

CHAPITRE 1

Série

Hugo SALOU MPI*

Dernière mise à jour le 12 septembre 2022

Première partie

Cours

1 La nature d'une suite ou d'une série

MÉTHODE 1:

Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ peut

1. avoir une limite $\ell \in \mathbb{R}$;
2. avoir pour limite $\pm\infty$;
3. ne pas avoir de limite.

Converger concerne le premier point ; *avoir une limite* correspond aux deux premiers points et *diverger* correspond aux deux derniers.

Théorème de la limite monotone : toute suite croissante majorée a une limite.

Une série est notée $\sum u_n$. On dit qu'elle *converge* si la suite des sommes partielles S_n converge

$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k.$$

La série " $\sum u_n$ " n'a pas de valeurs mais une nature ; contrairement à la somme partielle " $\sum_{k=0}^n u_k$ a une valeur, on peut la calculer (elle existe toujours) ; et $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ qui est la limite de la somme partielle (elle existe si la série converge).

Si la suite (u_n) ne tends pas vers 0, la série $\sum u_n$ diverge mais la réciproque est fautive : par exemple, la somme des " $\frac{1}{n}$ " tends vers 0 mais la série diverge.

RAPPEL:

Notation en "grand O " : soient u et v deux suites réelles (ou complexes).

$$\begin{aligned} v_n = O(u_n) &\stackrel{\text{def}}{\iff} v_n = b_n \times u_n, \text{ où } b_n \text{ est bornée,} \\ v_n = o(u_n) &\stackrel{\text{def}}{\iff} v_n = \varepsilon_n \times u_n, \text{ où } \varepsilon_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0, \\ v_n \sim u_n &\stackrel{\text{def}}{\iff} v_n = \underbrace{(1 + \varepsilon_n)}_{\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1} \times u_n, \text{ où } \varepsilon_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0. \end{aligned}$$

Si on peut diviser par u_n , on peut vérifier

$$\begin{aligned} v_n = O(u_n) &\iff \frac{v_n}{u_n} \in [m, M], \\ v_n = o(u_n) &\iff \frac{v_n}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0, \\ v_n \sim u_n &\iff \frac{v_n}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1. \end{aligned}$$

Si la série $\sum u_n$ oscille entre des valeurs positives et négatives, on peut analyser $\sum |u_n|$ car si cette série converge, alors $\sum u_n$ aussi.

EXERCICE 2: 1. Quelle est la nature de la série $\sum \frac{1}{n^2 + \sqrt{n}}$?

$$0 \leq \frac{1}{n^2 + \sqrt{n}} \leq \frac{1}{n^2}$$

On sait déjà que $\sum \frac{1}{n^2}$ converge (vers $\frac{\pi^2}{6}$) mais ce résultat sera redonné dans la proposition 6 : Critère de RIEMANN. On en déduit que $\sum \frac{1}{n^2 + \sqrt{n}}$ converge aussi (par comparaison).

Autre méthode : on a

$$0 \leq \frac{1}{n^2 + \sqrt{n}} \sim \frac{1}{n^2}$$

(à démontrer) ; et comme $\sum \frac{1}{n^2}$ converge alors $\sum \frac{1}{n^2 + \sqrt{n}}$ aussi.

2. On a, comme dans le 1.,

$$\frac{1}{n^2 + \sqrt{n}} \sim \frac{1}{n^2}$$

et, comme $\sum \frac{1}{n^2}$ converge alors $\sum \frac{1}{n^2 + \sqrt{n}}$ converge aussi.

3. On a

$$\frac{1}{n \cos^2 n} \geq \frac{1}{n},$$

or, $\sum \frac{1}{n}$ diverge (d'après le critère de RIEMANN) et donc $\sum \frac{1}{n \cos^2 n}$ aussi.

4. On a

$$\frac{\ln n}{n^2} = \underbrace{\frac{\ln n}{n^{0,7}}}_{n \rightarrow +\infty} \times \frac{1}{n^{1,3}} = \underset{n \rightarrow +\infty}{\circ} \left(\frac{1}{n^{1,3}} \right).$$

Or, $\sum \frac{1}{n^{1,3}}$ converge (d'après le critère de RIEMANN) donc $\sum \frac{\ln n}{n^2}$ converge.

5. Dans cet exemple, on ne peut pas utiliser une minoration $\frac{\sin n}{n^2}$ par $\frac{1}{n^2}$ car la première suite change de signe.

On a

$$0 \leq \left| \frac{\sin n}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$$

or, $\sum \frac{1}{n^2}$ converge d'où $\sum \left| \frac{\sin n}{n^2} \right|$ converge et donc $\sum \frac{\sin n}{n^2}$ converge (absolument).

2 Comparer série et intégrale

MÉTHODE 3:

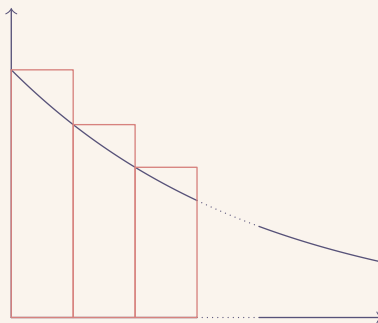


FIGURE 1 – Comparaison série intégrale
À faire : Refaire les deux graphiques

Des deux dessins ci-dessus, on en déduit les deux inégalités suivantes :

$$\int_1^{n+1} f(x) \, dx \leq \sum_{k=1}^n u_k \quad \text{et} \quad \sum_{k=2}^n u_k \leq \int_1^n f(x) \, dx.$$

Ainsi,

$$\int_1^{n+1} f(x) \, dx \leq \sum_{k=1}^n u_k \leq u_1 + \int_1^n f(x) \, dx.$$

Cette méthode permet de calculer une série en calculant une intégrale. On dispose, en effet, de bien plus d'outils pour calculer des intégrales que des séries.

