

Td n° 4

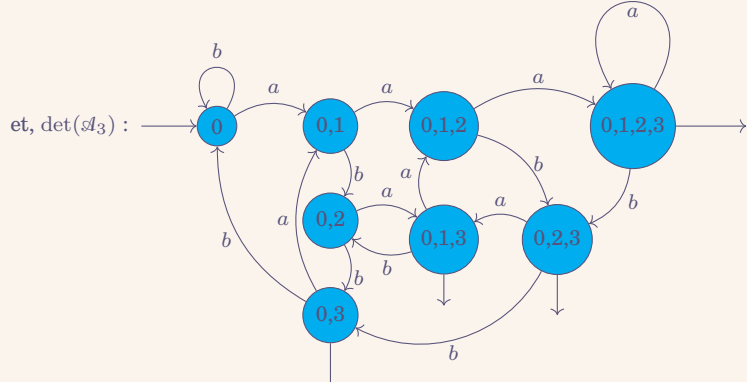
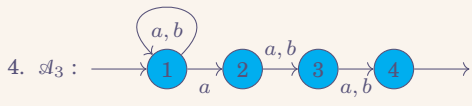
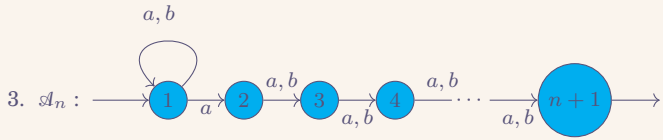
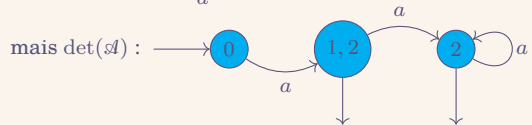
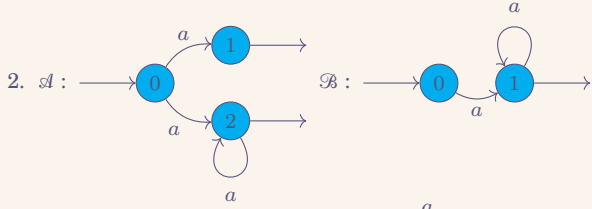
*Langages et expressions  
régulières (2)*

Hugo SALOU MPI\*

Dernière mise à jour le 15 novembre 2022

# 1 Détermination de taille exponentielle

1. En notant  $n$  le nombre d'états de  $\mathcal{A}$ , alors le nombre d'états de  $\det(\mathcal{A})$  est, au plus,  $2^n$ .  
En effet, les états sont des éléments de  $\wp(Q)$  et  $|\wp(Q)| = 2^n$ .



5. Soit  $i_0 = \max\{k \in \llbracket 1, n \rrbracket \mid u_k \neq v_k\}$ . Soit  $m \in \Sigma^{i_0}$  tel que  $u \cdot m \in L_n$  mais  $v \cdot m \notin L_n$ . Or,  $\delta^*(i, u \cdot m) = \delta^*(\delta^*(i, u), m)$  et  $\delta^*(i, v \cdot m) = \delta^*(\delta^*(i, v), m)$ . D'où  $\delta^*(i, u \cdot m) \in F$  et  $\delta^*(i, v \cdot m) \notin F$ . Ce qui est absurde.
6. Ainsi, l'application

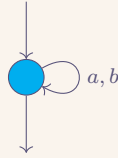
$$f : \Sigma^* \longrightarrow Q$$

$$u \longmapsto \delta^*(i, u)$$

est injective. D'où,  $\mathcal{D}_n = |Q| \geq |\Sigma^*| = 2^n$ .

7. D'où, d'après les questions 1 et 6, on en déduit que le nombre d'états utilisés pour la détermination de  $\mathcal{A}_n$  est de  $\mathcal{D}_n \geq 2^n$ .

