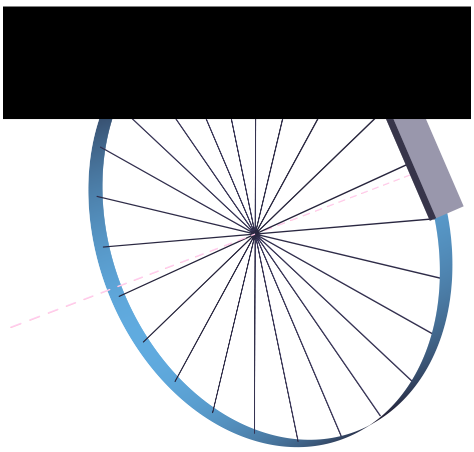
TP 21

Me

d'une roue

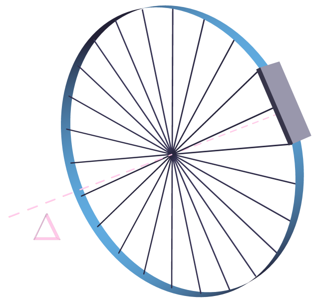
[redacted]



Hugo Salou
Iwan Derouet

MP2I

L'objectif de ce TP est de mesurer le moment d'inertie d'une roue de vélo. Pour cela, on fixe un téléphone sur celle-ci, comme montré dans le schéma ci-contre. Pour modéliser la situation, on considère que l'énergie potentielle de pesanteur $\mathscr{E}_p$ est nulle au point le plus bas de la roue. On suppose que l'énergie mécanique du système roue et téléphone est conservée au cours d'une révolution. On cherche à exprimer J, le moment d'inertie de la roue, en fonction des données de l'expérience.

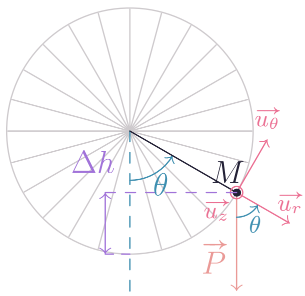


Comme l'énergie mécanique est conservée, on a

$$\mathscr{E}_{m\,\text{haut}} = \mathscr{E}_{m\,\text{bas}}$$

où $\mathscr{E}_{m\,\text{haut}}$ représente l'énergie mécanique au point le plus haut de la roue, et $\mathscr{E}_{m\,\text{bas}}$ l'énergie mécanique au point le plus bas. On sait que l'énergie cinétique $\mathscr{E}_c(\omega)$ peut être exprimée à l'aide de la formule suivante :

$$\mathscr{E}_c(\omega) = \frac{1}{2}\,J\,\omega^2.$$



On sait que l'énergie potentielle de pesanteur $\mathscr{E}_p(\Delta h)$ peut s'exprimer de la façon suivante :

$$\mathscr{E}_p(\Delta h) = m\,g\,\Delta h$$

où m est la masse de l'objet, g est l'accélération gravitationnelle et Δh est la difference de hauteur avec le bas de la roue. En effet, en se plaçant dans un repère cylindrique $(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_z})$, on a

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\mathscr{E}_p &= -\,\delta\,W(\overrightarrow{P})\\
&= -\,\overrightarrow{P}\cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM}\\
&= -\,m\,g\,(\cos\theta\;\overrightarrow{u_r} - \sin\theta\;\overrightarrow{u_\theta})\cdot(\mathrm{d}r\,\overrightarrow{u_r} + r\,\mathrm{d}\theta\,\overrightarrow{u_\theta} + \mathrm{d}z\,\overrightarrow{u_z})\\
&= m\,g\,r\,\sin\theta\;\mathrm{d}\theta.
\end{aligned}$$

D'où

$$\frac{\mathrm{d}\mathscr{E}_p}{\mathrm{d}\theta} = m\,g\,r\,\sin\theta$$

et donc

$$\mathscr{E}_p(\theta) = m\,g\,\underbrace{(-r\,\cos\theta)}_{\Delta h} + \underbrace{\mathscr{E}_p(0)}_{=0}.$$

A l'aide de ces formules, on peut en déduire l'expression de l'énergie mécanique $\mathscr{E}_m$:

$$\mathscr{E}_m = \frac{1}{2}\,J\,\omega^2 + m\,g\,\Delta h.$$

En calculant la différence d'énergie mécanique entre le point le plus haut de la roue et le plus bas, on peut en déduire une expression du moment d'inertie J. En effet, comme l'énergie mécanique se conserve, la différence est nulle. D'où