EXERCICE 4:

On utilise le résultat trouvé dans la méthode précédente : on pose

$$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

On a donc

$$\begin{aligned} \int_1^{n+1} \frac{1}{x} dx &\leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq 1 + \int_1^n \frac{1}{x} dx \\ \Leftrightarrow \ln(n+1) - \ln 1 &\leq H_n \leq 1 + \ln n - \ln 1 \\ \Leftrightarrow \boxed{\ln(n+1) \leq H_n \leq 1 + \ln n.} \end{aligned}$$

On ne peut pas appliquer le théorème des gendarmes mais comme $\ln(n+1) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$, on en déduit que $H_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$ et donc la suite (H_n) diverge. On en déduit que la série $\sum \frac{1}{k}$ diverge.

Pour montrer que $H_n \sim \ln n$, on ne peut pas le faire à l'intuition mais il faut procéder comme il suit :

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln n} \leq \frac{H_n}{\ln n} \leq \frac{1 + \ln n}{\ln n} = \frac{1}{\ln n} + 1 \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1$$

et

$$\begin{aligned} \frac{\ln(n+1)}{\ln n} &= \frac{\ln\left(n\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)}{\ln n} \\ &= \frac{\ln n + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\ln n} \\ &= 1 + \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\ln n}. \end{aligned}$$

Or, d'après le théorème des gendarmes, $\frac{H_n}{\ln n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1$ et donc

$$\boxed{H_n \sim \ln n.}$$

Par suite, on a

$$\begin{aligned} H_n &= \ln(n) \times (1 + \varepsilon_n) \\ &= \ln(n) + \varepsilon_n \ln n \\ &= \ln n + o(\ln n). \end{aligned}$$

On veut montrer que $H_n - \ln n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \gamma$ i.e. $H_n - \ln n = \gamma + \varepsilon_n$ i.e. on veut montrer que

$$H_n = \ln n + \gamma + \varepsilon_n.$$

La forme ci-dessus est plus précise que le résultat que l'on a trouvé précédemment. Pourquoi ? On sait que le reste entre H_n et $\ln n$ est constant et ne tend pas vers $+\infty$ (ce qui n'est pas le cas de $o(\ln n)$).

On étudie la suite $(H_n - \ln n)$ et on montre qu'elle est convergente et que sa limite est γ . On sait déjà que l'on ne peut pas calculer γ numériquement, on utilise un théorème qui assure l'existence de la limite sans le calculer ; dans ce cas ci, on utilise le théorème de la limite monotone.

Soit $u_n = H_n - \ln n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On calcule $u_{n+1} - u_n$ et on pressent un télescopage :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= [H_{n+1} - \ln(n+1)] - [H_n - \ln(n)] \\ &= [H_{n+1} - H_n] - [\ln(n+1) - \ln n] \\ &= \frac{1}{n+1} - [\ln(n+1) - \ln n] \end{aligned}$$

car

$$\begin{aligned} H_n &= 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} \\ H_{n+1} &= 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} \end{aligned}$$

Calculer le signe de

$$\frac{1}{n+1} - [\ln(n+1) - \ln n].$$

MÉTHODE 1 Graphiquement : À faire : dessin à faire

MÉTHODE 2 Théorème des accroissements finis :

RAPPEL:

Si f est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, alors

$$\exists c \in]a, b[, f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

On sait déjà que \ln est continue sur $[n, n+1]$, et dérivable sur $]n, n+1[$ d'où, il existe $c \in]n, n+1[$ telle que

$$\ln(n+1) - \ln n = \frac{1}{c}((n+1) - n).$$

Dans les deux cas, on a montré que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante. Or,

$$\ln(n+1) \leq H_n \leq 1 + \ln n$$

$$\text{d'où } \ln(n+1) - \ln n \leq H_n - \ln n$$

et, en passant à la limite, on a $0 \leq H_n - \ln n$.

On en déduit que la suite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante et minorée par 0 donc elle converge et on note γ sa limite.

EXERCICE 5:

$$\begin{aligned} \ln(n!) &= \ln(1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times (n-1) \times n) \\ &= \cancel{\ln(1)} + \ln(2) + \ln(3) + \cdots + \ln(n-1) + \ln n \end{aligned}$$

Pour calculer cette somme, on utilise la méthode des rectangles. Avec des rectangles à droite on obtient l'inégalité

$$\ln(n!) \leq \int_2^{n+1} \ln(x) dx.$$

Avec les rectangles à gauche, on obtient

$$\int_1^n \ln x dx \leq \ln(n!).$$

D'où

$$\begin{aligned} [x \ln x - x]_1^n &\leq \ln(n!) \leq [x \ln x - x]_2^{n+1} \\ \Leftrightarrow \frac{\ln n - n + 1}{n \ln n} &\leq \frac{\ln(n!)}{n \ln n} \leq \frac{(n+1) \ln(n+1) - (n+1) - 2 \ln 2 + 2}{n \ln n} \end{aligned}$$

