Td n° 1

Ordre & Induction

Hugo Salou MPI⋆

Dernière mise à jour le 6 septembre 2022

Exercice 1

1. On a $\forall \ell \in \mathcal{L},\ @([\,], \ell) = \ell\,;\ \forall \ell_1, \ell \in \mathcal{L},\ @\big(::(x, \ell_1), \ell\big) = ::\big(x, @(\ell_1, \ell)\big)$.
2. On fait une induction. Comme dans l'énoncé, on passe le '@' en infixe. Notons P_ℓ : "ℓ @ $[\,] = \ell$".
   Montrons $P_{[\,]}$: on sait que $[\,]$ @ $[\,] = [\,]$ par définition de @.
   On suppose P_ℓ est vraie pour une certaine liste $\ell \in \mathcal{L}$. Montrons que, $\forall x \in \mathbb{N}$, $P_{::(x,\ell)}$ vrai. Soit $x \in \mathbb{N}$.
$$\begin{aligned}\big(::(x,\ell)\big)\ @\ [\,] &\overset{(\text{def})}{=} ::(x, \ell\ @\ [\,]) \\ &\overset{(P_\ell)}{=} ::(x, \ell).\end{aligned}$$
3. Notons P_{ℓ_1} : "$\forall \ell_2, \ell_3 \in \mathcal{L},\ (\ell_1\ @\ \ell_2)\ @\ \ell_3 = \ell_1\ @\ (\ell_2\ @\ \ell_3)$", où $\ell_1 \in \mathcal{L}$ est une liste.
   Soient $\ell_2, \ell_3 \in \mathcal{L}$ deux listes. On a, par définition de @, $([\,]\ @\ \ell_2)\ @\ \ell_3 = \ell_2\ @\ \ell_3$ et $[\,]\ @\ (\ell_2\ @\ \ell_3) = \ell_2\ @\ \ell_3$.
   Soit $\ell_1 \in \mathcal{L}$ une liste telle que P_{ℓ_1}. Soient $\ell_2, \ell_2 \in \mathcal{L}$ deux listes. Soit $x \in \mathbb{N}$. Montrons que $P\big(::(x, \ell_1)\big)$:
$$\begin{aligned}\big(::(x,\ell_1)\ @\ \ell_2\big)\ @\ \ell_3 &= ::(x, \ell_1\ @\ \ell_2)\ @\ \ell_3 \\ &= ::\big(x, (\ell_1\ @\ \ell_2)\ @\ \ell_3\big) \\ &\overset{(H)}{=} ::\big(x, \ell_1\ @\ (\ell_2\ @\ \ell_3)\big) \\ &= ::(x, \ell_1)\ @\ (\ell_2\ @\ \ell_3).\end{aligned}$$
4. Notons P_{ℓ_1} : "$\forall \ell_2 \in \mathcal{L},\ \texttt{rev}(\ell_1\ @\ \ell_2) = \texttt{rev}(\ell_2)\ @\ \texttt{rev}(\ell_1)$. Soit $\ell_2 \in \mathcal{L}$.
   On a $\texttt{rev}([\,]\ @\ \ell_2) = \texttt{rev}(\ell_2) = \texttt{rev}(\ell_2)\ @\ \texttt{rev}([\,])$.
   On suppose P_{ℓ_1} vraie pour une certaine liste $\ell_1 \in \mathcal{L}$. Soit $x \in \mathbb{N}$.
$$\begin{aligned}\texttt{rev}(::x, \ell_1)\ @\ \ell_2) &= \texttt{rev}(::(x, \ell_1\ @\ \ell_2) \\ &= \texttt{rev}(\ell_1\ @\ \ell_2)\ @\ ::(x, [\,]) \\ &= \big(\texttt{rev}(\ell_2)\ @\ \texttt{rev}(\ell_1)\big)\ @\ ::(x, [\,]) \\ &= \texttt{rev}(\ell_2)\ @\ \big(\texttt{rev}(\ell_1)\ @\ ::(x, [\,])\big) \\ &= \texttt{rev}(\ell_2)\ @\ \texttt{rev}\big(::(x, \ell_1)\big)\end{aligned}$$
5. Notons, pour toute liste $\ell \in \mathscr{L}$, P_ℓ : "$\texttt{rev}\big(\texttt{rev}(\ell)\big) = \ell$".
   Montrons que $P_{[\,]}$ est vraie : $\texttt{rev}(\texttt{rev}([\,])) = \texttt{rev}([\,]) = [\,]$.
   Soit une liste $\ell \in \mathcal{L}$ telle que P_ℓ soit vraie. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrons que $P_{::(x,\ell)}$ vraie :
$$\begin{aligned}\texttt{rev}(\texttt{rev}(::(x,\ell))) &= \texttt{rev}(\texttt{rev}(\ell)\ @\ ::(x, [\,])) \\ &= \texttt{rev}(::(x, [\,]))\ @\ ::(x, \ell)\ @\ \ell \\ &= [\,]\ @\ ::(x, [\,])\ @\ \ell \\ &= ::(x, [\,])\ @\ \ell \\ &= ::(x, \ell).\end{aligned}$$

Exercice 3

1. On a $R = \left\{ V|^0,\ N|^2_{\mathbb{N}} \right\}$.
2. On a
$$\begin{aligned} h : \mathcal{A} &\longrightarrow \mathbb{N} \cup \{-1\} \\ V &\longmapsto -1 \\ N(x, f_1, f_2) &\longmapsto 1 + \max\big(h(f_1), h(f_2)\big)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} t : \mathcal{A} &\longrightarrow \mathbb{N} \\ V &\longmapsto 0 \\ N(x, f_1, f_2) &\longmapsto 1 + t(f_1) + t(f_2) \end{aligned}$$

