Chapitre 4

Diagonalisation & trigonalisation

Hugo Salou MPI*

Dernière mise à jour le 21 novembre 2022

Première partie

Cours

1 (Ne pas) être diagonalisable

Définition 1:
Soit une matrice carrée A. On dit que A est *diagonalisable* s'il existe une matrice inversible $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $P^{-1} \cdot A \cdot P$ est diagonale.

Exercice 2:
1. Montrons que la matrice $B = \left(\begin{smallmatrix} 7 & 1 \\ 0 & 7 \end{smallmatrix}\right)$ n'est pas diagonalisable. Par l'absurde : on suppose qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ et $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$P^{-1} \cdot B \cdot P = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}.$$

On applique la trace tr et le déterminant det :

$$\mathrm{tr}(B) = \mathrm{tr}\left(\begin{smallmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{smallmatrix}\right) \quad \text{d'où} \quad \lambda_1 + \lambda_2 = 7 + 7 = 14 = s$$
$$\det(B) = \det\left(\begin{smallmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{smallmatrix}\right) \quad \text{d'où} \quad \lambda_1 \times \lambda_2 = 7 \times 7 = 49 = p$$

D'où λ_1 et λ_2 sont des solutions de l'équation $X^2 - sX + p = 0$. Or

$$\begin{aligned} X^2 - sX + p = 0 &\iff X^2 - 14X + 49 = 0 \\ &\iff (X-7)^2 = 0 \\ &\iff X = 7. \end{aligned}$$

D'où

$$B = PP^{-1}BPP^{-1} = P\begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}P^{-1} = P \cdot 7I_2 \cdot P^{-1} = 7I_2.$$

La matrice B n'est donc pas diagonalisable.
De même, montrons que la matrice A n'est pas diagonalisable. On remarque que

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi,

$$P^{-1} \cdot A \cdot P = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & ? & 0 \\ 0 & 0 & ? \end{pmatrix} \qquad \text{où} \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & ? & ? \\ 1 & ? & ? \\ 1 & ? & ? \end{pmatrix}.$$

De même, $A \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) = 1 \times \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$. D'où

$$P^{-1} \cdot A \cdot P = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & ? \end{pmatrix} \qquad \text{où} \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & ? \\ 1 & 1 & ? \\ 1 & 0 & ? \end{pmatrix}.$$

Finalement, on en conclut que

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad P^{-1} \cdot A \cdot P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = D.$$

De plus, la matrice P est inversible car $\det P \neq 0$.

2. Pour calculer A^n, on pourrait chercher un polynôme annulateur Q de A, et on exprime $X^n = Q \times T_n + R_n$, et donc $A^n = R_n(A)$. Mais, on peut également diagonaliser A (si elle est diagonalisable). Ainsi,

$$D^n = (P^{-1} \cdot A \cdot P)^n = P^{-1} \cdot A \cdot \cancel{P} \cdot \cancel{P^{-1}} \cdot \ldots \cdot \cancel{P^{-1}} \cdot A \cdot P = P^{-1} \cdot A^n \cdot P.$$

D'où $A^n = P \cdot D^n \cdot P^{-1}$. Or,

$$D^n = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 3^n & 0 & 0 \\ 0 & 1^n & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix}.$$

On calcule donc A^n en calculant l'inverse de P :

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3^n & 0 & 0 \\ 0 & 1^n & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix} \cdot P^{-1}.$$

3.

$$\left.\begin{aligned} u_{n+1} &= v_n + 2w_n \\ v_{n+1} &= u_n + 2w_n \\ w_{n+1} &= 3w_n \end{aligned}\right\} \iff \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$$
$$\iff U_{n+1} = A \cdot U_n$$
$$\iff U'_{n+1} = D \cdot U'_n$$

où $D = P^{-1} \cdot A \cdot P$, $U'_{n+1} = P \cdot U_{n+1}$ et $U'_n = P \cdot U_n$.

$$\iff \begin{pmatrix} u'_{n+1} \\ v'_{n+1} \\ w'_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u'_n \\ v'_n \\ w'_n \end{pmatrix}$$
$$\iff \begin{cases} u'_{n+1} = 3u'_n \\ v'_{n+1} = v'_n \\ w'_{n+1} = -w'_n \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} u'_n = K \times 3^n \\ v'_n = L \\ w'_n = M \times (-1)^n \end{cases}$$

Ainsi,

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{P} \cdot \begin{pmatrix} K \times 3^n \\ L \\ M \times (-1)^n \end{pmatrix}.$$

D'où $u_n = K \cdot 3^n + L + M \cdot (-1)^n$, $v_n = K \times 3^n + L - M \cdot (-1)^n$ et $w_n = K \cdot 3^n$, où les constantes K, L et M sont des constantes fixées par les conditions initiales.

4.

$$\left.\begin{aligned} x'(t) &= y(t) + 2z(t) \\ y'(t) &= x(t) + 2z(t) \\ z'(t) &= 3z(t) \end{aligned}\right\} \iff \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$
$$\iff X'(t) = A \cdot X(t)$$
$$\iff U'(t) = D \cdot U(t) \text{ avec } D = P^{-1} \cdot A \cdot P \text{ et } X(t) = P \cdot U(t)$$
$$\iff \begin{pmatrix} u'(t) \\ v'(t) \\ w'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{pmatrix}$$
$$\iff \begin{cases} u'(t) = 3u(t) \\ v'(t) = v(t) \\ w'(t) = -w(t) \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} u(t) = K \cdot \mathrm{e}^{3t} \\ v(t) = L \cdot \mathrm{e}^{t} \\ w(t) = M \cdot \mathrm{e}^{-t} \end{cases}$$

Ainsi
$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{P} \cdot \begin{pmatrix} K \times \mathrm{e}^{3t} \\ L \cdot \mathrm{e}^{t} \\ M \cdot \mathrm{e}^{-t} \end{pmatrix}.$$

D'où $x(t) = K \cdot \mathrm{e}^{3t} + L \cdot \mathrm{e}^{t} + M \cdot \mathrm{e}^{-t}$, $y(t) = K \cdot \mathrm{e}^{3t} + L \cdot \mathrm{e}^{t} - M \cdot \mathrm{e}^{-t}$ et $z(t) = K \cdot \mathrm{e}^{3t}$. Les constantes K, L et M peuvent être déterminées à partir des conditions initiales.

Remarque (équations différentielles):
On considère l'équation différentielle $(*)$: $x'(t) = \lambda \cdot x(t)$. Les fonctions $x : t \mapsto K \cdot \mathrm{e}^{\lambda t}$ sont des solutions de cette équation. On peut utiliser la méthode de Lagrange : la méthode de la « variation de la constante. » On cherche des solutions sous la forme $x(t) = k(t) \cdot \mathrm{e}^{\lambda t}$ (vision du physicien). D'où $k(t) = x(t)/\mathrm{e}^{\lambda t}$ (vision du mathématicien). De plus, $x'(t) = k'(t)\mathrm{e}^{\lambda t} + k(t)\lambda \mathrm{e}^{\lambda t}$. Ainsi, on injecte ce $k(t)$ dans l'équation différentielle :

$$\begin{aligned} (*) &\iff k'(t)\mathrm{e}^{\lambda t} + k(t)\lambda\mathrm{e}^{\lambda t} = \lambda k(t)\mathrm{e}^{\lambda t} \\ &\iff k'(t)\mathrm{e}^{\lambda t} = 0 \\ &\iff k'(t) = 0 \\ &\iff \exists K \in \mathbb{R}\ k(t) = K. \end{aligned}$$

Les solutions trouvées dans l'exercice précédent sont donc les uniques solutions du système d'équations différentielles.

