOMMABLES

## 1 Motivation

La série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ est semi-convergente. On a $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln 2$, d'où,

$$-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \cdots = -\ln 2.$$

On change l'ordre :

$$\begin{aligned}
&\overbrace{-1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}}^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}} - \overbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8}}^{-\frac{1}{6}+\frac{1}{8}} - \overbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{12}}^{-\frac{1}{10}+\frac{1}{12}} + \cdots \\
&= \frac{1}{2}\left(-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \cdots\right) \\
&= \frac{-\ln 2}{2}
\end{aligned}$$

**Théorème** (réarrangement de Riemann)**:** Soit $\sum u_n$ une série semi-convergente réelle.

$$\forall \ell \in \mathbb{R}, \exists \sigma : \mathbb{N} \xrightarrow{\text{bij}} \mathbb{N}, \sum_{n=1}^{+\infty} u_{\sigma(n)} = \ell.$$

## 2 Familles sommables positives

Dans ce paragraphe, toutes les familles considérées sont positives.

**Définition:** Soit $(u_i)_{i\in I} \in \left(\mathbb{R}^+\right)^I$.

Si $\left\{ \sum_{i \in J} u_i \;\middle|\; \begin{array}{c} J \subset I \\ J \text{ fini} \end{array} \right\}$ est majorée, alors on dit qu'elle est sommable et on définit la somme des $(u_i)_{i \in I}$ par

$$\sum_{i \in I} u_i = \sup_{\substack{J \subset I \\ J \text{ fini}}} \sum_{j \in J} u_j.$$

Sinon, la famille n'est pas sommable et on définit

$$\sum_{i \in I} u_i = +\infty.$$

**Théorème:** Soit $(u_i)_{i \in I} \in \left(\mathbb{R}^+\right)^I$ sommable et soit $\sigma : I \to I$ une bijection. Alors

$$\sum_{i \in I} u_{\sigma(I)} = \sum_{i \in I} u_i.$$

■

**Corollaire** (sommation par paquets)**:** Soit $(u_i)_{i \in I} \in \left(\mathbb{R}^+\right)^I$ et $(I_j)_{j \in J}$ une partition de $I$ :

$$I = \bigsqcup_{j \in J} I_j.$$

$$(u_i)_{i \in I} \text{ est sommable} \iff \begin{cases} \forall j \in J, (u_i)_{i \in I_j} \text{ est sommable,} \\ \left(\sum_{i \in I_j} u_i\right)_{j \in J} \text{ est sommable.} \end{cases}.$$

Dans ce cas,

$$\sum_{i \in I} u_i = \sum_{j \in J} \sum_{i \in I_j} u_i.$$

□

**Corollaire** (Fubini positif)**:** Soit $(u_{i,j})_{\substack{i \in I \\ j \in J}} \in \left(\mathbb{R}^+\right)^{I \times J}$.

$$\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} u_{i,j} = \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} u_{i,j}.$$

■

**Corollaire:** Soient $(a_i)_{i \in I}$ et $(b_j)_{j \in J}$ deux familles sommables de réels positifs.

$$\sum_{\substack{i \in I \\ j \in J}} a_i b_j = \left(\sum_{i \in I} a_i\right) \left(\sum_{j \in J} b_j\right).$$

■

Dans la preuve précédente, on a utilisé la linéarité de la somme :

**Proposition:** Soient $(a_i)_{i\in I} \in \left(\mathbb{R}^+\right)^I$, $(b_i)_{i\in I} \in \left(\mathbb{R}^+\right)^I$ et $\lambda \in \mathbb{R}^+$.

1. $\displaystyle\sum_{i\in I}(a_i + b_i) = \sum_{i\in I} a_i + \sum_{i\in I} b_i$ ;
2. $\displaystyle\sum_{i\in I}(\lambda a_i) = \lambda \sum_{i\in I} a_i$.

■

**Proposition:** Soient $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_i)_{i\in I}$ deux familles de réels positifs telles que

$$\forall i \in I,\ 0 \leqslant a_i \leqslant b_i.$$

Si $(b_i)_{i\in I}$ est sommable, alors $(a_i)_{i\in I}$ aussi, et, dans ce cas,

$$\sum_{i\in I} a_i \leqslant \sum_{i\in I} b_i.$$

■

## 3 Familles sommables réelles

**Définition:** Soit $(u_i)_{i\in I} \in \mathbb{R}^I$. On dit que $(u_i)_{i\in I}$ est sommable si $\left(|u_i|\right)_{i\in I}$ est sommable.