Or, les deux “gendarmes” tendent vers 1, par le théorème des gendarmes, on en déduit que

$$\frac{\ln(n!)}{n \ln n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 \quad \text{i.e.} \quad \ln(n!) \sim n \ln n.$$

PROPOSITION 6:

La série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

I.3 LE RESTE D'UNE SÉRIE CONVERGENTE

$$\underbrace{u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n}_n + \underbrace{u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots}_\infty$$

$$\sum_{k=0}^n u_k = S_n \rightarrow \text{somme partielle} \quad \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k = R_n \rightarrow \text{reste}$$

Le reste est défini si et seulement si la série $\sum u_n$ converge. La somme $S_n + R_n = \sum_{k=0}^{\infty} u_k$ est définie si et seulement si la série $\sum u_n$ converge. On pose $R \ni \ell = S_n + R_n$. Ainsi, on a

$$S_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$$

$$\ell - S_n = R_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell - \ell = 0$$

EXERCICE 7:

La série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge d'après le critère de RIEMANN. D'où le reste $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ est bien défini.

On utilise, encore une fois, la méthode des rectangles : en effet, on a

$$\int_{n+1}^{N+1} \frac{1}{x^2} dx \leq \sum_{k=n+1}^N \frac{1}{k^2} \leq \int_n^N \frac{1}{x^2} dx$$

$$\Leftrightarrow \left[-\frac{1}{x} \right]_{n+1}^{N+1} \leq \sum_{k=n+1}^N \frac{1}{k^2} \leq \left[-\frac{1}{x} \right]_n^N$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n+1} - \frac{1}{N+1} \leq \sum_{k=n+1}^N \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{N}.$$

On n'a pas besoin du théorème des gendarmes ; on utilise le fait que les inégalités larges “passent à la limite.”

$$\frac{1}{n+1} - \frac{1}{N+1} \leq \sum_{k=n+1}^N \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{N}$$

$$\downarrow N \rightarrow +\infty \quad \downarrow N \rightarrow +\infty \quad \downarrow N \rightarrow +\infty$$

$$\frac{1}{n+1} \leq R_n \leq \frac{1}{n}.$$

I.4 LES SÉRIES ALTERNÉES

THÉORÈME 8 (Séries alternées):

La série $\sum (-1)^k u_k$ (où u_k tend vers 0 en décroissant, d'où $u_k \geq 0$) converge. Et, ℓ a le même signe que le premier terme.

$$\begin{aligned}
S_0 &= u_0 \\
S_1 &= u_0 - u_1 \\
S_2 &= u_0 - u_1 + u_2 \\
&\vdots \\
S_n &= u_0 - u_1 + \cdots + (-1)^n u_n
\end{aligned}$$

À faire : Faire figure (fig. 4)

FIGURE 2 – Série alternée

Le reste $R_n = \ell - S_n$ change de signe une fois sur deux i.e. il est alterné. De plus, on a

$$|R_n| \leq u_{n+1}.$$

EXERCICE 9 (Mines-Ponts):

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$S_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

(Ça ne sert à rien mais...) comme $\frac{1}{k}$ tends vers 0 en décroissant, d'où, d'après le théorème des séries alternées, la suite (S_n) converge.

Montrons que

$$(1) \quad \ln 2 - S_n = \int_0^1 \frac{(-t)^n}{1+t} dt$$

et (2) en déduire que S_n tends vers $\ln 2$.

1. On remarque que

$$\int_0^1 \frac{1}{1+t} dt = [\ln|1+t|]_0^1 = \ln 2 \quad \text{et} \quad \frac{1}{k} = \int_0^1 t^{k-1} dt = \left[\frac{t^k}{k} \right]_0^1.$$

D'où,

$$\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \int_0^1 t^{k-1} dt.$$

Or, par linéarité de l'intégrale, on a

$$S_n = \int_0^1 \left(\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} t^{k-1} \right) dt.$$

2.

$$\begin{aligned}
|\ln 2 - S_n| &= \left| \int_0^1 \frac{(-1)^n}{1+t} dt \right| \\
&\leq \int_0^1 \left| \frac{(-1)^n}{1+t} \right| dt \\
&\leq \int_0^1 t^n dt \\
&= \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1}
\end{aligned}$$

par croissance de l'intégrale. D'où, $|\ln 2 - S_n| \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ d'après le théorème des gendarmes. On en conclut que

$$\boxed{S_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ln 2.}$$

Or,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (-t)^{k-1} &= (-t)^0 + (-t)^1 + \dots + (-t)^{n-1} \\ &= \frac{1 - (-t)^n}{1 - (-t)} \end{aligned}$$

car

$$\sum_{k=0}^N q^k = q^0 + q^1 + \dots + q^N = \frac{1 - q^{N+1}}{1 - q} \quad \text{si } q \neq 1.$$

D'où

$$\begin{aligned} S_n &= \int_0^1 \frac{1 - (-t)^n}{1 + t} dt \\ &= \int_0^1 \frac{1}{1 + t} dt - \int_0^1 \frac{(-t)^n}{1 + t} dt \\ &= \boxed{\ln 2 - \int_0^1 \frac{(-t)^n}{1 + t} dt.} \end{aligned}$$

On sait que R_n existe car la suite S_n converge.

