Chapitre 3

Intégrer sur un intervalle

Hugo Salou MPI*

Dernière mise à jour le 26 septembre 2022

Première partie

Cours

1 Intégrer une fonction continue par morceaux sur un segment

Toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue sur un segment $[a, b]$ possède une intégrale $\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$.

Toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue par morceaux sur un segment $[a, b]$ s'il existe une subdivision $\sigma = (x_0, \dots, x_n) \in \mathfrak{S}_{[a,b]}$ de $[a, b]$ (donc $a = x_0 < \cdots < x_n = b$) et que $f\big|_{]x_{i-1},x_i[}$ est continue, pour tout i et que les limites de f en x_i et x_{i-1}. On dit que σ est *adaptée* à f. Alors, l'intégrale de f est

$$\int_{[a,b]} f = \sum_{i=1}^{n} \int_{[x_{i-1},x_i]} f_i$$

où $f_i = f\big|_{[x_{i-1},x_i]}$.

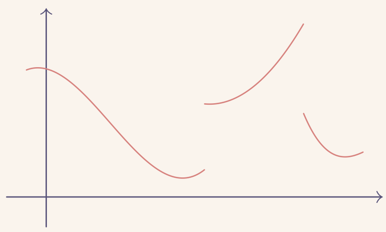

Figure 1 – Une fonction continue par morceaux

Remarque 1 (intégrale et primitive):
On dit que $F : I \to \mathbb{R}$ est une primitive de $f : I \to \mathbb{R}$ si F est dérivable et $F' = f$.

$$F \underset{\int \square\ \mathrm{d}x}{\overset{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\square)}{\rightleftarrows}} f\ .$$

2 Qu'est ce qu'une intégrale généralisée ?

Définition 2:
Une fonction est *continue par morceaux* sur un intervalle I si elle est continue par morceaux sur chacun des segments inclus dans I.

Pour la 1ère intégrale, la fonction intégrée n'est pas définie en $t = 1$. On intègre donc jusqu'à x pour $x < 1$ et on prend la limite pour $x \to 1$.

Pour la 2nde intégrale, la borne supérieur est $+\infty$. On intègre donc jusqu'à x et on étudie la limite pour $x \to +\infty$ (comme pour les séries).

$$F(x) := \int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \begin{cases} \ell \in \mathbb{R} & \implies \text{l'intégrale } \int_a^{+\infty} f \text{ converge} \\ \text{sinon} & \implies \text{l'intégrale } \int_a^{+\infty} f \text{ diverge.} \end{cases}$$

Définition 3:
Soit f une fonction continue par morceaux sur un intervalle $[a, b[$, où $-\infty < a < b \leqslant +\infty$. Soit, pour $x \in [a, b[$, $F(x) = \int_{[a,x]} f$. On dit que l'intégrale $I = \int_{[a,b[} f$ converge en b si la limite $\lim_{x\to b^-} F(x)$ existe et est finie. Sinon, on dit qu'elle diverge.

Exemple 4:
Le programme nous permet d'utiliser sans re-démontrer les points 2. et 3.