De même, pour résoudre une équation différentielle avec 2^{nd} membre de la forme

$$(**) : \qquad x'(t) - \lambda \cdot x(t) = b(t).$$

La fonction $t \mapsto x(t)$ est une solution de l'équation sans 2^{nd} membre si et seulement si

$$\exists K \in \mathbb{R},\ \forall t \in \mathbb{R}, \quad x(t) = K \cdot \mathrm{e}^{\lambda t}.$$

Comment résoudre l'équation différentielle avec 2^{nd} membre si on connaît la solution générale de l'équation sans 2^{nd} membre ?

On utilise la méthode le la variation de la constante. Soit $x(t) = k(t) \cdot \mathrm{e}^{\lambda t}$. Ainsi, en injectant cette expression de x dans l'équation $(**)$, on trouve

$$\begin{aligned} (**) &\iff k'(t)\mathrm{e}^{\lambda t} + k(t) \cdot \lambda\mathrm{e}^{\lambda t} = \lambda k(t)\mathrm{e}^{\lambda t} + b(t) \\ &\iff k'(t)\mathrm{e}^{\lambda t} = b(t) \\ &\iff k'(t) = b(t) \cdot \mathrm{e}^{-\lambda t} \\ &\iff k(t) = \int_0^t b(u) \cdot \mathrm{e}^{-\lambda u}\ \mathrm{d}u + K \\ &\iff x(t) = \left(\int_0^t b(u) \cdot \mathrm{e}^{-\lambda u}\ \mathrm{d}u + K \right) \mathrm{e}^{\lambda t} \\ &\iff x(t) = \underbrace{\int_0^t b(u) \cdot \mathrm{e}^{\lambda(t-u)}\ \mathrm{d}u}_{\text{solution particulière}} + \underbrace{K \cdot \mathrm{e}^{\lambda t}}_{\substack{\text{solution} \\ \text{générale} \\ \text{de } (*)}}. \end{aligned}$$

2 Valeurs & vecteurs propres

Définition 3:
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u : E \to E$ un endomorphisme.

1. On dit qu'un vecteur $\vec{x} \in E$ est **un** *vecteur propre* de u si $\vec{x}$ n'est pas nul et $u(\vec{x})$ est colinéaire à $\vec{x}$: $\vec{x} \neq \vec{0}$ et $\exists \lambda \in \mathbb{K},\ u(\vec{x}) = \lambda \vec{x}$.
2. On dit qu'un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ est **une** *valeur propre* de u s'il existe un vecteur non nul $\vec{x} \in E$ tel que $u(\vec{x}) = \lambda \vec{x}$.
3. L'ensemble des valeurs propres de u est appelé le *spectre* de u et est noté $\mathrm{Sp}(u)$.

DÉFINITION 4:
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et A une matrice $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{K}$.

1. On dit qu'un vecteur colonne X est **un** *vecteur propre* de A si X n'est pas nul et $A \cdot X$ est colinéaire à X : $X \neq 0$ et $\exists \lambda \in \mathbb{K},\ A \cdot X = \lambda X$.
2. On dit qu'un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ est **une** *valeur propre* de A s'il existe un vecteur colonne non nul X tel que $A \cdot X = \lambda X$.
3. L'ensemble des valeurs propres de A est appelé le *spectre* de A et est noté $\mathrm{Sp}(A)$.

DÉFINITION 5:
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u : E \to E$ un endomorphisme. On dit que u est *diagonalisable* s'il existe une base $(\vec{\varepsilon}_1, \dots, \vec{\varepsilon}_n)$ de E donc chaque vecteur est un vecteur propre de u :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \qquad u(\vec{\varepsilon}_i) = \lambda_i\, \vec{\varepsilon}_i.$$

3 Le polynôme caractéristique

PROPOSITION – DÉFINITION 6:
Soit $A \in \mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ une matrice carrée. La fonction

$$\begin{aligned} \chi_A : \mathbb{K} &\longrightarrow \mathbb{K} \\ x &\longmapsto \det(xI_n - A) \end{aligned}$$

est appelé le *polynôme caractéristique de A*. On a

$$\forall x \in \mathbb{K}, \quad \chi_A(x) = \det(xI_n - A) = x^n - (\operatorname{tr} A)x^{n-1} + \dots + (-1)^n \det A.$$

PREUVE:
On a

$$\det(xI_n - A) = \begin{vmatrix} x - a_{11} & a_{12} & \cdots & -a_{1,n} \\ -a_{21} & x - a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -a_{1,n-1} \\ -a_{n,1} & \cdots & -a_{n,n-1} & x - a_{n,n} \end{vmatrix}_{n} .$$

PROPOSITION:
Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, alors on peut définir le polynôme caractéristique d'un endomorphisme par

$$\chi_u(x) = \det(x \operatorname{id}_E - u).$$

Si $A = [u]_{\mathscr{B}}$, alors $xI_n - A = [x \operatorname{id}_E - u]_{\mathscr{B}}$ et donc $\chi_u = \chi_A$.

PREUVE:
On pose A une matrice $n \times n$ et A' une matrice semblable à A. On pose $A' = P^{-1} \cdot A \cdot P$. On calcule $\det(xI_n - A')$:

$$\chi_{A'}(x) = \det(xI_n - A') = \det(xI_n - P^{-1} \cdot A \cdot P) = \det(P^{-1}(xI_n - A)P) = \det(xI_n - A) = \chi_A(x).$$

par télescopage.

THÉORÈME 7:
Le polynôme caractéristique détecte les valeurs propres.
Soit A une matrice carrée de taille $n \times n$. Un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de A si et seulement si λ est une racine du polynôme caractéristique $\chi_A \in \mathbb{K}[X]$. Autrement dit,

$$\lambda \in \mathrm{Sp}(A) \iff \det(\lambda I_n - A) = 0.$$

PREUVE:

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$.

$$\begin{aligned}\lambda \in \mathrm{Sp}(A) &\iff \exists X \neq 0, \quad A \cdot X = \lambda X\\ &\iff \exists X \neq 0, \quad (A - \lambda I_n) \cdot X = 0\\ &\iff \exists X \neq 0, \quad -(A - \lambda I_n) \cdot X = 0\\ &\iff \mathrm{Ker}(\lambda I_n - A) \neq \{0_n\}\\ &\iff \lambda I_n - A \text{ n'est pas inversible}\\ &\iff \det(\lambda I_n - A) = 0\\ &\iff \chi_A(\lambda) = 0.\end{aligned}$$

Remarque (Attention):
Parfois, les racines d'un polynôme caractéristique peuvent être complexes et non réelles. Dans ce cas, afin d'éviter toute ambigüité, on écrit $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A)$ pour les racines réelles et $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ pour les racines complexes.

Exercice 8: 1. On considère la matrice

$$C = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \vec{\imath}\\ \vec{\jmath}\\ \vec{k} \end{matrix}\\ \begin{matrix} f(\vec{\imath}) & f(\vec{\jmath}) & f(\vec{k}) \end{matrix} \end{array}$$

On remarque que $f(\vec{\imath}) = \vec{\imath}$ donc $\vec{\imath}$ est un vecteur propre et 1 est une valeur propre. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\lambda \in \mathrm{Sp}(C) \iff \det(\lambda I_3 - C) = 0.$$

On calcule $\det(\lambda I_3 - C)$:

$$\begin{aligned}\det(\lambda I_3 - C) &= \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 1\\ 0 & -1 & \lambda \end{vmatrix}\\ &= (\lambda - 1)\begin{vmatrix} \lambda & 1\\ -1 & \lambda \end{vmatrix}\\ &= (\lambda - 1)(\lambda^2 + 1)\end{aligned}$$

Et donc

$$\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(C) \iff \lambda = 1.$$

Attention : on ne peut pas en conclure que la matrice C n'est pas diagonalisable (il y a peut-être la même valeur propre 3 fois). On montre que la matrice C n'est pas diagonalisable dans $\mathbb{R}$ par l'absurde : si

$$P^{-1} \cdot C \cdot P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

alors, $C = P \cdot I_3 \cdot P^{-1} = I_3$, ce qui est absurde.
On cherche les valeurs propres dans $\mathbb{C}$. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$.

$$\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(C) \iff (\lambda - 1)(\lambda - i)(\lambda + i) = 0$$

et donc

$$\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(C) \iff \lambda \in \{1, i, -i\} \qquad \text{i.e.} \qquad \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(C) = \{1, i, -i\}.$$

On peut utiliser la proposition 18 (mais on la verra plus tard...). On utilise une autre méthode (que l'on doit utiliser à chaque fois que l'on doit diagonaliser une matrice).