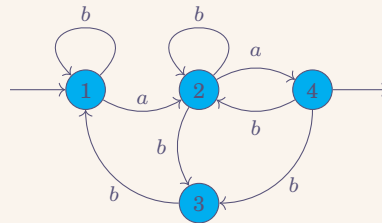
## 2 Suppression des $\varepsilon$ -transitions



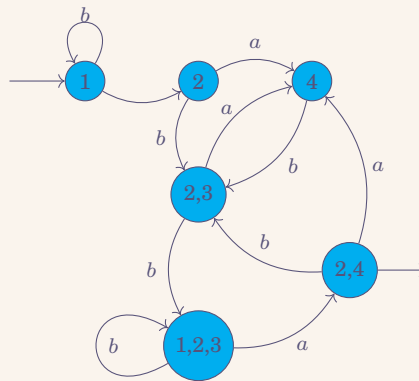
## 3 Détermination d'automates avec $\varepsilon$ -transitions

Pour les deux automates, on commence par supprimer les  $\varepsilon$ -transitions, puis on le détermine.

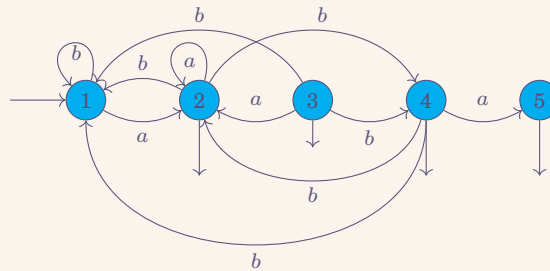
1. L'automate équivalent sans  $\varepsilon$ -transitions est le suivant.



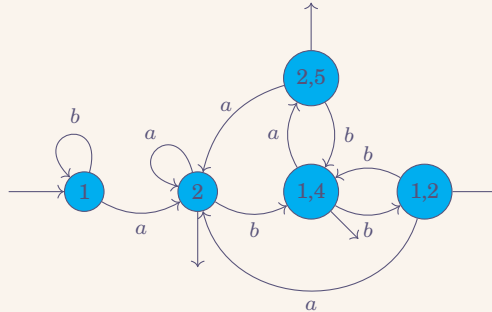
Une fois déterminisé, on obtient l'automate ci-dessous.



2. L'automate équivalent, sans  $\varepsilon$ -transitions, est le suivant.



Une fois déterminisé, on obtient l'automate ci-dessous.

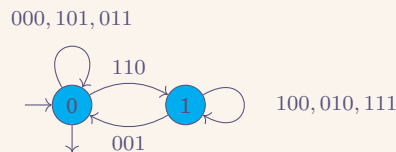


## 4 Automates pour le calcul de modulo

## 5 Automates pour le calcul de l'addition en binaire

### 5.1 Nombres de même tailles

**Q. 1**



**Q. 2** Pour  $r \in \{0, 1\}$ , il existe une exécution dans  $\mathcal{A}$  étiquetée par

$$(u_0, v_0, w_0)(u_1, v_1, w_1) \dots (u_{n-1}, v_{n-1}, w_{n-1})$$

menant à  $r$  si et seulement si

$$\overline{u_0 \dots u_{n-1}}^2 + \overline{v_0 \dots v_{n-1}}^2 = \overline{w_0 \dots w_{n-1}}^2 + r 2^n,$$

ce qui est équivalent à  $s$  et seulement si

$$\overline{u_0 \dots u_{n-1}}0^2 + \overline{v_0 \dots v_{n-1}}0^2 = \overline{w_0 \dots w_{n-1}}r^2.$$

**Q. 3** Prouvons-le par récurrence.

- Pour  $n = 0$ , il existe une exécution dans  $\mathcal{A}$  étiquetée par  $\varepsilon$  menant à  $r = 0$  si et seulement si  $\overline{\varepsilon}^2 + \overline{\varepsilon}^2 = 0 = \overline{\varepsilon}^2 + 0 \times 2^0$ . De même, il existe une exécution dans  $\mathcal{A}$  étiquetée par  $\varepsilon$  menant à  $r = 1$  si et seulement si  $\overline{\varepsilon}^2 + \overline{\varepsilon}^2 = 0 = 1 = \overline{\varepsilon}^2 + 1 \times 2^0$ .