1. Montrons que $I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\ \mathrm{d}t$ converge.

   L'intégrale I est impropre en 1 (ou est généralisé en 1). On remarque que, pour tout $x \in [0, 1[$,
$$\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\ \mathrm{d}t = \mathrm{Arcsin}\, x \xrightarrow[x\to 1^-]{} \mathrm{Arcsin}\, 1$$
   car Arcsin est continue. Or, $\mathrm{Arcsin}\, 1 = \frac{\pi}{2}$. Donc, l'intégrale I converge et que $I = \frac{\pi}{2}$.
2. *L'intégrale $J = \int_0^1 \ln t\ \mathrm{d}t$ est convergente en 0.*
   L'intégrale J est impropre en 0. On remarque que, pour $x \in]0, 1]$,
$$\int_x^1 \ln t\ \mathrm{d}t = \big[t\ln t - t\big]_x^1 = -1 - x\ln x + x \xrightarrow[x\to 0^+]{} -1$$
   par croissances comparées. On en déduit que l'intégrale J converge et que elle est égale à -1. Même si la borne supérieur est différente, on peut retrouver cette formule avec les relations de Chasles sur les intégrales.
3. *L'intégrale $B = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{Kt}\ \mathrm{d}t$ (où K est une constante) converge en $+\infty$ si et seulement si $K < 0$.*
   L'intégrale B est impropre en $+\infty$. On remarque que, pour $x \in \mathbb{R}_*^+$,
$$\int_0^x \mathrm{e}^{Kt}\ \mathrm{d}t = \begin{cases} \left[\frac{\mathrm{e}^{Kt}}{K}\right]_0^x & \text{si } K \neq 0 \\ x & \text{si } K = 0. \end{cases}$$
   Or, $x \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ donc B diverge si $K = 0$; de plus,
$$\frac{\mathrm{e}^{Kx} - 1}{K} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \begin{cases} -\frac{1}{K} & \text{si } K < 0 \\ +\infty & \text{si } K > 0. \end{cases}$$
   On en déduit que l'intégrale B converge si et seulement si $K < 0$ et, si $K < 0$, on a $B = -\frac{1}{K} > 0$.

Remarque 5:
Si f est continue par morceaux sur $]a, b[$ (où $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$), et l'intégrale $\int_{]a,b[} f$ est impropre en a et en b, alors on utilise la relation de Chasles en découpant cette intégrale avec $c \in]a, b[$: l'intégrale $\int_{]a,b[} f$ converge si et seulement si $\int_{]a,c]}$ converge **et** $\int_{[c,b[}$ converge. Si ces deux intégrales convergent, alors
$$\int_{]a,b[} f = \int_{]a,c]} f + \int_{[c,b[} f.$$

Exercice 6:
Cet exercice, comme indiqué dans le programme, peut être utilisé sans avoir à le re-démontrer.
Soit α un réel. Montrons que
- *l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\ \mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\alpha > 1$ (comme pour les séries) ;* *[critère de Riemann en $+\infty$]*
- *l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}\ \mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\alpha < 1$;* *[critère de Riemann en 0]*
- *l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\ \mathrm{d}t$ diverge pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.*

1. L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\ \mathrm{d}t$ est impropre en $+\infty$. Soit $x \in [1, +\infty[$.
$$\int_1^x f(t)\ \mathrm{d}t = \begin{cases} \big[\ln t\big]_1^x & \text{si } \alpha = 1 \\ \left[\frac{t^{-\alpha-1}}{-\alpha+1}\right] & \text{si } \alpha \neq 1 \end{cases}$$
$$= \begin{cases} \frac{x^{-\alpha+1}-1}{-\alpha+1} & \text{si } \alpha \neq 1 \\ \ln x \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}$$
   Si $-\alpha+1 < 0$, alors $\int_1^x \frac{1}{t^\alpha}\ \mathrm{d}t \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{1}{\alpha-1}$. Si $-\alpha+1 > 0$, alors $\int_1^x \frac{1}{t^\alpha}\ \mathrm{d}t \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.
   L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\ \mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Remarque 7:
Si $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}^+$, l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ peut converger même si $f(t) \underset{t\to+\infty}{\not\longrightarrow} 0$. En effet, la fonction décrite sur le poly est un bon exemple : son intégrale converge mais la fonction ne tend pas vers 0.

Proposition 8 (intégrales faussement impropres):
Si une fonction $f :]a, b] \to \mathbb{R}$ est continue sur $]a, b]$ et possède une limite finie ℓ en a, alors son intégrale $\int_a^b f(t)\,d t$est impropre en a mais elle converge en a. On dit donc qu'elle est *faussement* impropre.