Soit $X = \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{C})$.

$$\begin{aligned}
CX = iX &\iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{cases} x = ix \\ -z = iy \\ y = iz \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x = 0 \\ z = -iy \\ y = iz \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x = 0 \\ y = iz \end{cases} \quad \text{car } L_2 = -iL_3 \\
&\iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ iz \\ z \end{pmatrix} = z \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 1 \end{pmatrix} \\
&\iff X \in \operatorname{Vect} \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

De même, avec $-i$, on a

$$\begin{aligned}
CX = -iX &\iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -i \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{cases} x = -ix \\ -z = -iy \\ y = iz \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x = 0 \\ z = iy \\ y = -iz \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x = 0 \\ y = -iz \end{cases} \\
&\iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -iz \\ z \end{pmatrix} = z \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix} \\
&\iff X \in \operatorname{Vect} \begin{pmatrix} 0 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

On pose $\varepsilon_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, $\varepsilon_2 = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ i \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ et $\varepsilon_3 = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ -i \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$. De plus, $\det(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \neq 0$. D'où la matrice C est diagonalisable dans $\mathbb{C}$.

2. On considère la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 7 & & & \sqrt{2} \\ & 7 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 7 \end{pmatrix}.$$

La matrice M a pour polynôme caractéristique $\chi_M(x)$:

$$\chi_M(x) = \begin{vmatrix} x-7 & & & -\sqrt{2} \\ & x-7 & & \\ & & \ddots & \\ & & & x-7 \end{vmatrix} = (x-7) \cdot (x-7) \cdots (x-7) = (x-7)^n.$$

Or, $\lambda \in \mathrm{Sp}(M)$ si et seulement si $\chi_M(\lambda) = 0$ et donc si et seulement si $\lambda = 7$. D'où $\mathrm{Sp}(M) = \{7\}$. On procède par l'absurde : si M est diagonalisable, il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, telle que $M = P^{-1} \cdot 7I_n \cdot P = P^{-1} \cdot P \cdot 7I_n = 7I_n$, ce qui est absurde.

Remarque 9:
Si $A \in \mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ (par exemple $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$), alors $\chi_A(X) \in \mathbb{R}_n[X]$ ($\chi_A(X) = X^2 + 1$, et donc $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \varnothing$, mais $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) = \{-i, i\}$). Ainsi,

$$A \in \mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{R}) \implies \forall \lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A),\ \bar{\lambda} \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A).$$

Autrement dit, le spectre complexe d'une matrice réelle est stable par conjugaison. En effet, si $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$, alors il existe $0 \neq X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, tel $A \cdot X = \lambda X$. D'où

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \quad \text{et donc} \quad \begin{pmatrix} \bar{a}_{1,1} & \dots & \bar{a}_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{a}_{n,1} & \dots & \bar{a}_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{z}_1 \\ \vdots \\ \bar{z}_n \end{pmatrix} = \bar{\lambda} \begin{pmatrix} \bar{z}_1 \\ \vdots \\ \bar{z}_n \end{pmatrix}.$$

Autrement dit, $A \cdot \bar{X} = \bar{\lambda}\bar{X}$ où $\bar{X} = \begin{pmatrix} \bar{z}_1 \\ \vdots \\ \bar{z}_n \end{pmatrix}$. Or, $\bar{X} \neq 0$, et $A \cdot \bar{X} = \bar{\lambda}\bar{X}$. D'où $\bar{X}$ est un vecteur propre, et il est associé à $\bar{\lambda}$ qui est donc une valeur propre. Et même, $\dim \mathrm{SEP}(\lambda) = \dim \mathrm{SEP}(\bar{\lambda})$.

Proposition 10:
Soit $A \in \mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ une matrice carrée.

1. Le spectre de A continent au plus n valeurs propres distinctes deux à deux.
2. Pour chaque valeur propre $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$, on note m_λ la multiplicité de la racine λ dans le polynôme χ_A. Si le polynôme caractéristique est scindé alors
$$\operatorname{tr} A = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} m_\lambda \cdot \lambda \qquad \text{et} \qquad \det A = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} \lambda^{m_\lambda}.$$
3. La matrice A et sa transposée ont le même polynôme caractéristique : $\chi_{A^\top} = \chi_A$, et donc le même spectre $\mathrm{Sp}(A) = \mathrm{Sp}(A^\top)$.

—

Si la matrice A est diagonalisable, alors il existe un matrice inversible P telle que

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} = P^{-1} \cdot A \cdot P$$

et donc $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} D = \sum_{i=1}^n \lambda_i$ et $\det A = \det D = \prod_{i=1}^n \lambda_i$. Mais, dans la proposition précédente, on n'a pas l'hypothèse que la matrice est diagonalisable. Ce raisonnement est un cas particulier de la proposition précédente. En effet, si A est diagonalisable alors $\chi_A = \chi_D$:

$$\begin{aligned} \chi_A(X) &= \chi_D(X) \\ \det(XI_n - A) &= \det(XI_n - D) \\ &= \det(XI_n - P^{-1}AP) \\ &= \det\left(P^{-1} \cdot (XI_n - A) \cdot P\right) \\ &= (X - \lambda_1) \cdots (X - \lambda_n) \end{aligned}$$

—

Preuve: 3. On calcule

$$\begin{aligned} \chi_{A^\top}(x) &= \det(xI_n - A^\top) \\ &= \det\left((xI_n - A)^\top\right) \\ &= \det(xI_n - A) \end{aligned}$$

car le déterminant est invariant par passage à la transposée. Or, comme $\chi_{A^\top} = \chi_A$, alors $\mathrm{Sp}(A) = \mathrm{Sp}(A^\top)$.

2. On sait d'après la proposition 6,
$$\chi_A(x) = x^n - \mathrm{tr}(A)\, x^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det(A).$$
Or, par hypothèse, χ_A est scindé d'où
$$\chi_A(x) = (x-\lambda_1)(x-\lambda_n)\cdots(x-\lambda_n).$$
Les scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont donc les valeurs propres de A. Ainsi, le coefficient devant le x^{n-1} est donc $-(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)$ et, le coefficient devant le x^0 est donc $(-\lambda_1)(-\lambda_2)\cdots(-\lambda_n)$. D'où, par identification
$$\det(A) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdots \lambda_n \qquad \text{et} \qquad \mathrm{tr}(A) = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n.$$

4 Les sous-espaces propres

Définition 11:
Soient E un sous-espace vectoriel et $u : E \to E$ un endomorphisme et λ une valeur propre de u. Le sous-espace vectoriel $\mathrm{Ker}(\lambda\,\mathrm{id}_E - u) = \mathrm{Ker}(u - \lambda\,\mathrm{id}_E)$ est appelé le *sous-espace propre* de u associé à la valeur propre λ. Il est parfois noté E_λ, ou $\mathrm{SEP}(\lambda)$.

Soit $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.
$$\begin{aligned} AX = \lambda X &\iff AX - \lambda X = 0 \\ &\iff (A - \lambda I_n)X = 0 \\ &\iff X \in \mathrm{Ker}(A - \lambda I_n) \end{aligned}$$

Attention, on ne dit pas que $\mathrm{SEP}(\lambda)$ est l'ensemble des vecteurs propres associés à la valeur propre λ. En effet, $0 \in \mathrm{SEP}(\lambda)$ mais 0 n'est pas un vecteur propre (par définition).