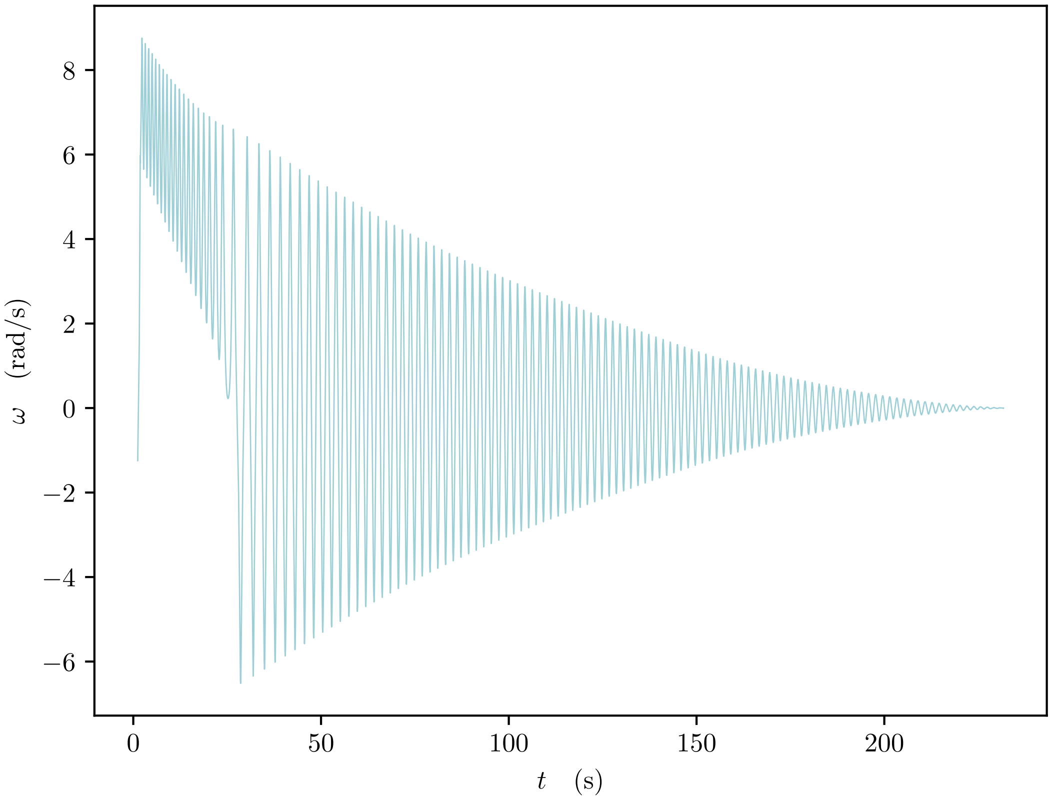
$$\frac{1}{2}\,J\,\omega_{\text{bas}}^2 + 0 = \frac{1}{2}\,J\,\omega_{\text{haut}}^2 - 2\,m\,g\,r$$

et donc

$$\omega_{\text{bas}}^2 - \omega_{\text{haut}}^2 = \frac{4\,m\,g\,r}{J} = \Omega^2.$$

La valeur de Ω est constante et peut être mesurée. Avec elle, on peut en déduire une valeur pour J.

On lance la roue et, en utilisant le gyroscope interne au téléphone, on mesure la valeur de $\dot\theta$ jusqu'à ce que la roue s'arrête. On obtient le graph suivant :



Entre $t = 0$ s et $t = 30$ s, le mouvement est révolutif ; Après $t = 30$ s, le mouvement est pendulaire.

Pour déterminer la valeur du moment d'inertie J de la roue pour le mouvement révolutif, on mesure les "pics" de la courbe avant $t = 30$ s. Pour les "pics" hauts, on mesure ω_{haut}, pour les "pics" bas, on mesure ω_{bas}. De ces deux mesures, on en déduit une valeur pour Ω^2.

ω_{haut} (rad/s)	ω_{bas} (rad/s)	Ω^2 (rad/s)
8,411	5,255	43,13
8,224	5,056	42,07
8,154	4,844	43,02
8,061	4,631	43,53
7,921	4,406	43,33
7,828	4,194	43,69
7,688	3,955	43,46
7,571	3,717	43,50

D'après ces mesures, on a $\Omega^2 = 43{,}22 \pm 0{,}2\ \text{rad}^2/\,\text{s}^2$. En effet, la principale source d'erreur pour cette mesure est la précision de l'expérimentateur quant à la mesure de détermination d'un minimum ou d'un maximum d'une oscillation. L'écart type experimental vaut $s_{\text{exp}} = 0,5121$ et nous avons estimez l'incertitude en utilisant les incertitudes de type A.

Cependant, déterminer la valeur du moment d'inertie J, en utilisant l'expression trouvée précédemment, nécessite d'avoir la valeur de la masse du téléphone m, et le rayon de sa trajectoire circulaire r. Pour la mesure de m, l'unique source d'erreur provient de la résolution de la balance (précision : $\pm 0{,}1$ g). On a mesuré $m = 209{,}2 \pm 0{,}1$ g. Pour la mesure de r, il y a deux potentielles sources d'erreur : le jugement de l'expérimentateur et la résolution de la règle. On estime les incertitudes à $u(r) = 5\,\text{mm}$. On mesure donc $r = 270 \pm 5$ mm. En utilisant l'expression

$$J = \frac{4\, m\, g\, r}{\Omega^2},$$

on détermine la valeur du moment d'inertie et ses incertitudes associées. De cette expression, on en déduit que

$$\begin{aligned} u^2(J) &= \left(\frac{\partial J}{\partial m}\right)^2 u^2(m) + \left(\frac{\partial J}{\partial g}\right)^2 u^2(g) + \left(\frac{\partial J}{\partial r}\right)^2 u^2(r) + \left(\frac{\partial J}{\partial \Omega^2}\right)^2 u^2(\Omega^2) \\ &= 16\left(\frac{g^2 r^2}{\Omega^4} u^2(m) + \frac{m^2 r^2}{\Omega^4} u^2(g) + \frac{m^2 g^2}{\Omega^4} u^2(r) + \frac{m^2 g^2 r^2}{\Omega^8} u^2(\Omega^2)\right). \end{aligned}$$