Preuve:
Soit $x \in]a, b]$. On considère l'intégrale $\int_x^b f(t)\,dt = F(b) - F(x)$ où F est <u>une</u> primitive de f sur $]a, b]$. On cherche donc la limite de F quand $x \to a^+$. On prolonge par continuité f en a, en posant $f(a) = \ell$. La fonction f est donc continue sur $[a, b]$. Cette fonction f prolongée possède une primitive F sur $[a, b]$. Donc f est dérivable sur $[a, b]$ et donc continue sur $[a, b]$. On en déduit que $F(x)$ admet une limite finie en a, et donc $\int_a^b f(t)\,dt$ existe.

Exemple 9:
On pose f, le sinus cardinal :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^* &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto \frac{\sin t}{t}. \end{aligned}$$

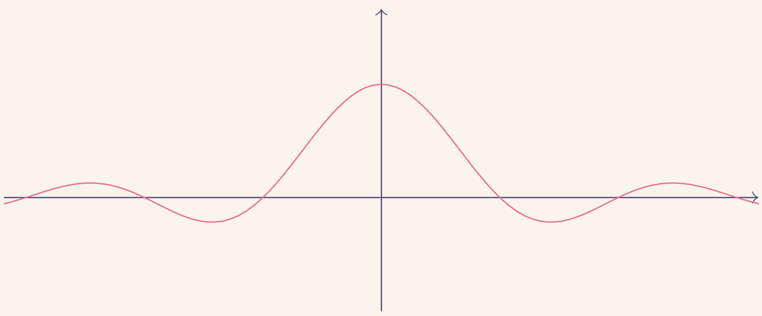

Figure 2 – Sinus cardinal

La fonction f est continue sur $]0, 8]$ mais $\lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$. D'où $\int_0^8 \frac{\sin t}{t}\,dt$ est faussement impropre en 0 et donc convergente.

Mais attention ! On ne dit pas « soit $f : t \mapsto \frac{1}{t}$. L'intégrale $\int_8^{+\infty} \frac{1}{t}\,dt$ est faussement impropre en $+\infty$ car $\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t} = 0$. »

3 Intégrer les $\sim$, o, et O

Théorème 10:

$$\varnothing$$

Théorème 11:
Le 2. n'est pas la réciproque du 1. mais la contraposée.

Proposition 12:

$$\varnothing$$

Exemple 13:
On considère l'intégrale $\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^2+\cos t}\,dt$, c'est une intégrale impropre en $+\infty$. On recherche un équivalent de $\frac{1}{t^2+\cos t}$ en $+\infty$:

$$\frac{1}{t^2+\cos t} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}$$

qui ne change pas de signe. Or, $\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge car c'est une intégrale de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$. On en déduit que l'intégrale I converge.

On procède autrement :

$$0 \leqslant \frac{1}{t^2+\cos t} \leqslant \frac{1}{t^2-1}.$$

Or, $\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^2-1}\,\mathrm{d}t$ converge car

$$\begin{aligned}\int_2^x \frac{1}{t^2-1}\,\mathrm{d}t &= \int_2^x \left(\frac{1/2}{t-1} - \frac{1/2}{t+1}\right)\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{2}\int_2^x \frac{1}{t-1}\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2}\int_2^x \frac{1}{t+1}\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{2}\Big[\ln|t-1|\Big]_2^x - \frac{1}{2}\Big[\ln|t+1|\Big]_2^x\end{aligned}$$

D'où

$$\int_2^x \frac{1}{t^2-1}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left[\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\right]_2^x = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + \frac{1}{2}\ln 3 \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{1}{2}\ln 3.$$

donc l'intégrale I converge et $I \leqslant \frac{1}{2}\ln_3$.