Remarque:
$\mathrm{SEP}(\lambda)$ est un sous-espace vectoriel de E. En effet, c'est un noyau. Autre méthode : $0 \in \mathrm{SEP}(\lambda)$ car $A \cdot 0 = \lambda 0$ et $\mathrm{SEP}(\lambda)$ est stable par combinaisons linéaires (superposition), car si X_1 et X_2 sont deux éléments de $\mathrm{SEP}(\lambda)$, alors
$$A(\alpha X_1 + \beta X_2) = \alpha\, A\, X_1 + \beta\, A\, X_2 = \alpha\lambda X_1 + \beta\lambda X_2 = \lambda(\alpha X_1 + \beta X_2).$$

Exercice 12:
On considère la matrice
$$B = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}.$$
Cherchons les valeurs propres de B :
$$\begin{aligned} \lambda \in \mathrm{Sp}(B) &\iff \det(\lambda I_2 - B) = 0 \\ &\iff \begin{vmatrix} \lambda - 7 & -1 \\ 0 & \lambda - 7 \end{vmatrix} = 0 \\ &\iff (\lambda - 7)^2 = 0. \end{aligned}$$
On en déduit que $\mathrm{Sp}(B) = \{7\}$. Soit $X = \binom{x}{y} \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{K})$.
$$\begin{aligned} X \in \mathrm{SEP}(7) &\iff B \cdot X = 7X \\ &\iff \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 7 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} 7x + y = 7x \\ 7y = 7y \end{cases} \\ &\iff y = 0 \\ &\iff X = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On en déduit que $\mathrm{SEP}(7) = \mathrm{Vect}\binom{1}{0}$.

On considère à présent la matrice D :

$$D = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \vec{\imath} \\ \vec{\jmath} \\ \vec{k} \end{array} \\ \begin{array}{ccc} f(\vec{\imath}) & f(\vec{\jmath}) & f(\vec{k}) \end{array} \end{array}$$

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$.

$$\begin{aligned} \lambda \in \mathrm{Sp}(D) \iff \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 0 & -1 & \lambda \end{vmatrix} &= 0 \\ (\lambda-1)(\lambda^2-1) &= \\ (\lambda-1)(\lambda-1)(\lambda+1) &= \\ (\lambda-1)^2(\lambda+1) &= \end{aligned}$$

D'où $\mathrm{Sp}(D) = \{1, -1\}$. Soit $X = \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{K})$.

$$\begin{aligned} X \in \mathrm{SEP}(1) &\iff D \cdot X = 1X \\ &\iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} x = x \\ z = y \\ y = z \end{cases} \\ &\iff y = z \\ &\iff X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ y \end{pmatrix} \\ &\iff X = x \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\varepsilon_1} + y \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\varepsilon_2}. \end{aligned}$$

Donc $\mathrm{SEP}(1) = \mathrm{Vect}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$. C'est un plan car $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ est une famille libre. De même pour $\mathrm{SEP}(-1)$.

Remarque 13:
Soit $u : E \to E$ un endomorphisme d'un espace vectoriel E.

1. Si $0 \in \mathrm{Sp}(u)$, alors il existe un vecteur $\vec{x}$ non nul tel que $\vec{x} \in \mathrm{Ker}(u)$ et donc l'endomorphisme u n'est pas injectif.
2. Si $0 \notin \mathrm{Sp}(u)$, alors $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{SEP}(0) = \{0\}$ (car $\mathrm{SEP}(0) = \mathrm{Ker}(0\,\mathrm{id}_E - u) = \mathrm{Ker}\, u$) et donc l'endomorphisme u est injectif.

On en conclut que
$$u \text{ injectif} \iff 0 \notin \mathrm{Sp}(u).$$

En particulier, en dimension finie, une matrice A est inversible si et seulement si $0 \notin \mathrm{Sp}(A)$.

Exercice 14:
Dans cet exercice, E n'est pas forcément de dimension finie ; on ne passe donc pas par des matrices.

Remarque : l'application u est un *automorphisme*.

On compare les spectre de u et de u^{-1}. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$.

$$\begin{aligned} \lambda \in \mathrm{Sp}(u) &\iff \exists \vec{x} \in E,\ \vec{x} \neq \vec{0} \text{ et } u(\vec{x}) = \lambda\vec{x} \\ &\iff \exists \vec{x} \neq \vec{0},\ u^{-1}(u(\vec{x})) = \vec{x} = \lambda u^{-1}(\vec{x}) \text{ en appliquant } u^{-1} \\ &\iff \exists \vec{x} \neq \vec{0},\ \frac{1}{\lambda}\vec{x} = u^{-1}(\vec{x}) \\ &\iff \frac{1}{\lambda} \in \mathrm{Sp}(u^{-1}) \end{aligned}$$

On peut diviser car $\lambda \neq 0$ car $0 \notin \mathrm{Sp}(u)$ car u est injectif.

De plus,

$$\mathrm{Ker}(\lambda \,\mathrm{id} - u) = \mathrm{Ker}\left(\frac{1}{\lambda}\,\mathrm{id} - u^{-1}\right)$$

car le vecteur $\vec{x}$ ne change pas dans les équivalents précédents.

Proposition 15:
Soit $u : E \to E$ un endomorphisme d'un espace vectoriel E. On a

$$\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(u), \qquad 1 \leqslant \dim\, \mathrm{SEP}(\lambda) \leqslant m_\lambda$$

où m_λ est la multiplicité de la racine λ dans le polynôme caractéristique.

Preuve:
Tout d'abord, on sait que $\dim(\mathrm{SEP}(\lambda)) \geqslant 1$ car il existe un vecteur propre, donc un vecteur non nul dans $\mathrm{SEP}(\lambda)$.

De plus, si $\dim(\mathrm{SEP}(\lambda)) = d$, alors il existe $(\vec{\varepsilon}_1, \dots, \vec{\varepsilon}_d)$ soit une base de $\mathrm{SEP}(\lambda)$. On peut compléter cette base de $\mathrm{SEP}(\lambda)$ en une base de E : $(\vec{\varepsilon}_1, \dots, \vec{\varepsilon}_d, \vec{e}_{d+1}, \dots, \vec{e}_n)$. Ainsi,

$$A \rightsquigarrow A' = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 & \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \\ 0 & \dots & 0 & \lambda & \\ & & & & \\ & 0 & & & * \end{pmatrix} \begin{array}{l} \vec{\varepsilon}_1 \\ \vec{\varepsilon}_2 \\ \vdots \\ \vec{\varepsilon}_d \\ \vec{e}_{d+1} \\ \vec{e}_{d+2} \\ \vdots \\ \vec{e}_n \end{array}$$

et donc

$$\begin{aligned} \chi_{A'}(x) &= \chi_A(x) \\ &= (x-\lambda)^d \times P(x) \\ &= (x-\lambda)^{m_\lambda} \times R(x) \text{ où } R(x) \text{ n'a pas de facteurs en } (x-\lambda) \end{aligned}$$

Proposition 16:
Soit $u : E \to E$ un endomorphisme d'un espace vectoriel E. Si des valeurs propres sont distinctes deux à deux, alors les vecteurs propres associés sont libres. Autrement dit, les sous-espaces propres sont en somme directe.

Attention : les sous-espaces propres ne sont pas supplémentaires.

