Td n° 5

Langages et expressions régulières (3)

Hugo Salou MPI*

Dernière mise à jour le 15 novembre 2022

Exercice 5

1. On a $e = a(ab \mid b^*) \mid a$, $f = a_1(a_2b_1 \mid b_2^*) \mid a_3$et $f_\varphi = e$ où

$$\varphi : \begin{pmatrix} \forall i,\ a_i & \longmapsto & a \\ \forall i,\ b_i & \longmapsto & b \end{pmatrix}.$$

D'où

	Λ	P	S	F
a_1	$\varnothing$	a_1	a_1	$\varnothing$
a_2	$\varnothing$	a_2	a_2	$\varnothing$
b_2^*	ε	b_2	b_2	b_1b_2
$a_2b_1 \mid b_2^*$	ε	a_2, b_2	b_1, b_2	a_2b_1, b_2b_2
a_3	$\varnothing$	a_3	a_3	$\varnothing$
$a_1(a_2b_1 \mid b_2^*)$	$\varnothing$	a_1	b_1, b_2, a_1	$a_1a_2, a_1b_2, a_2b_1, b_2b_2$
f	$\varnothing$	a_1, a_3	b_1, b_2, a_3, a_1	$a_1a_2, a_1b_2, a_3b_1, b_2b_2$

Automate à faire...

2. On pose $e = (\varepsilon \mid a)^* \cdot ab \cdot (a \mid b)^*$ et $f = (\varepsilon \mid a_1)^* \cdot a_2b_1 \cdot (a_3 \mid b_2)^*$ et

$$\varphi : \begin{pmatrix} \forall i,\ a_i & \longmapsto & a \\ \forall i,\ b_i & \longmapsto & b \end{pmatrix}$$

d'où $f_\varphi = e$.

Exercice 4

Q. 1

Algorithme: *Entrée* : Un automate $\mathscr{A}$;
Sortie : $\mathscr{L}(\mathscr{A}) = \varnothing$;
On fait un parcours en largeur depuis les états initiaux et on regarde si on atteint un état final.

Algorithme (Nathan F.)**:** *Entrée* : Deux automates $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$
Sortie : $\mathscr{L}(\mathscr{A}) = \mathscr{L}(\mathscr{B})$; Soit $\mathscr{C}$ l'automate reconnaissant $\mathscr{L}(\mathscr{A}) \triangle \mathscr{L}(\mathscr{B})$. On retourne $\mathscr{L}(\mathscr{C}) \stackrel{?}{=} \varnothing$ à l'aide de l'algorithme précédent.

Autre possibilité, on procède par double inclusion :

Algorithme ($\subseteq$)**:** *Entrée* : Deux automates $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$
Sortie : $\mathscr{L}(\mathscr{A}) \subseteq \mathscr{L}(\mathscr{B})$; On retourne $\mathscr{A} \setminus \mathscr{B} \stackrel{?}{=} \varnothing$.

Q. 2 L'algorithme reconnaissant $\mathscr{L}(\mathscr{A}) \triangle \mathscr{L}(\mathscr{B})$ doit être déterminisé, sa complexité est donc au moins de 2^n.

Exercice 6 : Langages reconnaissables ou non

Q. 7 *Le carré d'un langage est le langage $L_2 = \{u \cdot u \mid u \in L\}$. Si L est reconnaissable, L_2 est-il nécessairement reconnaissable ?*

Avec $\Sigma = \{a, b\}$, soit $L = \mathscr{L}(a^* \cdot b^*)$. On a donc $L_2 = \{a^n \cdot b^m \cdot a^n \cdot b^m \mid (n, m) \in \mathbb{N}^2\}$. Supposons L_2 reconnaissable. Soit $\mathscr{A}$ un automate à n états reconnaissant L_2. On pose $u = a^{2n} \cdot b^n \cdot a^{2n} \cdot b^n \in L_2$. D'après le lemme de l'étoile, il existe $(x, y, z) \in (\Sigma^*)^3$ tel que $u = x \cdot y \cdot z$, $|xy| \leqslant n$, $\mathscr{L}(x \cdot y^* \cdot z) \subseteq L_2$, et $y \neq \varepsilon$. Ainsi, il existe $m \in [\![1, n]\!]$ et $p \in [\![1, n]\!]$ tels que $y = a^m$, $x = a^p$ et $z = a^{2n-m-p} \cdot b^n \cdot a^{2n} \cdot b^n$. Et alors, $x \cdot y^2 \cdot z = a^p \cdot a^{2m} \cdot a^{n-m-p} \cdot b^n \cdot a^{2n} \cdot b^n = a^{2n+m} \cdot b^n \cdot a^{2n} \cdot b^n \notin L_2$.

Q. 5 *Le langage* $L_5 = \{a^{n^3} \mid n \in \mathbb{N}\}$ *est-il reconnaissable ?* Soit $\mathscr{A}$ un automate à N états, et soit $u = a^{N^3}$. D'après le lemme de l'étoile, il existe $(x, y, z) \in (\Sigma^*)^3$ tel que $u = x \cdot y \cdot z$, $|xy| \leqslant N$, $\mathscr{L}(x \cdot y^* \cdot z) \subseteq L_5$ et $y \neq \varepsilon$. D'où $x \cdot y^0 \cdot z \in L$, et donc $a^{N^3 - i} \in L$, avec $i \leqslant N$. Or, $\forall k \in \mathbb{N},\ N^3 - i \neq k^3$, ce qui est absurde.