Exercice 14: 1. L'intégrale $I = \int_0^1 \frac{\sin t}{t^2}\,\mathrm{d}t$ est impropre en 0. On utilise un équivalent : $\sin t \sim_{t\to 0} t$ qui ne change pas de signe. Or, $\int_0^t \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$ diverge (par critère de Riemann). Donc I diverge.
L'intégrale $J = \int_1^{+\infty} \sin\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$ est généralisée en $+\infty$. On cherche un équivalent en $+\infty$:

$$\sin\frac{1}{t} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t}$$

qui ne change pas de signe. Or, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$ diverge par critère de Riemann. On en déduit que J diverge également.

2. L'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ est impropre, **et** en 0, **et** en $+\infty$. Le théorème ne marche donc pas. En effet $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ n'est pas continue par morceaux en 0, ce qui était le cas pour $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$.

Remarque (Retour sur la remarque 5):
L'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\ln(1+t)}\,\mathrm{d}t$ est impropre en 0 **et** en $+\infty$. $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\ln(1+t)}\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\int_0^7 \frac{1}{\ln(1+t)}\,\mathrm{d}t$ **et** $\int_7^{+\infty} \frac{1}{\ln(1+t)}\,\mathrm{d}t$ convergent. Et si elles convergent

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\ln(1+t)}\,\mathrm{d}t = \int_0^7 \frac{1}{\ln(1+t)}\,\mathrm{d}t + \int_7^{+\infty} \frac{1}{\ln(1+t)}\,\mathrm{d}t.$$

On n'utilise pas deux barrières en même temps. Sinon, les intégrales doublement impropres peuvent, et converger, et diverger.

Proposition 15 (avec $\sim$):
Si $f(t) \sim_{t\to b} g(t)$ qui ne change pas de signe. Alors,

— ou bien $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ convergent et $\displaystyle\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t \underset{x\to b}{\sim} \int_x^b g(t)\,\mathrm{d}t$.

— ou bien $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ divergent et $\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \underset{x\to b}{\sim} \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t$.

Cette proposition est équivalente à le lemme 13 sur les séries.

Exercice 16:
Montrons que

$$\int_x^1 \frac{1}{\ln(1+t)}\,\mathrm{d}t \underset{x\to 0^+}{\sim} -\ln x.$$

L'intégrale $\int_x^1 \frac{1}{\ln(1+t)}\,\mathrm{d}t$ est généralisée en 0. *Quelle est sa nature ?* On cherche un équivalent de la fonction intégrée :

$$\frac{1}{\ln(1+t)} \underset{t\to 0^+}{\sim} \frac{1}{t} \text{ qui ne change pas de signe}$$

car $\ln(1+t) = t + o_{t\to 0^+}(t)$, d'où $\ln(1+t) \sim_{t\to 0^+} t$. Or, $\int_0^1 \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$ diverge (par critère de Riemann) donc $\int_0^1 \frac{1}{\ln(1+t)}\,\mathrm{d}t$ diverge aussi. D'où, leurs « sommes partielles » sont équivalentes :

$$\int_x^1 \frac{1}{\ln(1+t)}\,\mathrm{d}t \underset{x\to 0^+}{\sim} \int_x^1 \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \ln 1 - \ln x = -\ln x.$$

4 La convergence absolue

Théorème 17:
Soit $f : [a,b[$ une fonction continue par morceaux. Si l'intégrale $\int_{[a,b[} |f|$ converge, alors $\int_{[a,b[} f$ converge aussi et,

$$\Big|\int_{[a,b[} f\Big| \leqslant \int_{[a,b[} |f|$$

(inégalité triangulaire).

Preuve:
On a

$$\forall t \in [a,b[,\quad f(t) = \frac{f(t)+|f(t)|}{2} + \frac{f(t)-|f(t)|}{2} = \underbrace{\frac{f(t)+|f(t)|}{2}}_{\geqslant 0} - \underbrace{\frac{|f(t)|-f(t)}{2}}_{\geqslant 0}.$$

L'analogie est, par exemple,

— en analyse, $f(t) = \frac{f(t)+f(-t)}{2} + \frac{f(t)-f(-t)}{2}$, une somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

— en algèbre, $\mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{K}) \ni M = \frac{M+M^\top}{2} + \frac{M-M^\top}{2}$ une somme d'une matrice symétrique $S \in \mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ et d'une matrice antisymétrique $A \in \mathscr{A}_n(\mathbb{K})$.