Preuve (méthode 1):
Soit $\vec{x}_1 \in \mathrm{SEP}(\lambda_1)$, $\vec{x}_2 \in \mathrm{SEP}(\lambda_2), \dots, \vec{x}_r \in \mathrm{SEP}(\lambda_r)$ tels que $\vec{x}_1 \neq \vec{0}$, $\vec{x}_2 \neq \vec{0}, \dots, \vec{x}_r \neq \vec{0}$. Ainsi $u(\vec{x}_1) = \lambda_1\vec{x}_1$, $u(\vec{x}_2) = \lambda_2\vec{x}_2, \dots,$ et $u(\vec{x}_r) = \lambda_r\vec{x}_r$. Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{K}$. On suppose $\alpha_1\vec{x}_1 + \dots + \alpha_r\vec{x}_r = \vec{0}$ (L_1). Alors,

$$u(\alpha_1\vec{x}_1 + \dots + \alpha_r\vec{x}_r = \vec{0}) = u(\vec{0}) = \vec{0}$$

d'où $\alpha\lambda_1\vec{x}_1 + \alpha_2\lambda_2\vec{x}_2 + \dots + \alpha_r\lambda_r\vec{x}_r = \vec{0}$ (L_2). D'où, en calculant $L_2 - \lambda_r L_1$, on a

$$\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_r)\vec{x}_1 + \alpha_2(\lambda_2 - \lambda_r)\vec{x}_2 + \dots + \alpha_{r-1}(\lambda_{r-1} - \lambda_r)\vec{x}_{r-1} = \vec{0}.$$

Par récurrence, pour $r = 1$, c'est vrai : la famille $(\vec{x}_1)$ est libre. On suppose la propriété vraie pour $r-1$ vecteurs. On veut le prouver pour r vecteurs. En utilisant le calcul ci-dessus, comme les valeurs propres sont distinctes deux à deux, on en déduit que $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_{r-1} = 0$. Or, d'après L_1, $\alpha_r = 0$.

Preuve (méthode 2):
On sait que $\text{SEP}(\lambda_1) = \text{Ker}(\lambda_1 \,\text{id} - u)$, $\text{SEP}(\lambda_2) = \text{Ker}(\lambda_2 \,\text{id} - u), \ldots$ Or, $\lambda_2 \,\text{id} - u$ est un polynôme $P_1(u)$, et de même pour $P_2(u), P_3(u), \ldots$ Les r polynômes sont premiers entre-eux car $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ sont distinct deux à deux. D'où, d'après le lemme des noyaux,

$$\text{Ker}\Big(P(u)\Big) = \bigoplus_{k=1}^{n} \text{Ker}\left(P_k(u)\right)$$

où $P = P_1 \times P_2 \times \cdots \times P_r$. La somme des sous-espaces propres est donc directe.

Exercice 17:
Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{R}$ distincts deux à deux. Montrons que, si $\forall x \in \mathbb{R}$, $\alpha_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 x} + \cdots + \alpha_r \mathrm{e}^{\lambda_r x} = 0$, alors $\alpha_1 = \cdots = \alpha_r$. On peut procéder de différentes manières : le déterminant de Vandermonde, par analyse-sythèse, ou, en utilisant

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\mathrm{e}^{\lambda_k x}\right) = \lambda_k \mathrm{e}^{\lambda_k x}, \quad \text{d'où} \quad \varphi(f_k) = \lambda_k f_k, \text{ avec } f_k : x \mapsto \mathrm{e}^{\lambda_k x} \quad \text{et} \quad \varphi : f \mapsto f'.$$

On doit vérifier que les f_k sont des vecteurs et l'application φ soit un endomorphisme. On se place donc dans l'espace vectoriel $\mathscr{C}^\infty$. (On ne peut pas se placer dans l'espace $\mathscr{C}^k$, car sinon l'application φ est de l'espace $\mathscr{C}^k$ à $\mathscr{C}^{k-1}$, ce n'est donc pas un endomorphisme ; ce n'est pas le cas pour l'espace $\mathscr{C}^\infty$.) Or, les λ_k sont distincts deux à deux d'où les vecteurs propres f_k sont linéairement indépendants. Et donc si $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \cdots + \alpha_r f_r = 0$ alors $\alpha_1 = \cdots = \alpha_r = 0$. Mais, comme $\forall x \in \mathbb{R}$, $\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) + \cdots + \alpha_r f_r(x) = 0$, on en déduit que

$$\boxed{\alpha_1 = \cdots = \alpha_r = 0.}$$

5 Critères de diagonalisabilité

Proposition 18 (une condition <u>suffisante</u> pour qu'une matrice soit diagonalisable):
Soit A une matrice carrée de taille $n \geqslant 2$. Si A possède n valeurs propres distinctes deux à deux, alors A est diagonalisable.

Remarque:
La réciproque est fausse : par exemple, pour $n > 1$, $7I_n$ est diagonalisable car elle est diagonale. Mais, elle ne possède pas n valeurs propres distinctes deux à deux.

Preuve:
On suppose que la matrice $A \in \mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ possède n valeurs propres distinctes deux à deux (i.e. $\text{Card}\,\text{Sp}(A) = n$). D'où, d'après la proposition 16, les n vecteurs propres associés $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ sont libres. D'où $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ est une base formée de vecteurs propres. Donc, d'après la définition 5, la matrice A est diagonalisable.

Théorème 19 (conditions <u>nécessaires et suffisantes</u> pour qu'une matrice soit diagonalisable):
Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $u : E \to E$ un endomorphisme. Alors,

$$\begin{aligned}
(1) \quad u \text{ diagonalisable} \quad &\iff E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} \text{Ker}(\lambda \,\text{id}_E - u) \quad (2) \\
&\iff \dim E = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(u)} \dim(\text{SEP}(\lambda)) \quad (3) \\
&\iff \chi_u \text{ scindé et } \forall \lambda \in \text{Sp}(u),\ \dim(\text{SEP}(\lambda)) = m_\lambda \quad (4)
\end{aligned}$$

où m_λ est la multiplicité de la racine λ du polynôme χ_u.

Preuve: "(1) $\Longrightarrow$ (2)" On suppose u diagonalisable. Il existe donc une base $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ de E formée de vecteurs propres de u. On les regroupes par leurs valeurs propres : $(\varepsilon_i, \ldots, \varepsilon_{i+j})$ forme une base de $\text{SEP}(\lambda_k)$. D'où la base $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ de l'espace vectoriel E est une concaténation des bases des sous-espaces propres de u. D'où

$$E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} \text{SEP}(\lambda).$$

“(2) $\implies$ (1)” On suppose que $E = \mathrm{SEP}(\lambda_1) \oplus \mathrm{SEP}(\lambda_2) \oplus \cdots \oplus \mathrm{SEP}(\lambda_r)$. Soient $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{d_1})$ une base de $\mathrm{SEP}(\lambda_1)$, $(\varepsilon_{d_1+1}, \ldots, \varepsilon_{d_1+d_2})$ une base de $\mathrm{SEP}(\lambda_2)$, ..., $(\varepsilon_{d_1+\cdots+d_{r-1}+1}, \ldots, \varepsilon_{d_1+\cdots+d_r})$ une base de $\mathrm{SEP}(\lambda_r)$. En concaténant ces base, on obtient une base de E, d'après l'hypothèse. Dans cette base, tous les vecteurs sont propres donc u est diagonalisable.

“(2) $\implies$ (3)” On suppose $E = \mathrm{SEP}(\lambda_1) \oplus \mathrm{SEP}(\lambda_2) \oplus \cdots \oplus \mathrm{SEP}(\lambda_r)$. D'où

$$\dim E = \dim(\mathrm{SEP}(\lambda_1)) + \dim(\mathrm{SEP}(\lambda_2)) + \cdots + \dim(\mathrm{SEP}(\lambda_r))$$

car la dimension d'une somme directe est égale à la somme des dimensions.