La série $\sum R_n$ converge-t-elle ou diverge-t-elle? On sait que $R_n = (-1)^n |R_n|$ au signe près. On veut montrer que $|R_n|$ tend vers 0 en décroissant.

$$\begin{aligned} |R_n| &= \int_0^1 \frac{t^n}{1 + t} dt \leq \int_0^1 t^n dt \quad \text{car } \frac{t^n}{1 + t} \leq t^n \forall t \in [0, 1] \\ &\leq \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

D'où $|R_n|$ tend vers 0 d'après le théorème des gendarmes.

$$\begin{aligned} |R_{n+1}| - |R_n| &= \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{n+1} dt - \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt \\ &= \int_0^1 \frac{t^{n+1} - t^n}{1+t} dt \\ &= \int_0^1 \frac{(t-1)t^n}{1+t} dt \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

On aurait aussi très bien pu utiliser le théorème des séries alternées : $|R_n| \leq u_{n+1}$.

Cadeau du 06/09/2022 : calculer les trois limites suivantes (avec un développement limité)

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{8+x} - 2\sqrt{1+x}}{x}$ (corrigé);
2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{\sin^3 x}$ (non corrigé);
3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{x^2}$ (corrigé).

La limite $\ln(\cos x)/x^2$ existe-t-elle pour $x \rightarrow 0$? Si oui, quelle est sa valeurs.

On utilise un développement limité pour $\ln(\cos x)$ et on obtient $\ln(\cos x) = \ln\left(1 - \frac{x^2}{2} + \mathfrak{o}(x^2)\right) = -\frac{x^2}{2} + \mathfrak{o}(x^2)$. Et donc, en divisant ce développement limité par x^2 , on obtient

$$\frac{\ln(\cos x)}{x^2} = \frac{-\frac{x^2}{2} + \mathfrak{o}(x^2)}{x^2} = -\frac{1}{2} + \mathfrak{o}(1) \xrightarrow{x \rightarrow 0} -\frac{1}{2}.$$

Même question avec $(\sqrt[3]{8+x} - 2\sqrt{1+x})/x$.

On a $\sqrt[3]{8+x} = (8+x)^{1/3} = 2\left(1 + \frac{x}{8}\right)^{1/3} = 2 \times (1+u)$ où $u = \frac{x}{8}$ tends vers 0. On en déduit que

$$\begin{cases} \sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + \mathfrak{o}(x) \\ \sqrt[3]{8+x} = 2 + \frac{2}{3}x + \mathfrak{o}(x). \end{cases}$$

D'où,

$$\sqrt[3]{8+x} - 2\sqrt{1+x} = 2 + \frac{1}{12}x + \mathfrak{o}(x) - 2 - 2x + \mathfrak{o}(x) = -\frac{11}{12}x + \mathfrak{o}(x).$$

On en conclut donc que

$$\frac{\sqrt[3]{8+x} - 2\sqrt{1+x}}{x} = -\frac{11}{12} + \mathfrak{o}(1) \xrightarrow{x \rightarrow 0} -\frac{11}{12}.$$

Cadeau de plus : $(n - \frac{1}{2}) \ln(1 - \frac{1}{n}) + 1 \sim_{n \rightarrow +\infty} ?$

I.5 LE CRITÈRE DE D'ALEMBERT

THÉORÈME 10 (Critère de d'Alembert):

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite strictement positive telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell.$$

1. Si $\ell < 1$, alors la série $\sum u_n$ converge.
2. Si $\ell > 1$, alors la série $\sum u_n$ diverge.
3. Si $\ell = 1$, on ne sait pas (BOF).

PREUVE:

On suppose $u_n > 0$ et $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell < 1$. u_{n+1}/u_n tends vers un réel ℓ inférieur à 1 d'où, il existe un certain λ inférieur à 1 tel qu'à partir d'un certain rang n_0

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \lambda.$$

Soit $n \geq n_0$. On a

$$u_n = \frac{\overset{\leq \lambda}{u_n}}{\underset{\leq \lambda}{u_{n-1}}} \times \frac{\overset{\leq \lambda}{u_{n-1}}}{\underset{\leq \lambda}{u_{n-2}}} \times \cdots \times \frac{\overset{\leq \lambda}{u_{n_0+1}}}{\underset{\leq \lambda}{u_{n_0}}} \times u_{n_0}.$$

D'où, $u_n \leq \lambda^{n-n_0} \times u_{n_0}$ i.e.

$$u_n \leq \lambda^n \times \underbrace{\frac{u_{n_0}}{\lambda^{n_0}}}_{=\text{const}} \quad \text{donc} \quad 0 < u_n \leq \text{const} \times \lambda^n.$$

Or, $\sum \text{const} \times \lambda^n = \text{const} \times \sum \lambda^n$ la série de droite est une série géométrique de raison $\lambda < 1$.

RAPPEL (séries géométriques):

$$\underbrace{\lambda^0 + \lambda^1 + \dots + \lambda^n}_{=S_n} = \frac{1 - \lambda^{n+1}}{1 - \lambda} \text{ si } \lambda \neq 1$$

$$\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 - \lambda}.$$

Fin du RAPPEL.

Or, $\sum \lambda^n$ converge car $\lambda < 1$ et donc $\sum u_n$ converge.

REMARQUE 11:

EXERCICE 12:

La série $\sum a^n/n$ converge-t-elle ?

Comme on n'a pas d'information sur le signe de a , on s'intéresse à la convergence de la série $\sum |a^n/n|$. Or, $|a^n/n| = |a|^n/n$. On étudie plusieurs cas.