On suppose que l'intégrale $\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$ converge.

— On montre que $\int_a^b \frac{f(t)+|f(t)|}{2}\,\mathrm{d}t$ converge. On sait que

$$0 \leqslant \frac{f(t)-|f(t)|}{2} \leqslant |f(t)|.$$

Or, $\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$ converge et donc $\int_a^b \frac{f(t)+|f(t)|}{2}\,\mathrm{d}t$ converge aussi.

— De même, on montre que $\int_a^b \frac{|f(t)|-f(t)}{2}\,\mathrm{d}t$ converge.

On en déduit que $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

Montrons à présent l'inégalité triangulaire : on veut montrer que

$$-\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Ce qui est vrai car $\forall t \in [a,b[,\ -|f(t)| \leqslant f(t) \leqslant |f(t)|$, et l'intégrale $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est croissante. D'où, $\forall x \in [a,b[$,

$$\int_a^x |f(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^x |f(t)|\,\mathrm{d}t.$$

Enfin, les inégalités larges passent à la limite quand $x \to b$.

Exercice 18:

1. On sait, $\forall t \in [1,+\infty[$, $0 \leqslant \left|\frac{\sin t}{t^2}\right| \leqslant \frac{1}{t^2}$. Or, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge d'après le critère de Riemann (car $2 > 1$). D'où $\int_1^{+\infty} \left|\frac{\sin t}{t^2}\right|\,\mathrm{d}t$ converge et donc $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge aussi.
2. L'intégrale $\int_0^1 \sin\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$ est impropre en 0. Or,

$$0 \leqslant \left|\sin\frac{1}{t}\right| \leqslant 1,$$

et l'intégrale $\int_0^1 1\,\mathrm{d}t$ converge, donc $\int_0^1 \sin\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$ converge absolument.

5 Intégrer par parties et changer de variables

Proposition 19:
L'intégration par parties, pour les intégrales sur un segment, donne, si f et g sont deux fonctions de classes $\mathscr{C}^1$:

$$\int_{[a,b]} fg' = \Big[fg\Big]_a^b - \int_{[a,b]} f'g.$$

Si l'intégrale est généralisé, on « met une barrière » et on utilise l'intégration par parties sur un segment, puis on passe à la limite. On étudie tous les cas :
- si $\big[fg\big]_a^x \xrightarrow[x\to b]{} \ell \in \mathbb{R}$, alors $\int_{[a,b[} fg'$ et $\int_{[a,b[} f'g$ ont la même nature ;
- si $\big[fg\big]_a^x$ diverge quand $x \to b$, alors on ne peut pas conclure.

La « morale » de la proposition 19 est : IPP dans une intégrale généralisée, on « met une barrière. »

Exercice 20 (tarte à la crème):
L'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\ \mathrm{d}t$ est appelée l'intégrale de Dirichlet. On montre qu'elle converge et, on calculera sa valeur dans le TD nº 3. Elle est impropre en 0 et en $+\infty$. On n'écrit pas

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\ \mathrm{d}t = \int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\ \mathrm{d}t + \int_0^1 \frac{\sin t}{t}\ \mathrm{d}t.$$

L'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\ \mathrm{d}t$ converge si et seulement si les deux intégrales

$$I = \int_0^1 \frac{\sin t}{t}\ \mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad J = \int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\ \mathrm{d}t$$

convergent.

L'intégrale I converge car elle est faussement impropre ($\sin(t)/t \xrightarrow[t\to 0]{} 1$).