“(3) $\implies$ (1)” On suppose $\dim E = \dim(\mathrm{SEP}(\lambda_1)) + \dim(\mathrm{SEP}(\lambda_2)) + \cdots + \dim(\mathrm{SEP}(\lambda_r))$. Or, les sous-espaces propres sont en somme directe, d'après la proposition 16. D'où $\dim\left(\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \mathrm{SEP}(\lambda)\right) = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \dim(\mathrm{SEP}(\lambda))$. Donc $\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \mathrm{SEP}(\lambda) = E$.

“(4) $\implies$ (3)” On suppose (a) χ_u scindé et (b) $\dim(\mathrm{SEP}(\lambda)) = m_\lambda$. D'où, d'après (a) :

$$\chi_u(x) = (x-\lambda_1)^{m_{\lambda_1}} (x-\lambda_2)^{m_{\lambda_2}} \cdots (x-\lambda_r)^{m_{\lambda_r}} = x^n + \cdots$$

d'où $m_{\lambda_1} + m_{\lambda_2} + \cdots + m_{\lambda_r} = n$, et d'où

$$\dim(\mathrm{SEP}(\lambda_1)) + \dim(\mathrm{SEP}(\lambda_2)) + \cdots + \dim(\mathrm{SEP}(\lambda_r)) = n$$

d'après l'hypothèse (b).

“(1) $\implies$ (4)” On suppose u diagonalisable. D'où, dans une certaine base $\mathscr{B}$, la matrice $[u]_{\mathscr{B}}$ est diagonale. Quitte à changer l'ordre des éléments de $\mathscr{B} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r)$, on peut supposer que $[u]_{\mathscr{B}}$ est de la forme

$$[u]_{\mathscr{B}} = \left[\begin{array}{cccc|cccc|c|cccc}
\lambda_1 &&&& &&&& & &&& \\
& \lambda_1 &&& &&&& & &&& \\
&& \ddots && && 0 && 0 & && 0 & \\
&&& \lambda_1 & &&&& & &&& \\
\hline
&&&& \lambda_2 &&& & & &&& \\
&&&& & \lambda_2 && & & &&& \\
& 0 &&& && \ddots & & 0 & && 0 & \\
&&&& &&& \lambda_2 & & &&& \\
\hline
&&&& &&&& \ddots & &&& \\
\hline
&&&& &&&& & \lambda_r &&& \\
&&&& &&&& & & \lambda_r && \\
& 0 &&& & 0 &&& 0 & 0 && \ddots & \\
&&&& &&&& & &&& \lambda_r
\end{array}\right]
\begin{array}{l}
\varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_{d_1} \\ \varepsilon_{d_1+1} \\ \varepsilon_{d_1+2} \\ \vdots \\ \varepsilon_{d_1+d_2} \\ \vdots \\ \varepsilon_{d_1+\cdots+d_{r-1}+1} \\ \varepsilon_{d_1+\cdots+d_{r-1}+2} \\ \vdots \\ \varepsilon_{d_1+\cdots+d_r}
\end{array}.$$

D'où $\forall k \in [\![1, r]\!]$, $d_k = \dim(\mathrm{SEP}(\lambda_k))$. En outre, $\chi_u(x) = \det(x \,\mathrm{id} - u) = (x-\lambda_1)^{d_1} \cdot (x-\lambda_2)^{d_2} \cdots (r-\lambda_r)^{d_r}$. D'où $\forall k \in [\![1, r]\!]$, $d_k = m_{\lambda_k}$ et χ_u est scindé.

Exercice 20:
On considère la matrice E ci-dessous

$$E = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

La matrice E ci-dessous est-elle diagonalisable ?

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On sait que $\lambda \in \mathrm{Sp}(E)$ si et seulement si $\det(\lambda I_3 - E) = 0$. Or

$$\det(\lambda I_3 - E) = \begin{vmatrix} \lambda - 7 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda - 3 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 7 \end{vmatrix} = (\lambda - 7)^2 \cdot (\lambda - 3)^1.$$

Donc $\mathrm{Sp}(E) = \{3, 7\}$, $1 \leqslant \dim\big(\mathrm{SEP}(3)\big) \leqslant 1$, et $1 \leqslant \dim\big(\mathrm{SEP}(7)\big) \leqslant 2$. La matrice E est diagonalisable si et seulement si $\dim(\mathrm{SEP}(3)) + \dim(\mathrm{SEP}(7)) = 3$, donc si et seulement si

$\dim(\text{SEP}(7)) = 2$. On cherche donc la dimension de ce sous-espace propre : soit $X = \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On sait que

$$\begin{aligned}
X \in \text{SEP}(7) &\iff E \cdot X = 7X \\
&\iff \begin{pmatrix} 7 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 7 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{cases} 7x + 0y + 1z = 7x \\ 3y = 7y \\ 7z = 7z \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} z = 0 \\ y = 0 \end{cases} \\
&\iff X = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ y \end{pmatrix} = x \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\varepsilon_1}
\end{aligned}$$

Donc $\text{SEP}(7) = \text{Vect}(\varepsilon_1)$, d'où $\dim(\text{SEP}(7)) = 1$. Donc la matrice E n'est pas diagonalisable.

6 Trigonalisation

Trigonaliser une matrice ne sert que si la matrice n'est pas diagonalisable.

Définition 21:
On dit d'une matrice carrée $A \in \mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ qu'elle est *trigonalisable* s'il existe une matrice inversible P telle que $P^{-1} \cdot A \cdot P$ est triangulaire :

$$P^{-1} \cdot A \cdot P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_r \end{pmatrix}.$$

Remarque 22:
$\varnothing$

Théorème 23:
Une matrice carrée $A \in \mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique $\chi_A \in \mathbb{K}[X]$ est scindé.

Preuve (par récurrence sur n, la largeur de la matrice):
- Si $n = 1$, alors la matrice $A = (a_{11})$ est déjà triangulaire.
- On suppose le polynôme caractéristique χ_A de la matrice scindé dans $\mathbb{K}[X]$, d'où il a au moins une racine dans $\mathbb{K}$. D'où, la matrice A a au moins une valeur propre $\lambda_1 \in \mathbb{K}$. Il existe donc un vecteur non nul $\vec{\varepsilon}_1$ tel que $A \cdot \vec{\varepsilon}_1 = \lambda_1 \vec{\varepsilon}_1$. On complète $(\vec{\varepsilon}_1)$ en une base de $\mathbb{K}^n$: $(\vec{\varepsilon}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n)$. En changent de base, il existe une matrice inversible P telle que

$$A' = P^{-1} \cdot A \cdot P = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{c|ccc} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{array}\right) \begin{array}{l} \varepsilon_1 \\ e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{array} \\ \begin{array}{cccc} f(\vec{\varepsilon}_1) & f(\vec{e}_1) & \ldots & f(\vec{e}_n) \end{array} \end{array}.$$

Comme le polynôme caractéristique est invariant par changement de base, on en déduit que

$$\chi_A(x) = \chi_{A'}(x) = \left| \begin{array}{c|c} x - \lambda_1 & * \\ \hline 0 & xI_{n-1} - B \end{array} \right| = (x - \lambda_1) \cdot \Pi(x).$$

Or, comme χ_A est scindé, $\Pi(x)$ est aussi scindé. Or, $\Pi(x) = \det(xI_{n-1} - B)$ d'où B est trigonalisable.

Corollaire 24:
Toute matrice de $\mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{C})$ est trigonalisable.

Exercice 25:
Soit une matrice carrée $A \in \mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ (où $\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Montrer que

$$\text{(1)}\quad \textit{la matrice } A \textit{ est nilpotente} \iff \textit{le polynôme caractéristique de } A \textit{ est } \chi_A(X) = X^n \quad \text{(2)}$$
$$\iff \textit{la matrice } A \textit{ est trigonalisable avec des zéros sur sa diagonale} \quad \text{(3)}$$

On montre "(1) $\implies$ (2)," "(2) $\implies$ (3)" puis "(3) $\implies$ (1)."

