Annexe B

La compacité

Hugo Salou MPI*

Dernière mise à jour le 30 mars 2023

DÉFINITION 1 :
On dit qu'une partie $K \subset E$ d'un espace vectoriel normé (de dimension potentiellement infinie) E est *compacte* si, de toute suite $(\vec{u}_n)$ de vecteurs de K, on peut extraire une suite convergent vers un vecteur $\vec{\ell} \in K$, *i.e.*, il existe une fonction $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $\lim_{n\to\infty} \vec{u}_{\varphi(n)}$ existe et appartient à K.

THÉORÈME 2 (Bolzano-Weierstaß) :
De toute suite réelle bornée, on peut extraire une suite convergente (*i.e.* tout segment de $\mathbb{R}$ est compacte). □

REMARQUE 3 :
Soit $(\vec{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de vecteurs d'un espace vectoriel normé E. On dit qu'un vecteur $\vec{a} \in E$ est une *valeur d'adhérence* de $(\vec{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si on peut extraire de $(\vec{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergent vers $\vec{a}$.

1. Par définition, une partie K de E est compacte si, et seulement si, toute suite de vecteurs possède au moins une valeur d'adhérence.
2. La suite réelle définie par $u_n = n$ ne possède aucune valeur d'adhérence, et elle n'est pas bornée.
3. Une suite réelle, même bornée, peut posséder plusieurs valeurs d'adhérence. Par exemple, les valeurs d'adhérence de la suite de réels $(-1)^n$ sont -1 et 1.
4. Mais, si une suite de vecteurs est convergente, alors elle possède une unique valeur d'adhérence (égale à sa limite) : c'est la proposition 14 du chapitre 13. En contraposant, on a : si une suite possède plusieurs valeurs d'adhérence, alors elle diverge (on prouve ainsi que la suite des réels $(-1)^n$ diverge).
5. La réciproque est fausse : la suite (u_n) définie par $u_{2p} == 1$ et $u_{2p+1} = p$ possède une unique valeur d'adhérence (égale à 1), mais elle diverge.
6. Hormis dans un compact, où elle est vraie. ▷ Proposition suivante

PROPOSITION 4 :
Une suite de vecteurs d'un compact K converge si, et seulement si, elle possède une unique valeur d'adhérence.

DÉMONSTRATION : « $\Longrightarrow$ » Si une suite $(\vec{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite $\vec{\ell}$, alors toute suite extraite de $(\vec{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi vers $\vec{\ell}$. D'où, $\vec{\ell}$ est l'unique valeur d'adhérence de $(\vec{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

« $\Longleftarrow$ » On suppose que $(\vec{u})_{n\in\mathbb{N}}$ possède une unique valeur d'adhérence $\vec{\ell}$. Montrons, par l'absurde, que la suite $\vec{u}_n$ converge. Supposons donc que $(\vec{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers $\vec{\ell}$. Autrement dit, il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $n \geqslant N$ tel que $\|\vec{u}_n - \vec{\ell}\| \geqslant \varepsilon$. On en déduit que l'on peut extraire de $(\vec{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite $(\vec{v}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui ne rentre jamais dans la boule $\bar{B}(\vec{\ell}, \varepsilon)$. Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le vecteur $\vec{v}_n$ appartient à K, un compact. D'où, par définition, on peut extraire de la suite $(\vec{v}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite $(\vec{w}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers $\vec{\ell'}$. Et, $(\vec{w}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite extraite de $(\vec{u}_n)$. D'où, $\vec{\ell'}$ est une valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Or, $\vec{\ell} \neq \vec{\ell'}$, ce qui est absurde.

LEMME 5 : (*i*) Toute partie fermée d'un compact est un compact.

((*ii*)) Le produit cartésien de deux compacts est un compact. (Par récurrence pour un produit fini de compact)

DÉMONSTRATION : (*i*) On suppose $F \subset K$, où F est un fermé et K est un compact. Montrons que F est compact. Soit $(\vec{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de vecteurs de F : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\vec{u}_n \in F$. Or, $F \subset K$, d'où, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\vec{u}_n \in K$. Et, K est un compact, on peut donc extraire de $(\vec{u}_n)$ une suite $(\vec{v}_n)$ qui converge dans K. Soit ainsi $\vec{\ell} = \lim \vec{v}_n$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\vec{v}_n \in F$ et F est un fermé. D'où, $\vec{\ell} \in F$ par la caractérisation séquentielle d'un fermé.

((*ii*)) Soient K_1 et K_2 deux compacts. Montrons que $K_1 \times K_2$ est un compact. Soit $\big((\vec{u}_n, \vec{v}_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $K_1 \times K_2$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\vec{u}_n \in K_1$, qui est un compact. On extrait donc de $(\vec{u}_n)$ une suite $(\vec{u}_{\varphi(n)})$ qui converge dans K_1. De la suite $(\vec{v}_{\varphi(n)})$, on extrait la suite $(\vec{v}_{\varphi(\psi(n))})$ qui converge dans K_2. La suite $\big((\vec{u}_{\varphi(\psi(n))}, \vec{v}_{\varphi(\psi(n))})\big)$ converge dans $K_1 \times K_2$ car $(\vec{u}_{\varphi(\psi(n))})$ converge dans K_1 et $\vec{v}_{\varphi(\psi(n))}$ converge dans K_2.

Proposition 6 : (*i*) Toute partie compacte d'un espace vectoriel normé est fermée et bornée.