Qu'en est-il de J ? On peut majorer la valeur absolue de la fonction intégrée mais cela ne permet pas de conclure. On fait donc une IPP : on pose, pour $t \in [1, +\infty[$, $f(t) = -\cos t$ et $g(t) = \frac{1}{t}$. Ces deux fonctions sont de classe $\mathscr{C}^1$, d'où

$$\int_1^x f'(t) \times g(t)\ \mathrm{d}t = \Big[fg\Big]_1^x - \int_1^x f(t) \times g'(t)\ \mathrm{d}t = \Big[-\frac{\cos t}{t}\Big]_1^x - \int_1^x \frac{\cos t}{t^2}\ \mathrm{d}t.$$

On vent montrer que $\int_{[1,x]} f' \cdot g$ a une limite finie quand $x \to +\infty$. D'une part

$$\Big[-\frac{\cos t}{t}\Big]_1^x = \frac{\cos 1}{1} - \frac{\cos x}{x} \qquad \text{et} \qquad \frac{\cos x}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

car cos est bornée et $\frac{1}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

D'autre par, pour $x \in [1, +\infty[$,

$$0 \leqslant \left|\frac{\cos t}{t^2}\right| \leqslant \frac{1}{t^2}$$

et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\ \mathrm{d}t$ converge.

Par différence, on en déduit que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}$ converge.

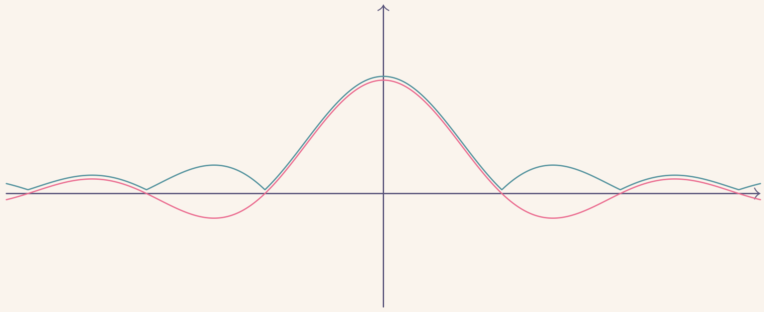

Figure 3 – Graphe de $\dfrac{\sin t}{t}$ et $\left|\dfrac{\sin t}{t}\right|$

Deuxième partie

T.D.

Exercice 1

1. Soit $t > 0$. Montrons que $t - \ln t \geqslant 1$ i.e. $\ln t - t + 1 \leqslant 0$. Or, la fonction ln étant convexe, sa courbe est donc au dessous de ses tangentes. En particulier, de la tangente en 1. On en déduit que
$$\ln t \leqslant \ln'(t)(t-1) + \ln(1) = t - 1.$$
2. Soit $x > 0$. Comme la fonction $\mathrm{id} - \ln$ est continue et ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_*^+$, alors, par composition avec la fonction inverse, $x \mapsto \frac{1}{t - \ln t}$ existe et est continue sur $\mathbb{R}_*^+$. Et, comme $x > 0$, si $t \in [2x, x]$, alors $t > 0$. On en déduit que la fonction F est définie sur $\mathbb{R}_*^+$.
Par croissance de l'intégrale, et comme la fonction $\mathrm{id} - \ln$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_*^+$, on a
$$0 \leqslant \int_x^{2x} 0 \ \mathrm{d}t \leqslant \int_x^{2x} \frac{1}{t - \ln t} \ \mathrm{d}t \leqslant \int_x^{2x} 1 \ \mathrm{d}t = [t]_x^{2x} = x.$$
On a montré que, $0 \leqslant F(x) \leqslant x$.
3. D'après le théorème des gendarmes, et, à l'aide de l'inégalité de la question précédente, on a $F(x) \xrightarrow[x \to 0^+]{} 0$.
4.