"(3) $\implies$ (1)" Il existe donc une matrice inversible P telle que $T = P^{-1} \cdot A \cdot P$ et T est une matrice trigonalisable. Or, à chaque produit $A^n \cdot A$, une « sur-diagonalse » de zéros supplémentaires. D'où, à partir d'un certain rang p, on a $A^p = 0$. La matrice A est donc nilpotente.

"(2) $\implies$ (3)" On sait que $\chi_A = X^n = (X-0)^n$ est scindé, d'où A est trigonalisable. Il existe donc une matrice inversible P telle que

$$P^{-1} \cdot A \cdot P = A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \dots & * \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Et donc $\chi_{A'}(x) = (x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\cdots(x-\lambda_n)$. Or, le polynôme caractéristique est invariant par changement de base, d'où $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n$.

"(1) $\implies$ (2)" On passe dans $\mathbb{C}$ alors χ_A est scindé dans $\mathbb{C}$. D'où, il existe $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$ tels que

$$\chi_A(X) = (X-\lambda_1)(X-\lambda_2)\cdots(X-\lambda_n).$$

D'où, chaque λ_i est une valeur propre complexe de la matrice A. Or A est nilpotente, d'où, par définition, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $A^p = 0$. Les scalaires λ_i sont dans le spectre de A : en effet, il existe un vecteur colonne X non nul tel que $A \cdot X = \lambda_i\, X$, d'où $A^2 \cdot X = A \cdot AX = A \cdot \lambda_i X = \lambda_i^2 X$. De même, $A^3 \cdot X = A \cdot A^2 \cdot X = A \cdot \lambda_i^2 X = \lambda_i^2 (A \cdot X) = \lambda_i^3 X$. Et, de « proche en proche », on a donc

$$\forall k \in \mathbb{N},\ A^k \cdot X = \lambda_i^k X.$$

En particulier, si $k = p$, on a $0 = 0 \cdot X = A^p \cdot X = \lambda_i^p X$. D'où $\lambda_i^p X = 0$. Or, $X \neq 0$, d'où $\lambda_i^p = 0$ et donc $\lambda_i = 0$. Finalement, $\chi_A(X) = (X-\lambda_1)\cdots(X-\lambda_n) = (X-0)\cdots(X-0) = X^n \in \mathbb{C}[X]$. On a donc $\chi_A(X) \in \mathbb{R}[X]$.

7 Le théorème de Cayley & Hamilton et les sous-espaces caractéristiques

Théorème 26 (de Cayley & Hamilton):
Le polynôme caractéristique d'une matrice $A \in \mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ est un polynôme annulateur de cette matrice :

$$\chi_A(A) = 0.$$

□

Rappel:
Un polynôme P est annulateur de la matrice A si et seulement si P divise μ_A.

Corollaire 27:
Le polynôme minimal divise le polynôme caractéristique.

Exercice 28:
Déterminer le polynôme minimal de la matrice E de l'exercice 20 :

$$E = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

On doit donc déterminer le polynôme unitaire de degré minimal annulateur de E. D'après le théorème de Cayley & Hamilton, χ_E est un polynôme annulateur. Or, $\chi_E(X) = (X-7)^2\,(X-3)$ car c'est un déterminant triangulaire. D'où $\mu_E(X)$ est égal à $(X-7)^2\,(X-3)$ ou $(X-7)(X-3)$ ou $(X-7)^2$ ou $(X-7)$ ou $(X-3)$. Or,

$$\begin{aligned}(E-7I_3)\cdot(E-3I_3) &= \begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & -4 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}* & * & 4\\ * & * & *\\ * & * & *\end{pmatrix} \neq 0_{\mathscr{M}_{3,3}(\mathbb{K})}\end{aligned}$$

Ainsi, $\mu_A(X) \neq (X-7)(X-3)$ et $\mu_A(X) \neq (X-7)$. Et,

$$(E-3I_3)^2 = \begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & -4 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix}* & * & *\\ * & 16 & *\\ * & * & *\end{pmatrix} \neq 0_{\mathscr{M}_{3,3}(\mathbb{K})}.$$

Ainsi, $\mu_A(X) \neq (X-3)^2$ et aussi $\mu_A(X) \neq (X-3)$. On en déduit que $\mu_A = \chi_E$.

Définition 29:
Si le polynôme caractéristique d'une matrice $A \in \mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ est scindé, alors le *sous-espace caractéristique* de A associé à chaque valeur propre λ est

$$C_\lambda = \operatorname{Ker}(\lambda I_n - A)^{m_\lambda},$$

où m_λ est la multiplicité de la racine λ dans le polynôme caractéristique.

Proposition 30:
Les sous-espaces caractéristiques sont supplémentaires :

$$E = \bigoplus_{\lambda\in\operatorname{Sp}(A)} C_\lambda$$

et de dimensions $\dim C_\lambda = m_\lambda$.

Preuve:
Comme le polynôme χ_A est scindé, alors

$$\chi_A(X) = (X-\lambda_1)^{m_{\lambda_1}} \times\cdots\times (X-\lambda_r)^{m_{\lambda_r}}$$

et donc, d'après le théorème des noyaux,

$$\operatorname{Ker}\big(\chi_A(M)\big) = \bigoplus_{\lambda\in\operatorname{Sp}(A)} \operatorname{Ker}\Big(M-\lambda I_n\Big)^{m_\lambda}$$

car les polynômes $(X-\lambda_i)$ sont premiers deux à deux. En particulier, si $M = A$, alors

$$E = \bigoplus_{\lambda\in\operatorname{Sp}(A)} \overbrace{\operatorname{Ker}\big((\lambda I_n - A)^{m_\lambda}\big)}^{\text{sous-espace caractéristique de } A \text{ associé à } \lambda\,:\, C_\lambda}.$$

8 Polynômes annulateurs

Si $\vec{x} \in E$ est un vecteur propre de $u \in \mathscr{L}(E)$, associé à la valeur propre $\lambda \in \mathbb{K}$, alors

$$u^2(\vec{x}) = u\big(u(\vec{x})\big) = u(\lambda\vec{x}) = \lambda u(\vec{x}) = \lambda^2\vec{x}.$$

Ainsi, par récurrence,

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\quad u^k(\vec{x}) = \lambda^k\,\vec{x}.$$

Mais, comme $u^0 = \operatorname{id}_E$, on a donc $u^0(\vec{x}) = \operatorname{id}_E(\vec{x}) = \vec{x} = \lambda^0\,\vec{x}$, et le résultat précédent est également vrai pour $k = 0$. Par linéarité, si $P(X) = a_0 + a_1X + \cdots + a_dX^d$, alors $P(u) = a_0\operatorname{id}_E + a_1u + \cdots + a_du^d$, et donc $P(u)(\vec{x}) = a_0\vec{x} + a_1\lambda\vec{x} + \cdots + a_d\lambda^d\vec{x} = P(\lambda)\,\vec{x}$.

Proposition 31 (très souvent utile):
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme annulateur de $u \in \mathscr{L}(E)$. Si λ est une valeur propre de u (i.e. $P(u) = 0$), alors λ est racine de P :

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \qquad \lambda \in \operatorname{Sp}(u) \quad \overset{\Longrightarrow}{\not\Longleftarrow} \quad P(\lambda) = 0.$$

Autrement dit, le spectre de u est inclus dans l'ensemble des racines d'un polynôme annulateur de u. Mais, en général, il n'y a pas égalité.

Remarque:
La réciproque de la proposition est fausse. Par exemple, $(X-1)(X-7)$ est annulateur de I_n, mais $\operatorname{Sp}(I_n) = \{1\} \subsetneq \{1, 7\}$, qui est l'ensemble des racines de $(X-1)(X-7)$.