Remarque:
Une famille sommable n'est pas une famille dont on peut calculer la somme mais la somme des valeurs absolues.

**Proposition – Définition:** Soit $(u_i)_{i\in I} \in \mathbb{R}^I$. On pose, pour tout $i \in I$,

$$u_i^+ = \begin{cases} u_i & \text{si } u_i \geqslant 0, \\ 0 & \text{sinon;} \end{cases}$$

$$u_i^- = \begin{cases} -u_i & \text{si } u_i \leqslant 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors,

$$(u_i) \text{ sommable} \iff (u_i^+) \text{ et } (u_i^-) \text{ sont sommables.}$$

Dans ce cas, on définit

$$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{i\in I} u_i^+ - \sum_{i\in I} u_i^-.$$

■

**Proposition:** Soient $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_i)_{i\in I}$ deux familles sommables et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors,

$(a_i+b_i)_{i\in I}$ est sommable, $(\lambda a_i)_{i\in I}$ aussi et

$$\sum_{i\in I}(a_i+b_i)=\sum_{i\in I}a_i+\sum_{i\in I}b_i,$$
$$\sum_{i\in I}\lambda a_i=\lambda\sum_{i\in I}a_i.$$

En d'autres termes, $\ell^1(I)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^I$ et

$$\begin{aligned} S : \ell^1(I) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (u_i)_{i\in I} &\longmapsto \sum_{i\in I} u_i \end{aligned}$$

est linéaire où $\ell^1(I)=\{(u_i)\in\mathbb{R}^I \mid (u_i) \text{ sommable}\}$. ■

**Proposition:** Soit $(u_i)_{i\in I}\in\mathbb{R}^I$ sommable et $\sigma : I\to I$ une bijection. Alors $(u_{\sigma(i)})_{i\in I}$ est sommable et

$$\sum_{i\in I}u_{\sigma(i)}=\sum_{i\in I}u_i.$$

■

**Corollaire** (sommation par paquets)**:** Soit $(u_i)_{i\in I}\in\mathbb{R}^I$ et $(I_j)_{j\in J}$ une partition de $I$.

$$(u_i)_{i\in I} \text{ sommable} \quad\Longrightarrow\quad \begin{cases}\forall j\in J,\ (u_i)_{i\in I_j} \text{ sommable,}\\ \left(\displaystyle\sum_{i\in I_j}u_i\right)_{j\in J} \text{ sommable.}\end{cases}$$

Dans ce cas,

$$\sum_{i\in I}u_i=\sum_{j\in J}\sum_{i\in I_j}u_i.$$

**Corollaire** (Fubini)**:** Soit $(u_{i,j})_{\substack{i\in I\\ j\in J}}\in\mathbb{R}^{I\times J}$ sommable. Alors,

$$\sum_{i\in I}\sum_{j\in J}u_{i,j}=\sum_{j\in J}\sum_{i\in I}u_{i,j}.$$

**Corollaire:** Soient $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_j)_{j\in J}$ deux familles sommables. Alors $(a_ib_j)_{\substack{i\in I\\ j\in J}}$ est sommable et

$$\sum_{i\in I}\sum_{j\in J}a_ib_j=\left(\sum_{i\in I}a_i\right)\left(\sum_{j\in J}b_j\right).$$

■

# 4 Familles sommables de nombres complexes

**Définition:** Soit $(u_i)_{i\in I} \in \mathbb{C}^I$. On dit qu'elle est sommable si $\left(|u_i|\right)_{i\in I}$ est sommable.

**Proposition:** Soit $(u_i)_{i\in I} \in \mathbb{C}^I$.

$$(u_i)_{i\in I} \text{ sommable} \iff \left(\mathfrak{Re}(u_i)\right)_{i\in I} \text{ et } \left(\mathfrak{Im}(u_i)\right)_{i\in I} \text{ sont sommables.}$$

■

**Définition:** Soit $(u_k)_{k\in I} \in \mathbb{C}^I$ sommable. On définit

$$\sum_{k\in I} u_k = \sum_{k\in I} \mathfrak{Re}(u_k) + i \sum_{k\in I} \mathfrak{Im}(u_k).$$

On a exactement les mêmes propriétés que pour des familles réelles. □

## 5 Produit de Cauchy de deux séries

Rappel:

Avec $P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$ et $Q = \sum_{\ell=0}^{q} b_\ell X^\ell$, on a

$$\begin{aligned} PQ &= \sum_{k=0}^{p} \sum_{\ell=0}^{q} a_k b_\ell X^{k+\ell} \\ &= \sum_{m=0}^{p+q} \left( \sum_{k=0}^{\min(p,m)} a_k b_{m-k} \right) X^m. \end{aligned}$$

**Définition:** Soient $(u_n)$, $(v_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Le produit de Cauchy des séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ est la série $\sum w_n$ où

$$\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}.$$

**Théorème:** Soient $(u_n)$, $(v_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent absolument, alors leur produit $\sum w_n$ converge absolument et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left( \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right) \left( \sum_{n=0}^{+\infty} v_n \right).$$

■

CHAPITRE

33

# ANNEXE

## 1 Algorithme de Metropolis-Hastings

On a un texte à déchiffrer. Il a été codé par substitution : on a remplacé une lettre par une autre (par exemple, "$A \to W$" et "'$B \to U$"). L'algorithme de Metropolis-Hastings permet de déchiffrer ce type de message.

Cet algorithme fonctionne itérativement, et, pour chaque lettre, il tente de la permuter avec une autre et il conserve la meilleur.

Pour comparer deux permutations, il utilise des *bigrammes* : un couple de deux lettres consécutives (où l'on a supprimé les espaces). Avec un entrainement sur un autre texte de la même langue, l'algorithme determine la *plausibilité* de chaque bigramme. Au moment de comparer deux permutations, il compare les plausibilités des bigrammes obtenus à la suite des deux permutations.

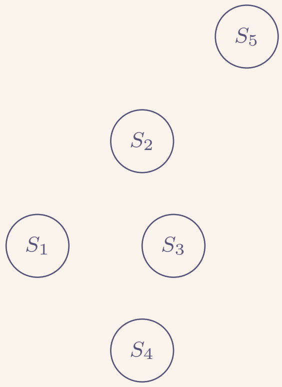
On se place dans le groupe symétrique et la fonction qui donne la plausibilité associée à une permutation est une fonction du groupe symétrique dans les réels : $p : S_n \longrightarrow \mathbb{R}$ (en fran c ais, $n = 26$).

L'algorithme ressemble donc à :

> On choisit une permutation.
>
> Si, en l'appliquant au texte, la plausibilité augmente, on conserve cette permutation. Sinon, on ne la conserve pas.
>
> Et on répète.

Cet algorithme utilise donc une marche aléatoire, il ne teste pas *toutes* les permutations (avec $n = 26$, on a $\#S_n \geqslant 10^{61}$).

> **Définition** (Chaîne de Markov)**:** Le système est dans un état $E$ et peut passer dans d'autres états avec des probabilités associées. Ce changement d'état ne dépend **que** de l'état actuel, et n'utilise pas les états passés.




On associe à une chaîne de Марков une matrice de transition :

$$\begin{array}{cc} \begin{matrix} i \\ \downarrow \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} & & \\ & P(S_j \mid S_i) & \\ & & \end{pmatrix} & \leftarrow j. \end{array}$$

On souhaite trouver $\max\limits_{x \in S} f(x)$. Pour cela, on considère le changement $x \longrightarrow x'$ et on pose $\alpha = \frac{f(x')}{f(x)}$. On ne conserve $x'$ avec une probabilité de $\alpha$, sinon, on revient à $x$.

Mais, la probabilité de transition est proportionnelle à $f(x')$ et donc, pour que ce choix soit marqué, il faut que la fonction $f$ ait une grande variance.

Cette méthode de choix ne peut être appliquée que si la chaîne de Марков est symétrique et connexe. La symétrie de la chaîne de Марков est assurée par le fait qu'une permutation est bijective, on peut donc appliquer sont inverse pour revenir à un état précédent.

## 2 Gradient automatique

On considère l'ensemble
$$D = \{a + b\varepsilon \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$$
où $\varepsilon \notin \mathbb{R}$ donc $\varepsilon \neq 0$ mais $\varepsilon^2 = 0$ (similaire à $i$ dans les complexes).