(*ii*) La réciproque est vraie dans $\mathbb{R}^n$: une partie de $\mathbb{R}^n$ est fermée si, et seulement si, elle est fermée et bornée.

Exercice 7 :
Montrer que

(*a*) *toute intersection de compacts est un compact ;*

(*b*) *l'union de deux compacts est un compact (de même, par récurrence, pour une union finie de compacts).*

Annexe B. Exercice 7.

Soit E un espace vectoriel normé.

(a) On considère $(K_i)_{i \in I}$ une famille de compacts de E.

Montrons que $\bigcap_{i \in I} K_i = K$ est un compact.

Soit $(\vec{u}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de vecteurs de K.

Pour tout $i \in I$, la suite $(\vec{u}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de vecteurs de K_i et K_i est un compact.

Il existe donc $\varphi_i : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que la suite $(\vec{u}_{\varphi_i(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une limite $\vec{l}_i \in K_i$.

~~On considère l'ensemble $A = \{n \in \mathbb{N} \mid \vec{u}_n \in K\}$.~~

Or, K est fermé par intersection de fermés.

Ainsi, par la caractérisation séquentielle d'un fermé, on en déduit que $\vec{l}_i \in K$, pour tout $i \in I$.

On choisit un certain $i \in I$.

Ainsi, la suite $(\vec{u}_{\varphi_i(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ est extraite de $(\vec{u}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et converge vers $\vec{l}_i \in K$.

On en déduit que K est un compact.

Une intersection de compacts est donc un compact.

(b) Soient K_1 et K_2 deux compacts de E. Montrons que $K_1 \cup K_2$ est un compact.

Soit $(\vec{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de vecteurs de $K_1 \cup K_2$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\vec{u}_n \in K_1$ ou $\vec{u}_n \in K_2$.

On note $A = \{n \in \mathbb{N} \,/\, \vec{u}_n \in K_1\}$ et $B = \{n \in \mathbb{N} \,/\, \vec{u}_n \in K_2\}$.

Les deux ensembles A et B ne peuvent pas être finis tous les deux. On supposera donc, sans perte de généralité, que A est infini.

On peut donc extraire de la suite $(\vec{u}_n)$ la suite $(\vec{u}_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ de vecteurs de K_1. (Ainsi, $A = \varphi(\mathbb{N})$.)

Or, K_1 est un compact, et donc, il existe $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $(\vec{u}_{\varphi(\psi(n))})$ converge vers $\vec{l} \in K_1$.

De la suite $(\vec{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a pu extraire $(\vec{u}_{\varphi(\psi(n))})_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de vecteurs de $K_1 \cup K_2$ qui converge vers $\vec{l} \in K_1 \cup K_2$.

On en déduit donc que $K_1 \cup K_2$ est un compact.

~~Par une récurrence, similaire à celle de la question précédente, permet de conclure qu'une union finie de compacts est un compact.~~

Proposition 8 :
Soient E et F deux *evn* de dimensions potentiellement infinies. Soit une fonction continue $f : E \to F$. Si $K \subset E$ est un compact de E, alors $f(K)$ est un compact de F. Autrement dit, « l'image d'un compact par une fonction continue est un compact. » En particulier, toute fonction réelle continue sur un compact est bornée et atteint ses bornes.

Démonstration :
Soit $(\vec{v}_n)$ une suite de vecteurs de $f(K)$. On veut extraire une suite de $f(K)$ qui converge dans $f(K)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $\vec{u}_n \in K$ tel que $\vec{v}_n = f(\vec{u}_n)$. Or, K est un compact. On peut donc extraire de $(\vec{u}_n)$ de vecteurs $(\vec{u}_{\varphi(n)})$ qui converge dans K, on note $\vec{\ell}$ sa limite. Ainsi, $\vec{u}_{\varphi(n)} \to \vec{\ell}$ et, comme f est continue, $f(\vec{u}_{\varphi(n)}) \to f(\vec{\ell})$. D'où, $f(K)$ est un compact.

Proposition 9 :
. . .

Exercice 10 :
On munit l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ *de la norme définie par* $\|P\| = \max_{k\in[\![0,\deg P]\!]} |a_k|$ *pour tout polynôme* $P = \sum_{k=0}^{\deg P} a_k X^k$*. Montrer que la partie* $F = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid \|P\| = 1\}$ *est une partie fermée et bornée de* $\mathbb{R}[X]$*, mais ce n'est pas un compact.*

Afin de valider que $\|\cdot\|$ est une norme, on pose $\|0\| = 0$. La partie F est la sphère centrée en 0 et de rayon 1 : $\mathcal{S}(0,1) = \bar{B}(0,1) \setminus \mathring{B}(0,1)$. Elle est donc bornée : $\forall P \in F$, $\|P\| = 1 \leqslant 1$. De plus, F est un fermé car $F = \|\cdot\|^{-1}(\{1\})$, $\|\cdot\|$ est continue (car toute norme est 1-lipschitzienne) et $\{1\}$ est un fermée. Mais, F n'est pas un compact. En effet, on considère la suite de polynôme (P_n) définie par $P_n = X^n$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|P_n\| = \max(0,1) = 1$. Par l'absurde, supposons que l'on peut extraire de (P_n) une suite $(X^{\varphi(n)})$ convergente, et on note ℓ sa limite. Or, $\|X^{\varphi(n)} - X^{\varphi(n+1)}\| = \max(-1,0,1) = 1$. Et, les égalités passent à la limite, $0 = \|\ell - \ell\| = 1$, ce qui est absurde.

Théorème 11 (Heine) :
Toute fonction continue sur un compact est uniformément continue.