TD n° 2

Logique pro

Hugo SALOU MPI*

Dernière mise à jour le 14 septembre 2022

Exercice 1 : Logique avec If

1. $G = \texttt{if } p \texttt{ then } \top \texttt{ else } (\underbrace{\texttt{if } q \texttt{ then } \top \texttt{ else } r}_{A})$ en effet,

$$\begin{aligned}
[\![G]\!]^\rho &= [\![p]\!]^\rho \cdot [\![\top]\!]^\rho + \overline{[\![p]\!]^\rho} \cdot [\![A]\!]^\rho \\
&= \rho(p) + \overline{\rho(p)} \cdot \left([\![q]\!]^\rho \cdot [\![\top]\!]^\rho + \overline{[\![q]\!]^\rho} \cdot [\![r]\!]^\rho \right) \\
&= \rho(p) + \overline{\rho(p)} \cdot \left(\rho(q) + \overline{\rho(q)} \cdot \rho(r) \right) \\
&= \rho(p) + \overline{\rho(p)} \cdot \rho(q) + \overline{\rho(p)} \cdot \overline{\rho(q)} \cdot \rho(r) \\
&= \rho(p) + \rho(q) + \rho(r)
\end{aligned}$$

2. $$[\![\texttt{if } C \texttt{ then } G \texttt{ else } H]\!]^\rho = \begin{cases} [\![G]\!]^\rho & \text{si } [\![C]\!]^\rho = \mathbf{V} \\ [\![H]\!]^\rho & \text{if } [\![C]\!]^\rho = \mathbf{F} \end{cases}.$$

3. Soit $G \in \mathbb{F}$.
   Cas 1 Soit $\mathscr{P} = \{p\}$
   - Sous-cas 1 : $f : \rho \mapsto \mathbf{V}$ est associée à $\top$.
   - Sous-cas 2 : la fonction dont la table de vérité est ci-dessous est associée à p.

p	f
F	**F**
V	**V**

   - Sous-cas 3 : la fonction dont la table de vérité est ci-dessous est associée à $\bar{p}$.

p	f
F	**V**
V	**F**

   - Sous-cas 4 : $f : \rho \mapsto \mathbf{F}$ est associée à $\bot$.

   Cas 2 Soit $\mathscr{P} = \{p_1, \ldots, o_n\}$ et on pose

   P_r : "$\forall f$ fonction booléenne définie sur $\mathbb{B}^{\{p_1,\ldots,p_r\}}$ à valeurs dans $\mathbb{B}$, $\exists G \in \mathcal{F}_{\texttt{if}}$, $[\![G]\!] = f$."

   Soit $r \in [\![2, n]\!]$ et f une fonction booléenne définie sur $\mathbb{B}^{\{p_1,\ldots,p_r\}}$ à valeurs dans $\mathbb{B}$.
   Soit

$$\begin{aligned} g : \mathbb{B}^{\{p_1,\ldots,p_{r-1}\}} &\longrightarrow \mathbb{B} \\ \rho' &\longmapsto f\big(\rho' \uplus (p_r \mapsto \mathbf{V})\big). \end{aligned}$$

   où $\uplus$ est défini comme dans l'exemple $(p \mapsto \mathbf{V}, q \mapsto \mathbf{F}) \uplus (r \mapsto \mathbf{V}) = (p \mapsto \mathbf{V}, q \mapsto \mathbf{F}, r \mapsto \mathbf{V})$. Soit alors G par hypothèse de récurrence tel que $[\![G]\!] = g$. Soit

$$\begin{aligned} h : \mathbb{B}^{\{p_1,\ldots,p_{r-1}\}} &\longrightarrow \mathbb{B} \\ \rho' &\longmapsto f\big(\rho' \uplus (p_r \mapsto \mathbf{F})\big). \end{aligned}$$

   Soit alors H par hypothèse de récurrence tel que $[\![H]\!] = h$.
   On pose alors $A = \texttt{if } p_r \texttt{ then } G \texttt{ else } H$. Montrons que $[\![A]\!] = f$. Soit $\rho \in \mathbb{B}^{\{p_1,\ldots,p_r\}}$.
   - Si $\rho(p_r) = \mathbf{V}$ alors

$$\begin{aligned}
[\![A]\!]^\rho &= [\![G]\!]^\rho \\
&= [\![G]\!]^{\rho|\{p_1,\ldots,p_{r-1}\}} \\
&= g\left(\rho_{|\{p_1,\ldots,p_{r-1}\}}\right) \\
&= f\left(\rho_{|\{p_1,\ldots,p_{r-1}\}} \uplus (p_r \mapsto \mathbf{V})\right) \\
&= f(\rho)
\end{aligned}$$

Exercice 3 : Formules duales

1. On définit par induction $(\cdot)^\star$ comme

— $\top^\star = \bot$;

— $\bot^\star = \top$;

— $(G \vee H)^\star = G^\star \wedge H^\star$;

— $(G \wedge H)^\star = G^\star \vee H^\star$;

— $(\neg G)^\star = \neg G^\star$;

— $p^\star = p$.

2. On montre $[\![H^\star]\!]^\rho = [\![\neg H]\!]^{\bar\rho}$ où $\bar\rho : p \mapsto \overline{\rho(p)}$.

Exercice 6 : Barre de Scheffer

Q. 1

- $\neg H_1 \equiv H_1 \texttt{ nand } H_1$;
- $H_1 \wedge H_2 \equiv \neg(H_1 \texttt{ nand } H_2) \equiv (H_1 \texttt{ nand } H_1) \texttt{ nand } (H_2 \texttt{ nand } H_2)$;
- $H_1 \to H_2 \equiv H_1 \wedge (\neg H_2) \equiv H_1 \texttt{ nand } (H_2 \texttt{ nand } H_2)$;
- $H_1 \vee H_2 \equiv \neg H_1 \texttt{ nand } \neg H_2 = (H_1 \texttt{ nand } H_1) \texttt{ nand } (H_2 \texttt{ nand } H_2)$;
- $H_1 \leftrightarrow H_2 \equiv (H_1 \to H_2) \wedge (H_2 \to H_1)$.