Td n° 3

Langage régulière

Hugo Salou MPI⋆

Dernière mise à jour le 14 septembre 2022

Exercice 5 : Habitants d'expressions régulières

Q. 1

1. Les mots valides de $\big((ab)^* \mid a\big)^*$ sont a, aa, ab, aaa, $aaaa$, $abab$, aba, $abaa$, aab, $aaab$ et $aaba$.
2. On sait, tout d'abord, que l'expression régulière $\big(a\cdot\big((b\cdot b)^* \mid (a\cdot\varnothing)\big)\cdot b\big)\big|\varepsilon$ est équivalente à $\big(a\cdot(bb)^*\cdot b\big)$. Les mots valides sont donc $abbb$ et ab.

Q. 2

1. Les mots valides de $(a \mid b)^* \cdot (a \mid c)^*$ sont a, b, c, aa, bb, cc, ab, ac, bc, ba, ca, aaa, bbb, ccc, aac, aab, bbc, bba, cca, aba, abc, baa, aca, acc, abb, bca, bcc, cac, bab et caa.
2. Les mots valides de $(a\cdot b)^* \mid (a\cdot c)^*$ sont ab et ac.

Exercice 4 : Propriétés sur les opérations régulières

Q. 1

1. $\varnothing \cdot A = \varnothing$;
2. $\varnothing^* = \{\varepsilon\}$;
3. $\{\varepsilon\}\cdot A = A$.

Q. 2

2. On suppose $A \subseteq B$. On a donc $B = A \cup (B \setminus A)$ et, par définition $A^* = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A^n$ et $B^* = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B^n$. Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n \subseteq B^n$. On procède par récurrence.
   — Si $n = 0$, on a $A^0 = \{\varepsilon\} \subseteq B^0 = \{\varepsilon\}$ ce qui est vrai.
   — Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $A^n \subseteq B^n$. On a $A^{n+1} = A^n \cdot A$ et $B^{n+1} = B^n \cdot B$. Or, $A^n \subseteq B^n$ et $A \subseteq B$. On en déduit que $A^{n+1} \subseteq B^{n+1}$ (car l'opération $\cdot$ est croissant).
3. On procède par double inclusion pour démontrer $(A^*)^* = A^*$.
   "$\subseteq$" Soit $w \in (A^*)^*$. On pose donc $w = u_1 \dots u_n$ avec, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $u_i \in A^*$. On pose également, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $u_i = v_{i,1}\dots v_{i,m_i}$ où, pour tout $j \in [\![1,m_i]\!]$, $v_{i,j} \in A$. D'où, $w = v_{11}\dots v_{1,m_1} v_{21}\dots v_{2,m_2}\dots v_{n,m_n} \in A^*$. On en déduit que $(A^*)^* \subseteq A^*$.
   "$\supseteq$" On a $A^* = (A^*)^1 \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A^*)^n = (A^*)^*$.
4. On procède par double inclusion pour démontrer $A^*\cdot A^* = A^*$.
   "$\subseteq$" On a $\{\varepsilon\} \subseteq A^*$ donc $A^* \cdot \{\varepsilon\} \subseteq A^* \cdot A^*$ et donc $A^* \cdot A^* \cdot A^*$.
   "$\supseteq$" Soit $w \in A^*\cdot A^*$. Soit $(w_1, w_2) \in (A^*)^2$ tels que $a = w_1\cdot w_2$. Soient $(w_{11}, \dots, w_{1,m}) \in A^n$ et $(w_{21},\dots,w_{2,m}) \in A^m$ tels que $w_1 = w_{11}\dots w_{1,n}$ et $w_2 = w_{21}\dots w_{2,m}$.
5. On procède, encore une fois, par double inclusion pour démontrer $(A\cup B)^* = (A^*\cdot B^*)^*$.
   "$\subseteq$" Soit $w \in A \cup B$. Si $w \in A$, alors $w \in A^*$ et donc $w \in A^* \cdot B^*$. On procède identiquement pour $w \in B$. On conclut donc que $A \cup B \subseteq A^* \cdot B^*$ et, grâce à la croissance de l'étoile, on a $(A \cup B)^* \subseteq (A^* \cdot B^*)^*$.
   "$\supseteq$" Soit $w \in (A^*\cdot B^*)^*$. On pose $w = u_{11}\dots u_{1,n_1} v_{11}\dots v_{1,m_1} u_{21}\dots u_{2,n_2}\dots v_{21}\dots v_{2,n_2}\dots u_{p,1}\dots u_{p,n_p} v_{p,1}\dots v_{p,m_p}$ où, $u_{i,j} \in A$ et $v_{i,j} \in B$. On a donc $w \in (A \cup B)^*$.