- Si $|a| < 1$, alors $|a|^n/n \leq |a|^n$ et, comme $\sum |a|^n$ converge (série géométrique), la série $|a|^n/n$ converge et donc a^n/n également.
- Si $|a| = 1$, alors
 - si $a = 1$, alors la série $\sum \frac{1}{n}$ converge.
 - si $a = -1$, alors série $\sum (-1)^n/n$ converge.
- Si $|a| > 1$, alors $|a|^n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ car

$$\left. \begin{array}{l} |a|^n = e^{n \ln |a|} \\ n = e^{\ln n} \end{array} \right\} \implies \frac{|a|^n}{n} = \frac{e^{n \ln |a|}}{e^{\ln n}} = e^{n \ln |a| - \ln n} \text{ or } n \ln |a| - \ln n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty.$$

D'où, $a^n/n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ donc $\sum a^n/n$ diverge.

La série $\sum a^n/n!$ converge-t-elle ?

Comme pour la 1^{ère} série, on n'a pas d'information sur le signe de a , on utilise des valeurs absolue : soit $u_n = |a|^n/n!$. On utilise le critère d'ALEMBERT :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{|a|^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{|a|^n}{n!}} = \frac{|a|^{n+1}}{|a|^n} \times \frac{n!}{(n+1)!} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0 = \ell < 1.$$

D'où, $\sum |a|^n/n!$ converge et donc

$$\boxed{\sum \frac{a^n}{n!} \text{ converge } \forall a \in \mathbb{R} .}$$

On remarque que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} = e^a$ d'où $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$.

I.6 SOMMER LES \sim , \mathcal{O} , \mathcal{O}

LEMME 13: 1. Si $\sum v_n$ converge et $u_n \sim v_n$, alors le reste $\sum_{k=n+1}^{\infty} v_k$ de $\sum v_n$ existe et il est équivalent au reste de $\sum u_n$.

2. Si $\sum v_n$ diverge et si $u_n \sim v_n$, alors le reste de $\sum v_n$ n'existe pas mais on peut utiliser la somme partielle et elle est équivalente à celle de $\sum u_n$.

Le LEMME ci-dessus est également vrai en remplaçant \sim par \mathcal{O} ou \mathcal{O} .

THÉORÈME 14:

EXERCICE 15: 1. On sait que $u_n \sim v_n$ car

$$v_n = \frac{n - (n-1)}{n(n-1)} = \frac{1}{n(n-1)} \sim \frac{1}{n^2}$$

ou

$$v_n = \frac{1}{n} \times \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{n}} - 1 \right) = \frac{1}{n} \times \left(1 + \frac{1}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right) - 1 \right) = \frac{1}{n^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) \sim \frac{1}{n^2}.$$

D'où, $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont la même nature, et comme $\sum u_n$ converge, alors $\sum v_n$ converge. Soient $U_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k$ et $V_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} v_k$. D'après le THÉORÈME 14, on a $U_n \sim V_n$. On peut calculer V_n (somme télescopique) :

$$\begin{aligned} \sum_{k=n+1}^N \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) &= \frac{1}{n} - \frac{1}{\cancel{n+1}} + \frac{1}{\cancel{n+1}} - \frac{1}{\cancel{n+2}} + \dots + \frac{1}{\cancel{N-1}} - \frac{1}{N} \\ &= \frac{1}{n} - \frac{1}{N} \end{aligned}$$

Or, quand $N \rightarrow \infty$, on a $V_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} v_k = \frac{1}{n}$. D'où, $U_n \sim \frac{1}{n}$.

2. On a $u_n = \frac{1}{n}$ et $v_n = \ln n - \ln(n-1)$. On sait que $u_n \sim v_n$ car ... D'où les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont la même nature. Or, $\sum \frac{1}{n}$ diverge¹ donc les deux séries divergent. Soient $U_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k}$ et $V_n = \sum_{k=2}^n (\ln k - \ln(k-1))$. Grâce au THÉORÈME 14, on a $U_n \sim V_n$. On peut calculer V_n (somme télescopique) :

$$\begin{aligned} V_n &= \sum_{k=2}^n (\ln k - \ln(k-1)) \\ &= \ln 2 - \ln 1 + \ln 3 - \ln 2 + \dots + \ln n - \ln(n-1) \\ &= \ln n - \ln 1 \\ &= \ln n. \end{aligned}$$

Cadeau du 07/09/2022 : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{\sin^3 x}$?

Comme $\sin x \sim_{x \rightarrow 0} x$, $\sin^3 x \sim_{x \rightarrow 0} x^3$. Le développement limité de $\tan x$ n'est pas au programme, il faudra donc normalement le redémontrer au besoin. On a $\tan x = (\sin x)/(\cos x)$. Or, comme $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \dots$ et $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \dots$, on a donc

$$\begin{aligned} \tan x &= \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{x - \frac{x^3}{6} + \mathcal{O}(x^3)}{1 - \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^3)} \\ &= \left(x - \frac{x^3}{6} + \mathcal{O}(x^3) \right) \left(1 + \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^3) \right) \\ &= x + \frac{x^3}{3} + \mathcal{O}(x^3) \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\frac{\tan x - x}{\sin^3 x} = \frac{\frac{x^3}{3} + \mathcal{O}(x^3)}{x^3 + \mathcal{O}(x^3)} = \frac{1}{3} + \mathcal{O}(1) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{3}.$$

1. On peut calculer, comme fait après, une expression de V_n , et en déduire que, comme elle diverge, $\sum \frac{1}{n}$ diverge également.