Et, après application numérique, on détermine $u(J) = 0{,}001\,\text{kg/m}^2$ (nous avons utilisés pour valeur de l'accélération gravitationnelle $g = 9{,}81 \pm 0.02$ m/s^2). On a donc mesuré $J = 0{,}0513 \pm 0{,}001$ kg/m^2.

On peut résumer les valeurs obtenues et les sources d'erreurs associées dans un tableau :

GRANDEUR	VALEUR MESURÉE	INCERTITUDE ASSOCIÉE	SOURCE(S) D'ERREUR
Masse du téléphone m	$m = 209{,}2$ g	$u(m) = 0{,}1$ g	– Précision de la balance
Rayon de la roue r	$r = 270\,\text{mm}$	$u(r) = 5\,\text{mm}$	– Précision du mètre
Champ de pesanteur terrestre g	$g = 9{,}81\,\text{m/s}^2$	$u(g) = 0{,}02$ m/s^2	– Précision de la valeur de la constante
Ω^2	$\Omega^2 = 43{,}22$ rad^2/ s^2	$u(\Omega^2) = 0{,}2\,\text{rad}^2/\,\text{s}^2$	– Jugement de l'expéri–mentateur

Dans la seconde partie de la mesure, le mouvement est pendulaire. On calcule les moments cinétique des forces s'appliquant au système :

$$\begin{cases} \mathscr{M}_\Delta\left(\overrightarrow{P_m}\right) = -m\, g\, r \sin\theta, \\ \mathscr{M}_\Delta\left(\overrightarrow{L}\right) = 0. \end{cases}$$

où $\overrightarrow{L}$ est la force de la liaison pivot d'axe Δ, et $\overrightarrow{P}$ est le poids du téléphone. D'où

$$J'\ddot{\theta} = -(m\, g\, r)\sin\theta.$$

Par identification avec l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique (dans le cas de petites oscillations), on trouve

$$\left.\begin{aligned} \ddot{\theta} + \frac{m\,g\,r}{J'}\sin\theta &= 0 \\ \ddot{\theta} + \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \sin\theta &= 0 \end{aligned}\right\} \implies J' = \frac{m\,g\,r\,T^2}{4\pi^2}.$$

On mesure la période du signal en comptant les oscillations sur un intervalle de temps donné. On trouve, entre $t = 100$ s et $t = 150$ s, qu'il y a 27 oscillations. D'où $T = {}^{27}/_{50} = 0{,}54$ s^{-1}. On estime l'incertitude du nombre d'oscillations à $\pm\,2$ oscillations. On en déduit que $u(T) = 0{,}03$ s^{-1}.

Avec la période du signal, on peut déterminer le moment d'inertie J' : on a $J' = 0{,}0640 \pm 0{,}001$ kg/m^2.

En effet, l'incertitude associée au moment d'inerte $u(J')$ peut être déterminée par l'expression suivante :

$$\begin{aligned} u^2(J') &= \left(\frac{\partial J'}{\partial m}\right)^2 u^2(m) + \left(\frac{\partial J'}{\partial g}\right)^2 u^2(g) + \left(\frac{\partial J'}{\partial r}\right)^2 u^2(r) + \left(\frac{\partial J'}{\partial T}\right)^2 u^2(T) \\ &= \frac{1}{16\pi^4}\left(g^2\, r^2\, T^4\; u^2(m) + m^2\, r^2\, T^4\; u^2(g) + m^2\, g^2\, T^4\; u^2(r) + 4\, m^2\, g^2\, r^2\, T^2\; u^2(T)\right). \end{aligned}$$

On obtient donc $u(J') = 0{,}001$ kg/m^2. De même, on peut résumer les grandeurs et leurs sources d'erreur dans un tableau :

Grandeur	Valeur mesurée	Incertitude associée	Source(s) d'erreur
Masse du téléphone m	$m = 209{,}2$ g	$u(m) = 0{,}1$ g	– Précision de la balance
Rayon de la roue r	$r = 270\,\text{mm}$	$u(r) = 5\,\text{mm}$	– Précision du mètre
Champ de pesanteur terrestre g	$g = 9{,}81\,\text{m/s}^2$	$u(g) = 0{,}02\ \text{m/s}^2$	– Précision de la valeur de la constante
Période T	$T = 0{,}54\ \text{s}^{-1}$	$u(T) = 0{,}03\ \text{s}^{-1}$	– Jugement de l'expérimentateur

Pour conclure, grâce à ces deux protocoles, on peut donc mesurer le moment d'inertie d'une roue de vélo en utilisant uniquement le gyroscope à l'intérieur d'un téléphone.