Q. 3

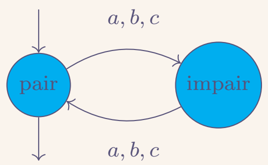
1. Soit $A = \{a\}$ et $B = \{b\}$ avec $a \neq b$. On sait que $abab \in (A \cdot B)^*$. Or, $abab \notin A^* \cdot B^*$ donc $L_1 \subsetneq L_2$. De plus, $a \in A^* \cdot B^*$ et $a \notin (A \cdot B)^*$ donc $L_2 \subsetneq L_1$.
2. On sait que $A \cdot B \subseteq A^* \cdot B^*$ d'où, par passage à l'étoile, $(A \cdot B)^* \subseteq (A^* \cdot B^*)^*$. Mais $(A \cdot B)^* \supsetneq (A^* \cdot B^*)^*$; en effet, si $A = \{a\}$ et $B = \{b\}$ avec $a \neq b$, on a $b \in (A^* \cdot B^*)^*$ mais $b \notin (A \cdot B)^*$.
4. On sait que $A^* \subseteq (A \cup B)^*$ et $B^* \subseteq (A \cup B)^*$ et donc $A^* \cup B^* \subseteq (A \cup B)^*$. Mais, $A^* \cup B^* \supsetneq (A \cup B)^*$; en effet, si $A = \{a\}$ et $B = \{b\}$ avec $a \neq b$, on a $ba \in (A \cup B)^*$ mais $ba \notin A^* \cdot B^*$.

Exercice 7 : Description d'automates au moyen d'expression régulières

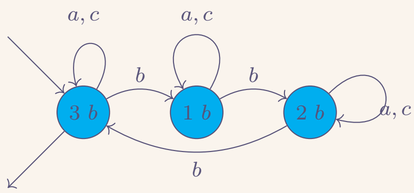
1. $(a \mid b)^* \cdot a \cdot b \cdot b \cdot a \cdot (a \mid b)^*$;
2. $a^* \cdot a \cdot b^*$;
3. $\big(a \cdot (ab)^*\big) \mid \big(a \cdot a \cdot (ba)^*\big)$;
4. $(aa) \cdot (aa)^*$.

Exercice 10 : Construction d'automates

Q. 1

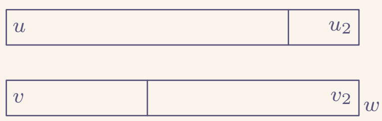


Q. 2

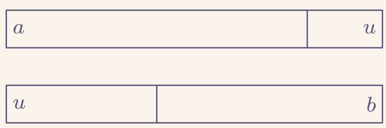


Exercice 1 : Propriétés sur les mots

Q. 1 Soit $u_2, v_2 \in \Sigma^*$ tels que $w = uu_2$ et $w = vv_2$. Si $|u_2| = |v_2|$, alors $u = v = v\varepsilon$ donc v est préfixe de u. Si $|u_2| < |v_2|$, u_2 est suffixe de v_2. Soit $v_3 \in \Sigma^*$ tel que $v_2 = u_3u_2$ donc $w = uu_2 = vu_3u_2$ donc $u = vu_3$ et donc v est préfixe de u.



Q. 2 Soit $u = u_1 \dots u_n$ avec, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $u_n \in \Sigma$. Or, $au = ub$ donc $au_1 \dots u_n = u_1 \dots u_n b$ donc, pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$, $u_i = u_{i+1}$. Or, $u_1 = a$. De proche en proche, on a $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $u_i = a$. Or, $u_n = b$ et donc $a = b$. On en déduit également que $u \in a^*$.



Q. 3