3. On rappelle les relations taille/hauteur :

$$h(a) + 1 \leqslant t(a) \leqslant 2^{h(a)+1} - 1.$$

Soit, pour tout arbre $a \in \mathcal{A}$, P_a : "…". Montrons que P_a est vraie pour tout arbre $a \in \mathcal{A}$ par induction.
Montrons que P_V vraie : on a $h(V)+1 = 1-1 = 0$, $t(V) = 0$ et $2^{h(V)+1} - 1 = 1 - 1 = 0$ d'où $h(V) + 1 \leqslant t(V) \leqslant 2^{h(V)+1} - 1$.
Supposons P_g vraie et P_d vraie pour deux arbres $g, d \in \mathcal{A}$. Soit $x \in \mathbb{N}$. Montrons que $P_{N(x,g,d)}$ est vraie :

$$\begin{aligned} h\big(N(x, g, d)\big) - 1 &= 1 + \max\big(h(g), h(d)\big) + 1 \\ &\leqslant \max(t(g) - 1, t(d) - 1) + 2 \\ &\leqslant \max\big(t(g), t(d)\big) + 1 \\ &\leqslant t(g) + t(d) + 1 \\ &= t\big(N(x, g, d)\big) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} t\big(N(x, g, d)\big) &= t(g) + t(d) + 1 \\ &\leqslant 2^{h(g)+1} + 2^{h(d)+1} - 1 \\ &\leqslant 2 \times 2^{\max(h(g),h(d))+1} - 1 \\ &\leqslant 2^{\max(h(g),h(d))+2} - 1 \\ &\leqslant 2^{h(N(x,g,d))+1} - 1. \end{aligned}$$

Exercice 2

Exemple:
Avec $S = \mathbb{N}$, $\mathcal{B} = \{0, 2\}$, $A_1 = \{0\}$ et

$$\begin{aligned} f_1 : A_1 \times \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{N} \\ (0, x) &\longmapsto x + 4. \end{aligned}$$

On a

$$X \supseteq \{0, 2, 4, 6, 8, 10, \dots, 20, \dots\} = 2\mathbb{N}.$$

Exemple:
Avec S l'ensemble des langages sur Σ, $\mathcal{B} = \{\varnothing\} \cup \big\{\{a\} \bigm| a \in \Sigma\big\}$, et

$$\begin{aligned} f_1 : S \times S &\longrightarrow S \\ (L_1, L_2) &\longmapsto L_1 \cup L_2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_2 : S \times S &\longrightarrow S \\ (L_1, L_2) &\longmapsto L_1 \cdot L_2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_3 : S &\longrightarrow S \\ L &\longmapsto L^*. \end{aligned}$$

1. Soit $\mathcal{A} = \{X \subseteq S \mid X \supseteq \mathcal{B} \text{ et } X \text{ est stable par } f_i\}$. On a $S \in \mathcal{A}$. De plus, soit

$$Y = \{x \in S \mid \forall X \in \mathcal{A},\, x \in X\} = \bigcap_{x \in \mathcal{A}} X.$$

Remarque 1 : $\forall X \in \mathcal{A}$, $Y \subseteq X$.

Remarque 2 : soit $b \in \mathcal{B}$, on a $\forall X \in A$, $b \in X$. D'où $b \in Y$ par intersection. On en déduit que $B \subseteq Y$.

Soit $y \in [\![1, m]\!]$ et $(x_1, \ldots, x_{n_i}) \in Y^{n_i}$. Soit $a \in A_i$. Montrons que $f_i(a, x_1, \ldots, x_{n_i}) \in Y$. Or, soit $X \in \mathcal{A}$, on a $(x_1, \ldots, x_{n_i}) \in X^{n_i}$ donc $f_i(a, x_1, \ldots, x_{n_i}) \in X$. Ceci étant vrai pour $X \in A$, on a $f_i(a, x_1, \ldots, x_{n_i}) \in Y$ donc Y est stable par f_i par tout $i \in [\![1, m]\!]$ et donc $Y \in A$. On en déduit que Y est le plus petit élément de $\mathcal{A}$.

2. On pose $X_0 = \mathcal{B}$ et

$$X_{n+1} = X_n \cup \big\{ f_i(a, x_1, \ldots, x_{n_i}) \mid a \in A_i,\ (x_1, \ldots, x_{n_i} \in (X_n)^{n_i},\ i \in [\![1, m]\!] \big\}.$$

Montrons que $\displaystyle\bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n = Y$. à démontrer

1. Un théorème d'induction

3. Soit $Z = \{x \in S \mid P(x) \text{ vraie}\}$. Montrons que $\mathcal{X} \subseteq Z$. On remarque que $\mathcal{X} \supseteq \mathcal{B}$; $\mathcal{X}$ est stable par f_i. On en conclut que $Z \supseteq \mathcal{X}$ et donc $\forall x \in \mathcal{X}$, $P(x)$ est vraie.

Exemple:
Soit $\mathcal{X}$ défini par induction par $\mathcal{B} = \{0, 2\}$ et

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{N} \\ n &\longmapsto n + 2. \end{aligned}$$

Montrons que $\forall n \in \mathcal{X}$, x est pair.

On sait que 0 est pair, 2 est pair ; et,

$$\forall x, y \in \mathcal{X},\ (x \text{ pair} \land y \text{ pair}) \implies f(x, y) \text{ pair}.$$

On en déduit que

$$\forall n \in \mathcal{X},\ x \text{ est pair.}.$$