On cherche un équivalent pour $n \rightarrow \infty$ de

$$\left(n - \frac{1}{2}\right) \ln \left(1 - \frac{1}{n}\right) + 1.$$

On cherche un développement limité de $\ln \left(1 - \frac{1}{n}\right)$ à l'aide de celui de $\ln(1-x)$: $\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \dots$ et donc

$$\ln \left(1 - \frac{1}{n}\right) = -\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{3n^3} \dots$$

D'où,

$$\begin{aligned} \left(n - \frac{1}{2}\right) \ln \left(1 - \frac{1}{n}\right) + 1 &= \left(n - \frac{1}{2}\right) \left(-\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{3n^3} + \dots\right) + 1 \\ &= -1 + 0 - \frac{1}{12n^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) + 1 \\ &= -\frac{1}{12n^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &\underset{n \rightarrow \infty}{\sim} -\frac{1}{12n^2}. \end{aligned}$$

I.7 DÉVELOPPEMENTS ASYMPTOTIQUES

On cherche un développement asymptotique de la série harmonique (H_n) . Cette méthode pourra être utilisée dans le **DM₁**. Les formules à démontrer sont

$$H_n = \ln n + \mathcal{O}(\ln n) \tag{1}$$

$$= \ln n + \gamma + \mathcal{O}(1) \tag{2}$$

$$= \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right) \tag{3}$$

$$= \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right). \tag{4}$$

Le développement (1) a déjà été fait de deux méthodes différentes dans les EXERCICES 4 et 15. Le développement (2) a déjà été fait une fois dans l'EXERCICE 4, mais nous allons utiliser une autre méthode :

$$\begin{aligned} (2) &\iff H_n - \ln n = \gamma + \mathcal{O}(1) \\ &\iff \text{la suite } (H_n - \ln n) \text{ converge.} \end{aligned}$$

REMARQUE:

Le " \implies " et " \iff " ne peut pas remplacer les mots français : on ne peut pas écrire

$$\text{"d'où } \frac{u_n}{v_n} \longrightarrow 1 \iff u_n \sim v_n \text{"}$$

mais on doit écrire

$$\text{"d'où } \frac{u_n}{v_n} \longrightarrow 1 \text{ donc } u_n \sim v_n \text{"}$$

On va montrer que $(H_n - \ln n)$ converge. On nomme cette suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

REMARQUE 16 (Séries télescopiques): (*) On sait que

$$(\cancel{u_1} - u_0) + (\cancel{u_2} - \cancel{u_1}) + \dots + (u_n - \cancel{u_{n-1}}) = u_n - u_0.$$

Autrement dit,

$$\sum_{k=1}^n (u_k - u_{k-1}) = u_n - u_0.$$

(**) On sait que

$$\sum_{k=n+1}^N (u_k - u_{k-1}) = (\cancel{u_{n+1}} - u_n) + (\cancel{u_{n+2}} - \cancel{u_{n+1}}) + \cdots + (u_N - \cancel{u_{N-1}}) = u_N - u_n.$$

Or, si u_N tends vers 0 quand $N \rightarrow \infty$, alors, en passant à la limite,

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} (u_k - u_{k-1}) = -u_n.$$

Fin de la REMARQUE.

On a

$$\begin{aligned} u_n - u_{n-1} &= (H_n - \ln n) - (H_{n-1} - \ln(n-1)) \\ &= (H_n - H_{n-1}) - (\ln n - \ln(n-1)) \\ &= \frac{1}{n} - \ln \frac{n}{n-1} \\ &= \frac{1}{n} + \ln \frac{n-1}{n} \\ &= \frac{1}{n} + \ln \left(1 - \frac{1}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n} - \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= -\frac{1}{2n^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &\sim -\frac{1}{2n^2}. \end{aligned}$$

Or, $\sum \frac{-1}{2n^2} = -\frac{1}{2} \sum \frac{1}{n^2}$ qui est une suite convergente. La série $\sum (u_n - u_{n-1})$ converge donc. Donc, d'après le THÉORÈME 14, les restes des séries $\sum \frac{-1}{2n^2}$ et $\sum (u_n - u_{n-1})$ sont équivalents.

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} (u_k - u_{k-1}) = -u_n \quad \text{car la suite tend vers 0}$$

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{-1}{2k^2} = -\frac{1}{2} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

et, en comparant la série $\sum \frac{1}{n^2}$ et l'intégrale $\int \frac{1}{x^2} dx$, on montre que $\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \sim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}$ (c.f. EXERCICE 7). On en déduit que

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} -\frac{1}{2k^2} \sim -\frac{1}{2n} \quad \text{et donc } u_n \sim \frac{1}{2n}.$$

Cadeau du 08/09/2022 :

$$\begin{aligned} \int \cos x \ln(1 + \cos x) dx & \quad (\text{IPP}) & \int \text{Arctan } x dx & \quad (\text{IPP puis CDV}) \\ \int \text{Arcsin } x dx & \quad (\text{IPP puis CDV}) & \int \frac{1-2x}{1+x^2} dx & \end{aligned}$$

Le développement limité de Arctan est à connaître : pour le retrouver, on peut utiliser le développement de $1/(1+x^2)$ et en primitivant :

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots \quad \xrightarrow{f \cdot dx} \quad \text{Arctan } x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$$

PROPOSITION 17 (Stirling):

$$n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}.$$

EXERCICE 18:

L'expérience aléatoire est "on lance $2n$ fois une pièce" et l'évènement nommé A est "on obtient autant de \mathbf{P} que de \mathbf{F} ." Un résultat est une $2n$ -liste de \mathbf{P} et de \mathbf{F} . (Ce n'est pas un ensemble : l'ordre dans une liste compte.) Autrement dit, un résultat est un élément de $\{\mathbf{P}, \mathbf{F}\}^{2n}$. Par exemple

$$\underbrace{(\mathbf{P}, \mathbf{F}, \mathbf{F}, \dots, \mathbf{P}, \mathbf{F})}_{2n} \in \{\mathbf{P}, \mathbf{F}\}^{2n}$$

est un résultat possible. L'ensemble des résultats possibles est nommé "univers Ω ." Dans cet exemple-ci, tous les résultats sont équiprobables. L'énoncé de l'exercice est alors de déterminer $u_n = P(A)$:

$$u_n = P(A) = \frac{\# \text{ résultats favorables à } A}{\# \text{ résultats possibles}} = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}.$$

On cherche la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ quand n tends vers $+\infty$. Construire un résultat de Ω , c'est choisir \mathbf{P} ou \mathbf{F} $2n$ fois, il y a 2^{2n} manières. On en déduit que $\text{Card}(\Omega) = 2^{2n} = 4^n$. Construire un résultat de A , c'est : (1) choisir les n places prises par les \mathbf{P} dans la $2n$ -liste ; (2) y placer les n \mathbf{P} puis ailleurs les n \mathbf{F} . Pour le (1), il y a $\binom{2n}{n}$ manières ; pour le (2), il y a une seule manière. On conclut que

$$\text{Card}(A) = \binom{2n}{n} \times 1 = \frac{(2n)!}{n!(2n-n)!} = \frac{(2n)!}{(n!)^2}.$$

Par équiprobabilité, la probabilité u_n de l'évènement A est

$$u_n = \frac{(2n)!/(n!)^2}{2^{2n}}.$$

D'après la formule de STIRLING, on a $n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$. D'où,

$$\begin{cases} (n!)^2 \sim \left(\frac{n}{e}\right)^{2n} 2\pi n \\ (2n)! \sim \left(\frac{2n}{e}\right)^{2n} \sqrt{2\pi} \times 2n. \end{cases}$$

$$u_n \sim \frac{2^{2n} \left(\frac{n}{e}\right)^{2n} \sqrt{4\pi n}}{2^{2n} \left(\frac{2n}{e}\right)^{2n} 2\pi n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi n}}.$$

Deuxième partie

T.D.

Exercice 1

Question 10

Comme

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{1}{n} - 1\right)^n &= (-1)^n \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \\
 &= (-1)^n e^{n \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)} \\
 &= (-1)^n e^{n\left(-\frac{1}{n} + \varepsilon\left(\frac{1}{n}\right)\right)} \\
 &= (-1)^n e^{-1 + \varepsilon(1)} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0,
 \end{aligned}$$

la série $\sum \left(\frac{1}{n} - 1\right)^n$ diverge.

Question 12

$$\begin{aligned}
 \sin\left(\pi\sqrt{n^2 + 1}\right) &= \sin\left(n\pi\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}\right) \\
 &= \sin\left(n\pi\left(1 + \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{8n^4} + \dots\right)\right) \\
 &= \sin\left(n\pi + \frac{\pi}{2n} - \frac{\pi}{8n^3} + \dots\right) \\
 &= \cos(n\pi) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2n} - \frac{\pi}{8n^3} + \dots\right) + \sin(n\pi) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2n} - \frac{\pi}{8n^3} + \dots\right) \\
 &= (-1)^n \sin\left(\frac{\pi}{2n} - \frac{\pi}{8n^3} + \dots\right) \\
 &= (-1)^n \left(\frac{\pi}{2n} - \frac{\pi}{8n^3} - \frac{\left(\frac{\pi}{2n}\right)^3}{3!} + \dots\right) \\
 &= (-1)^n \frac{\pi}{2n} + \varepsilon\left(\frac{1}{n^2}\right)
 \end{aligned}$$

D'où $\sum u_n = \sum (-1)^n \frac{\pi}{2n} + \sum \varepsilon\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Or, d'après le théorème des séries alternées converge d'après le théorème des séries alternées. Et, comme $\sum \frac{1}{n^2}$ converge et $\frac{1}{n^2}$ est positive, alors $\sum \varepsilon\left(\frac{1}{n^2}\right)$ converge.

Exercice 4

Ma solution Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite définie telle que $\sum u_n$ converge mais ne converge pas absolument. Comme on sait que $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| = P_n + (-M_n)$. La série $\sum |u_n|$ diverge. On suppose que seul $\sum P_n$ ou seul $\sum M_n$ diverge ; on suppose, sans perte de généralité que $\sum P_n$ diverge et que $\sum M_n$ converge vers un certain réel ℓ . Comme on sait que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = P_n + M_n$, et que $\sum u_n$ converge (vers un certain réel ℓ'), alors $\sum u_n - \sum P_n$ converge vers $\ell' - \ell$ mais $\forall n \in \mathbb{N}, M_n = u_n - P_n$: contradiction. On en déduit que $\sum P_n$ et $\sum M_n$ divergent.

