

ANNEXE D

*Lemme d'Arden et retour
sur le théorème de Kleene*

Hugo SALOU MPI*

Dernière mise à jour le 7 mars 2023

Table des matières

EXEMPLE (Lemme d'ARDEN) :

Soient K et L deux langages. Résoudre $X = K \cdot X \cup L$ pour X un langage. (On trouve $X = K^* \cdot L$.) On suppose que $\varepsilon \notin K$. On procède par double-inclusion.

“ \supseteq ” Soit X un langage tel que $X = K \cdot X \cup L$. Montrons par récurrence « si w est un mot de X de taille n , alors $w \in K^* \cdot L$.

— Si $n = 0$, alors $w \in L$ car $\varepsilon \notin K$. Ainsi, $w = \varepsilon \cdot w$ et $\varepsilon \in K^*$. On en déduit que $w \in K^* \cdot L$.

— Si $|w| = n$, alors

— si $w \in L$, alors $w = \varepsilon \cdot w$ et donc $w \in K^*L$.

— si $w = v \cdot w'$ où $v \in K$ et $w' \in X$, alors $|w'| < |w|$. Ainsi, par hypothèse de récurrence, $w' \in K^* \cdot L$. Ainsi, $v \cdot w' \in K^* \cdot L$.

Ainsi, $X \subseteq K^* \cdot L$.

“ \subseteq ” Soit $w \in K^* \cdot L$. Il existe donc $n \in \mathbb{N}$, $(v_1, \dots, v_n) \in K^n$ et $w' \in L$ tels que $w = v_1 \dots v_n \cdot w'$. Alors, $w' \in X$ donc $v_n \cdot w' \in X$ donc ... donc $v_1 v_2 \dots v_n w' \in X$. Ainsi, $w \in X$.

EXEMPLE :

On considère l'automate ci-dessous.

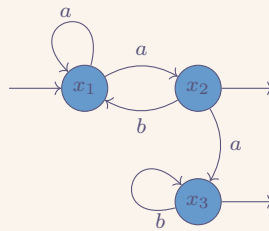


FIGURE 1 – Automate exemple (\mathcal{A})

On pose $X_i = \mathcal{L}((\Sigma, \mathcal{Q}, \{i\}, F, \delta))$, où x_i est l'unique point de départ. Ainsi, $\mathcal{L}(\mathcal{A}) = \bigcup_{i \in I} X_i$. Déterminons les valeurs de X_1, X_2 et X_3 . On applique un algorithme similaire au « pivot de Gauß. »

$$\begin{aligned}
\left. \begin{aligned}
X_1 &= \{a\} \cdot X_2 \cup \{a\} X_1 \\
X_2 &= \{b\} \cdot X_1 \cup \{a\} \cdot X_3 \cup \{\varepsilon\} \\
X_3 &= \{b\} X_3 \cup \{\varepsilon\}
\end{aligned} \right\} \iff \begin{cases}
X_1 = \{a\}^* \cdot \{a\} \cdot X_2 \\
X_2 = \mathcal{L}(ba^* \cdot a) X_2 \cup \{a\} X_3 \cup \{\varepsilon\} \\
X_3 = \{b\} \cdot X_3 \cup \{\varepsilon\}
\end{cases} \\
\iff \begin{cases}
X_1 = \mathcal{L}(a^* \cdot a) X_2 \\
X_2 = \mathcal{L}((b \cdot a^* \cdot a)^*) \cdot (\{a\} X_3 \cup \{\varepsilon\}) \\
X_3 = \{b\} X_3 \cup \{\varepsilon\}
\end{cases} \\
\iff \begin{cases}
X_1 = \mathcal{L}(a^* \cdot a) X_2 \\
X_2 = \mathcal{L}((b \cdot a^* \cdot a)^*) \cdot (\{a\} X_3 \cup \{\varepsilon\}) \\
X_3 = \mathcal{L}(b^*)
\end{cases} \\
\iff \begin{cases}
X_1 = \mathcal{L}(a^* \cdot a) X_2 \\
X_2 = \mathcal{L}((ba^* a)^* \cdot (ab^* \mid \varepsilon)) \\
X_3 = \mathcal{L}(b^*)
\end{cases} \\
\iff \begin{cases}
X_1 = \mathcal{L}(a^* \cdot a \cdot (ba^* a)^* \cdot (ab^* \mid \varepsilon)) \\
X_2 = \mathcal{L}((ba^* a)^* \cdot (ab^* \mid \varepsilon)) \\
X_3 = \mathcal{L}(b^*)
\end{cases}
\end{aligned}$$

On peut généraliser la méthode employée dans l'exemple précédent pour montrer que tout langage reconnaissable est régulier.