Cadeaux du 14/09/22

Cadeau 1 :
Soit A un anneau commutatif et soit $x \in A$. On dit que x est nilpotent (ou nihilpotent) si

$$\exists n \in \mathbb{N},\ x^n = 0_A.$$

1. *Montrer que, si x est nilpotent, alors x n'est pas inversible mais $1_A - x$ est inversible.*
2. *Montrer que l'ensemble des éléments nilpotents de A est un idéal de A.*

Réponse du cadeau 1 :

1. On procède par l'absurde. On suppose que x est nilpotent. Soit $n \in \mathbb{N}$ le plus petit possible tel que $x^n = 0_A$. On suppose qu'il existe $y \in A$ tel que $x \cdot y = 1_A$. D'où, $(xy)^n$ est, d'une part $x^n \cdot y^n = 0_A \cdot y^n = 0_A$ par commutativité, et d'autre part, $(xy)^n = 1_A{}^n = 1_A \neq 0_A$. Ce qui est absurde.
   On suppose à présent $x \neq 1_A$. On sait que $A \ni \sum_{k=0}^{n-1} x^k = (1-x^n)/(1-x) = 1/(1-x)$. On a donc trouvé l'inverse de $1-x$.
2. Soit x un élément nilpotent de A, et y un élément de A. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $x^n = 0_A$. $x \cdot y$ est aussi un élément nilpotent de A. En effet, $(xy)^n = x^n \cdot y^n = 0_A \cdot y^n = 0_A$. On nomme $\mathcal{I}$ l'ensemble des éléments nilpotents de A. Montrons que $(\mathcal{I}, +)$ est un sous-groupe additif de $(A, +)$. On a bien $0 \in \mathcal{I}$ car $0^k = 0$. Soient x et y deux éléments nilpotents. Montrons que $x - y \in \mathcal{I}$. Soient n_1 et $n_2 \in \mathbb{N}^*$ tels que $x^{n_1} = 0$ et $y^{n_2} = 0$. On veut montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $(x-y)^n = 0$. Soit $n = n_1 + n_2$. On a

$$(x-y)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = \underbrace{\sum_{k=0}^{n_1} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} x^y y^{n-k}}_{(1)} + \underbrace{\sum_{k=n_1+1}^{n_1+n_2} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} x^y y^{n-k}}_{(2)}.$$

   Or, dans la somme (1), $n - k = n_1 + n_2 - k = n_2 + (n_1 - k) \geqslant n_2$ et, dans la somme (2), $k \geqslant n_1$.

Cadeau 2 :
Soit F l'ensemble des matrices de la forme $\begin{pmatrix} x & y \\ -5y & x+4y \end{pmatrix}$ où $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On note $J = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$.

1. *Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ et que (I_2, J) est une base de F.*
2. *Calculer J^2 puis $(x\, I_2 + yJ) \cdot (x'\, I + y'\, J)$ pour tout $(x, y, x', y') \in \mathbb{R}^4$. Qu'en déduire ?*

Réponse du cadeau 2 :

1. On cherche à trouver $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^2$ tels que $\begin{pmatrix} x & y \\ -5 & x+4y \end{pmatrix} = \alpha I_2 + \beta J$. On a

$$\begin{aligned} \alpha I_2 + \beta J &\iff \begin{pmatrix} x & y \\ -5y & x+4y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2\beta & \beta \\ -5\beta & 2\beta \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} x = \alpha - 2\beta \\ y = \beta \\ -5\beta = -5y \\ 2\beta + \alpha = x + y \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \beta = y \\ \alpha = x + 2y \end{cases} \end{aligned}$$

2. On a $J^2 = -I_2$ et, en calculant minutieusement, on trouve, pour tout $(x, y, x', y') \in \mathbb{R}^4$, $(x\, I_2 + y\, J) \cdot (x'\, I_2 + y'\, J) = \cdots = (xx' - yy')\, I_2 + (x'y + xy')\, J$. On remarque que $(F, +, \cdot)$ est isomorphe à $(\mathbb{C}, +, \times)$. C'est un isomorphisme d'anneaux. Or, comme l'anneau $(\mathbb{C}, +, \times)$ est un corps donc F l'est aussi.

Cadeau du 19/09/22

Cadeau :
Soit $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$. On pose $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ un endomorphisme défini tel que

$$A = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \vec{\imath} \\ \vec{\jmath} \\ \vec{k} \end{array} \\ \begin{array}{ccc} f(\vec{\imath}) & f(\vec{\jmath}) & f(\vec{k}) \end{array} & \end{array} = [f]_{(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})}.$$

Interpréter géométriquement f.

Réponse du cadeau :
Soit $\mathscr{B}$ une base et $A=[f]_{\mathscr{B}}$, alors $f(\vec{\imath})=\vec{\jmath}$, $f(\vec{\jmath})=\vec{k}$, et $f(\vec{k})=\vec{\imath}$. f est la rotation d'angle ${}^{2\pi}/_{3}$ autour de $\mathrm{Vect}(\vec{\imath}+\vec{\jmath}+\vec{k})$.

On peut également le montrer en décomposant $f=g\circ h$, où g est la symétrie par rapport à $\mathrm{Vect}(\vec{\imath}+\vec{\jmath},\vec{k})$ et parallèlement à $\mathrm{Vect}(\vec{\imath},\vec{\jmath})$; et h la symétrie par rapport à $\mathrm{Vect}(\vec{\imath}+\vec{k},\vec{\jmath})$ parallèlement à $\mathrm{Vect}(\vec{\imath},\vec{k})$.

Cadeaux du 22/09/22

Cadeau 1 :
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite positive, telle que la suite* $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ *diverge. En calculant* $\ln \frac{S_n}{S_{n-1}}$, *montrer que la série* $\sum \frac{u_n}{S_n}$ *diverge.*

Cadeau 2 :
On pose

$$D(x) = \begin{vmatrix} 7-x & 14-x & 3-x \\ 8-x & 2-x & -x \\ 13-x & -1-x & 2-x \end{vmatrix}.$$

Montrer qu'il existe deux réels α *et* β *tels que, pour tout* $x \in \mathbb{R}$, $D(x) = \alpha x + \beta$. *Déterminer* α *et* β.

Cadeaux du 23/09/22

Cadeau :
Montrer qu'il n'existe pas $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ telle que, $A' = P^{-1}AP$ où

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 7 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \textit{et} \qquad A' = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}.$$

Réponse du cadeau :

Analyse On suppose $P^{-1}AP = \left(\begin{smallmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{smallmatrix}\right)$. Alors, $\det A = \det A'$, d'où $0 = \lambda \cdot \mu$. Et, $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} A'$, d'où $\lambda + \mu = 0$. On en déduit donc que $\lambda = 0 = \mu$.

Synthèse On a

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

D'où, en multipliant à gauche par P et à droite par P^{-1}, on a

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

On en conclut que la matrice A n'est pas diagonalisable.