Correction Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite définie telle que $\sum u_n$ converge mais ne converge pas absolument. On pose $P_n = \max(0, u_n)$ et $M_n = \min(0, u_n)$. Les suite sont, par exemple comme,

$$\begin{cases} P_n : 0, 0, 8, 0, 0, 4, \dots \\ M_n : -1, -2, 0, -3, -2, 0, \dots \end{cases}$$

On remarque que $u_n = P_n + M_n$ et $|u_n| = P_n - M_n$. Or, $\sum u_n$ converge et $\sum u_n = \sum P_n + \sum M_n$, d'où $\sum P_n$ et $\sum M_n$ sont de même nature. On suppose que $\sum P_n$ et $\sum M_n$ convergent, ce qui est absurde car $\sum |u_n| = \sum P_n - \sum M_n$ qui diverge. On en déduit que

les séries $\sum P_n$ et $\sum M_n$ divergent.

Suite de l'exercice.

Si $\sum u_n$ converge mais ne converge pas absolument, alors en changeant l'ordre des termes, on peut faire converger la série $\sum u_n$ vers la limite que l'on veut. La somme n'est plus commutative.

Si $\sum u_n$ converge et converge absolument, alors la somme est commutative (la famille est sommable).

Exercice 3

Question 1

Soient n et k deux entiers naturels.

$$\begin{aligned} \int_0^1 t^{2k} dt &= \left[\frac{t^{2k+1}}{2k+1} \right]_0^1 = \frac{1}{2k+1}. \\ \sum_{k=0}^n (-1)^k t^{2k} &= \sum_{k=0}^n (-t^2)^k = \frac{1 - (-t^2)^{n+1}}{1 + t^2} = \frac{1 + (-1)^n t^{2n+2}}{1 + t^2}. \end{aligned}$$

Question 2

La série $\sum (-1)^k / (2k+1)$ est alternée et, pour tout $k \geq 0$, $1/(2k+1) \geq 0$ et tends vers 0 en décroissant. On en déduit, par le théorème des séries alternées que $\sum (-1)^k / (2k+1)$ converge. On cherche maintenant sa valeur :

Soit n un entier naturel. On a

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \int_0^1 t^{2k} dt = \int_0^1 \sum_{k=0}^n (-1)^k t^{2k} dt \\ &= \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt + (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} dt \\ &= \text{Arctan } 1 - \text{Arctan } 0 + (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} dt \\ &= \frac{\pi}{4} + (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} dt. \end{aligned}$$

Soit $t \in [0, 1[$. On sait que $\frac{t^{2n+2}}{1+t^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. On en déduit donc que

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}.$$

Exercice 6

Soient $x \in]0, \pi[$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\sum_{k=1}^n f_k(x) = \sum_{k=1}^n \cos^{k-1} x \cdot \cos((k-1)x) \quad ?$$

Exercice 7

Question 1

On sait, d'après le critère de RIEMANN que la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$. La fonction ζ est donc correctement définie sur l'intervalle $I =]1, +\infty[$.

Question 2

Soit x et $y \in I$ tels que $x < y$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On sait que

$$n^x \leq n^y \quad \text{d'où} \quad \frac{1}{n^x} \leq \frac{1}{n^y}$$

et, par linéarité de la somme, on a

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{n^x} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{n^y}.$$

En passant à la limite, on obtient bien $\zeta(x) \leq \zeta(y)$. La fonction ζ est donc décroissante sur I .

Question 3

Soit $n \geq 2$ et $x \in I$. On utilise une comparaison série-intégrale :

$$\begin{aligned} \int_2^{n+1} \frac{1}{t^x} dt &\leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^x} \leq \int_1^n \frac{1}{t^x} dt \\ \left[\frac{t^{-x+1}}{-x+1} \right]_2^{n+1} &\leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^x} \leq \left[\frac{t^{-x+1}}{-x+1} \right]_1^n \\ \frac{(n+1)^{1-x}}{1-x} - \frac{2^{1-x}}{1-x} &\leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^x} \leq \frac{n^{1-x}}{1-x} - \frac{1}{1-x} \end{aligned}$$

On passe à la limite pour $n \rightarrow +\infty$, on a donc

$$1 + \frac{1}{(x-1)2^{x-1}} \leq \zeta(x) \leq 1 + \frac{1}{x-1}$$

car $1-x \in]-\infty, 0[$.

Question 4

On sait que

$$1 + \frac{1}{x-1} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1 \quad \text{et} \quad 1 + \frac{1}{(x-1)2^{x-1}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1.$$

Par théorème des gendarmes, on en déduit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \zeta(x) = 1$.

De même, on sait que

$$1 + \frac{1}{(x-1)2^{x-1}} \xrightarrow{x \rightarrow 1^+} +\infty$$

d'où, par minoration, on en déduit que $\lim_{x \rightarrow 1^+} \zeta(x) = +\infty$.

Montrons que $\frac{1}{1-x} \underset{x \rightarrow 1^+}{\sim} \zeta(x) - 1$: on a

$$\frac{1}{(x-1)2^{x-1}} \leq \zeta(x) - 1 \leq \frac{1}{x-1}.$$

On calcule donc

$$\frac{\frac{1}{x-1}}{\frac{1}{(x-1)2^{x-1}}} = \frac{(x-1)2^{x-1}}{x-1} = 2^{x-1} \xrightarrow{x \rightarrow 1^+} 1.$$

Exercice 2

Question 1

Soit $\alpha > 1$. On sait, d'après le critère de RIEMANN que la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge. Ainsi, le reste R_n existe. Or, comme

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n - R_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} \quad \text{où} \quad S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha},$$

on en déduit, en passant à la limite, que la suite (R_n) tend vers 0.