Cet ensemble peut existe : avec $D = {}^{\mathbb{R}[X]}/_{\sim}$ où

$$\begin{aligned} P \sim Q &\iff P \equiv Q \ \left[X^2\right] \\ &\iff X^2 \mid P - Q. \end{aligned}$$

On définit donc $\varepsilon = \overline{X} \neq 0$ : $\varepsilon^2 = \overline{X^2} = \overline{0} = 0$. En appliquant la division euclidienne de $P$ par $X^2$, on a $P = X^2 Q + R$ et donc $\overline{P} = \overline{R} = \overline{a + bX} = a + b\varepsilon$.

C'est comme ça que l'on a définit $\mathbb{C}$ : en effet, on a $\mathbb{C} = {}^{\mathbb{R}[X]}/_{(X^2+1)}$.

On essaie de multiplier deux *duaux* avec la distributivité du produit :

$$(1 + 2\varepsilon)(3 + 4\varepsilon) = 3 + 4\varepsilon + 6\varepsilon + 8\varepsilon^2 = 3 + 10\varepsilon.$$

On considère maintenant une fonction réelle

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto 3x^2 - 5x^2 + 2x + 6 \end{aligned}$$

et on pose $F$ l'extension de $f$ dans l'anneau des nombres duaux.

$$\begin{aligned}
F(x+\varepsilon) &= 3(x+\varepsilon)^3 - 5(x+\varepsilon)^2 + 2(x+\varepsilon) + 6 \\
&= 3(x^3 + 3x^2\varepsilon + \cancel{3x\varepsilon^2} + \cancel{\varepsilon^3}) - 5(x^2 + 2x\varepsilon + \cancel{\varepsilon^2}) + 2x + 2\varepsilon + 6 \\
&= \underbrace{(3x^3 - 5x^2 + 2x + 6)}_{f(x)} + \varepsilon \underbrace{(9x^2 - 10x + 2)}_{f'(x)} \\
&= f(x) + \varepsilon f'(x)
\end{aligned}$$

On généralise : soient $f$ et $g$ deux fonctions définies et dérivables sur $I \subset \mathbb{R}$ à valeurs réelles. On pose

$$\forall x \in I,\ \forall y \in \mathbb{R},\ \begin{cases} F(x+y\varepsilon) = f(x) + y\varepsilon f'(x), \\ G(x+y\varepsilon) = g(x) + y\varepsilon g'(x). \end{cases}$$

Soit $x \in I$ et $y \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
F(x+\varepsilon) + G(x+\varepsilon) &= \big(f(x) + g(x)\big) + \varepsilon\big(f'(x) + g'(x)\big); \\
F(x+\varepsilon) \times G(x+\varepsilon) &= \big(f(x) + \varepsilon f'(x)\big)\big(g(x) + \varepsilon g'(x)\big) \\
&= f(x)\,g(x) + \varepsilon\big(f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x)\big) \\
&= (f \times g)(x) + \varepsilon(f \times g)'(x) \\
F\big(G(x+\varepsilon)\big) &= F\big(g(x) + \varepsilon g'(x)\big) \\
&= f\big(g(x)\big) + g'(x)\varepsilon f'\big(g(x)\big)
\end{aligned}$$

Ces opérations sur les fonctions dans l'anneau dual sont compatibles avec les règles de dérivation habituelles.

On peut calculer les dérivées de fonctions. À la main, c a prend autant de temps que d'utiliser les techniques habituelles. Cependant, informatiquement, le calcul de dérivée est simple ; en Python on peut le faire avec :

```python
class Dual:
  def __init__(self, x, y):
    self.x = x
    self.y = y

  def __add__(self, other):
    return Dual(self.x + other.x, self.y + other.y)

  def __mul__(self, other):
    return Dual(self.x * other.x, self.x * other.y + self.y * other.x)

  def exp(self):
    return Dual(exp(self.x), self.y * exp(self.x))
```

Par example, pour chercher $\min\limits_{x\in\mathbb{R}} \left(x^4 + 3x^3 - 5x^2 + 2\right)$, on pose $f(x_0) = f(x_0 + \varepsilon f'(x_0))$ et $x_{n+1} = x_n - hf'(x_n)$ où $h > 0$. La suite $(x_n)$ tends vers $x^*$ où $x^*$ est un minimum local.

Ce calcul de dérivée est exact, on ne calcule pas $f'(x) \simeq \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$.

Pour le calcul de gradient dans le cas de deux dimensions, on considère deux nombres vérifiant les propriétés de “$\varepsilon$” : $\varepsilon_1$ et $\varepsilon_2$.

# INDEX