Exercice 3

Indication : pour la G, on applique la relation de Chasles : l'intégrale $\int_0^7 \mathrm{e}^{-x} \ln x \ \mathrm{d}x$ converge si et seulement si $\int_0^1 \mathrm{e}^{-x} \ln x \mathrm{d}x$ converge et $\int_1^7 \mathrm{e}^{-x} \ln x \ \mathrm{d}x$ converge (qui n'est même pas impropre).

L'intégrale $H = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{\sin t}}{t} \ \mathrm{d}t$ est impropre en 0. On sait que $\sin t \xrightarrow[t \to 0]{} 0$, et donc, par continuité de la fonction exp en 0, $\mathrm{e}^{\sin t} \xrightarrow[t \to 0]{} e^0 = 1$. Ainsi, $\frac{\mathrm{e}^{\sin t}}{t} = \mathrm{e}^{\sin t} \times \frac{1}{t} \sim_{t \to 0} \frac{1}{t}$ qui ne change pas de signe. Or, $\int_0^1 \frac{1}{t} \ \mathrm{d}t$ diverge, donc l'intégrale H diverge.

L'intégrale $I = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\sin t}}{t} \ \mathrm{d}t$ est impropre en $+\infty$. Par croissance de la fonction exponentielle, on a $\frac{\mathrm{e}^{\sin t}}{t} \geqslant \frac{\mathrm{e}^{-1}}{t} \geqslant 0$. Or, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t} \ \mathrm{d}t$ diverge, donc l'intégrale diverge aussi.

L'intégrale K, est l'intégrale d'une fonction Gaußienne, et elle est impropre en $+\infty$. On la « découpe » :
$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2} \ \mathrm{d}x \text{ converge si et seulement si } \int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2} \ \mathrm{d}x \text{ converge et } \int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2} \ \mathrm{d}x \text{ converge.}$$
L'intégrale $\int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2} \ \mathrm{d}x$ n'est même pas impropre, elle converge donc. Et, pour $x \in [1, +\infty[$, on sait, comme $x^2 \geqslant x$, $0 \leqslant \mathrm{e}^{-x^2} \leqslant \mathrm{e}^{-x}$. Or, $\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-x} \ \mathrm{d}x$ converge donc $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2} \ \mathrm{d}x$ aussi. On calculera la valeur de cette intégrale dans le TD « Intégrales paramétrées. »

Autre méthode pour déterminer la nature de K : $\mathrm{e}^{-x^2} = o(\mathrm{e}^{-x})$ car $\mathrm{e}^{-x^2} = \underbrace{\mathrm{e}^{-x^2+x}}_{\to 0} \times \mathrm{e}^{-x}$, car $\mathrm{e}^{-x^2+x} = \mathrm{e}^{-x^2\left(1-\frac{1}{x}\right)}$ et $-x^2\left(1 - \frac{1}{x}\right) \to -\infty \times 1$. Et $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x} \ \mathrm{d}x$ converge donc $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2} \ \mathrm{d}x$ converge.

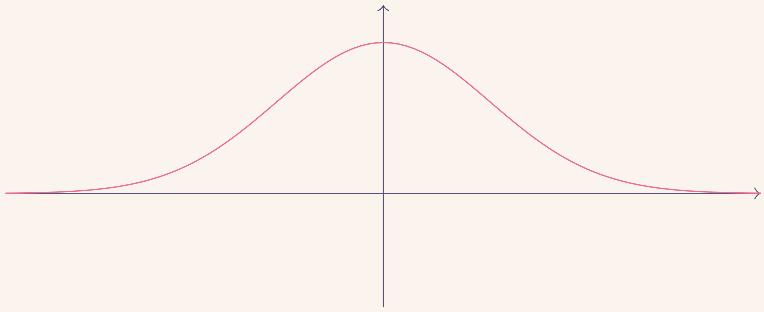

Figure 4 – Courbe Gaußienne