Preuve:
Si $\vec{x}$ est un vecteur propre de u associé à la valeur propre λ (i.e. $\vec{x} \neq \vec{0}$ et $u(\vec{x}) = \lambda\vec{x}$), alors $P(\lambda) = 0$ car $\vec{x} \neq \vec{0}$.

Néanmoins, il y a égalité pour certains polynômes : le polynôme caractéristique (d'après le théorème 7), et le polynôme minimal (dans la proposition 32, suivante).

Proposition 32:
Le spectre de u est égal à l'ensemble des racines du polynôme minimal (qui a donc les même racines que le polynôme caractéristique).

Preuve: Méthode 1 (à l'aide du théorème de Cayley et Hamilton) On veut montrer que le polynôme caractéristique et le polynôme minimal ont les même racines.
- Tout d'abord, On sait que le polynôme minimal divise le polynôme caractéristique. Ainsi, il existe un polynôme Q, tel que $\chi_A(X) = \mu_A(X) \times Q(X)$. Ainsi, toute racine du polynôme minimal μ_A est aussi racine du polynôme caractéristique χ_A.
- Puis, soit λ une racine de χ_A. D'où λ est une valeur propre de A. D'où $\lambda \in \operatorname{Sp}(A)$. Or, le spectre de A est inclus dans l'ensemble des racines de μ_A car μ_A est polynôme annulateur (d'après la proposition 31). D'où λ est racine de μ_A.

Méthode 2 (sans le théorème de Cayley et Hamilton)
- La démonstration précédente n'utilisant pas, dans ce sens là, le théorème de Cayley et Hamilton. On sait donc que l'ensemble des racines de χ_A est inclus dans l'ensemble des racines de μ_A.
- Reste à montrer l'autre inclusion : l'ensemble des racines de μ_A est inclus dans l'ensemble des racines de χ_A, qui est le spectre de A. Soit λ une racine de μ_A. Alors, il existe un polynôme Q, tel que $\mu_A(X) = (X - \lambda) \times Q(X)$. D'où $0_{\mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{K})} = \mu_A(A) = (A - \lambda I_n) \times Q(A)$. Or, $Q(A) \neq 0_{\mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{K})}$. En effet, si $Q(A) = 0_{\mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{K})}$, alors, comme $\deg Q < \deg \mu_A$, on a donc un polynôme annulateur de A ayant un degré plus petit celui du polynôme minimal : ce qui est absurde. Il existe donc $X \in \mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ tel que $Q(A) \cdot X \neq 0$. Soit U ce vecteur : $U = Q(A) \cdot X$. Alors, comme $(A - \lambda I_n) \times Q(A) = 0_{\mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{K})}$, on en déduit que $(A - \lambda I_n) \cdot Q(A) \cdot X = 0 \cdot X$. D'où $(A - \lambda I_n) \cdot U = 0$, et donc $A \cdot U = \lambda U$, et comme $U \neq 0$, on en déduit que $\lambda \in \operatorname{Sp}(A)$.

Théorème 33:
Une matrice A est

1. trigonalisable si et seulement si elle possède un polynôme annulateur scindé ;
2. diagonalisable si et seulement si elle possède un polynôme annulateur scindé à racines simples.

Rappel:
Une matrice A est trigonalisable si et seulement si
- χ_A scindé (théorème 3) ;
- elle possède un polynôme annulateur scindé (théorème 33).

Une matrice A est diagonalisable si et seulement si
- $\sum_{\lambda \in \operatorname{Sp}(A)} \dim(\mathrm{SEP}(\lambda))$ est la taille de la matrice A (théorème 19) ;
- les sous-espaces propres sont supplémentaires ;
- χ_A est scindé et $\forall \lambda \in \operatorname{Sp}(A)$, $\dim(\mathrm{SEP}(\lambda)) = m_\lambda$;
- elle possède un polynôme annulateur scindé à racines simples (théorème 33).

Une matrice A est diagonalisable si $\operatorname{Card}(\operatorname{Sp}(A))$ est la taille de la matrice A.

Exercice 34:

Soit $n \geqslant 2$. Montrer que la matrice

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{K})$$

est diagonalisable, déterminer son spectre et ses sous-espaces propres.

Secret (pour plus tard) la matrice J est symétrique, donc diagonalisable.

On remarque que $J \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = (n-1) \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$, et $J + I_n = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$, d'où $\operatorname{rg}(J + I_n) = 1$, et donc d'après le théorème du rang, $\dim \operatorname{Ker}(J + I_n) = n - 1 = \dim \operatorname{Ker}(J - \lambda I_n)$, avec $\lambda = -1$. D'où $\dim \operatorname{SEP}_J(-1) + \dim \operatorname{SEP}_j(n-1) = n$ qui est la taille de J donc J est diagonalisable.

Autre méthode : on a déjà fait ça au chapitre II. :

$$(J + I_n)^2 = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} n & \dots & n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ n & \dots & n \end{pmatrix} = n(I_n + J).$$

D'où $I_n + 2J + J^2 = nI_n + nJ$. D'où $J^2 - (n-2)J - (n-1)I_n = 0$. Ainsi le polynôme $P(X) = X^2 - (n-2)X - (n-1)$ est annulateur de la matrice J. Or, $P(X) = (X+1)\big(X - (n-1)\big)$ est scindé à racines simples. D'où la matrice J est diagonalisable.

D'où $\operatorname{Sp}(J) \subset \{-1, n-1\}$.

...

9 Stabilité

Rappel:
Un sous-espace vectoriel F de E est stable par un endomorphisme $u : E \to E$ si et seulement si

$$\forall \vec{x} \in E,\ \vec{x} \in F \implies u(\vec{x}) \in F \qquad \text{i.e.} \qquad u(F) \subset F.$$

Alors, $u|_F$ est l'endomorphisme induit par u sur F, ceci est parfois noté $u|_F^F : F \to F$.

Proposition 35:
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit $\vec{a} \in E$ non nul, et $u : E \to E$ un endomorphisme.

Si la droite $\operatorname{Vect}(\vec{a})$ est stable par l'endomorphisme u alors il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u(\vec{a}) = \lambda\vec{a}$, et donc $\vec{a}$ est un vecteur propre de u.

Réciproquement, si $\vec{a}$ est un vecteur propre de u, alors il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u(\vec{a}) = \lambda\vec{a}$.

Preuve:
Soit $\vec{x} \in \operatorname{Vect}(\vec{a})$. Ainsi, il existe $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que $\vec{x} = \alpha\vec{a}$. D'où $u(\vec{x}) = u(\alpha\vec{a}) = \alpha u(\vec{a}) = \alpha\lambda\vec{a}$ par hypothèse. D'où $u(\vec{x}) \in \operatorname{Vect}(\vec{a})$ et donc $\operatorname{Vect}(\vec{a})$ est stable par u.

Exercice 36 (Tarte à la crème):
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, et $u : E \to E$ un endomorphisme. Montrons qu'il existe une droite ou un plan stable par u.

On utilise le théorème de Cayley et Hamilton (valable en dimension finie). Soit $A = [u]_{\mathscr{B}}$, où $\mathscr{B}$ est une base de l'espace vectoriel. Alors, $\chi_A(A) = 0$. On le « casse en petits bouts » :

$$\chi_A(X) = (X - \lambda_1)^{m_1} \cdots (X - \lambda_r)^{m_r} (X^2 + b_1 X + c_1)^{n_1} \cdots (X^2 + b_s X + c_s)^{n_s}.$$

Le produit $\chi_A(A)$ est un produit de matrices, ce produit est la matrice nulle, d'où ce produit n'est pas inversible, d'où l'un des facteurs n'est pas inversible.

— Ou bien, ce facteur est la forme $(A - \lambda_i I_n)$, et donc il existe $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ non nul tel que $(A - \lambda_i I_n) \cdot X = 0$. Alors $A \cdot X = \lambda_i X$ et $X \neq 0$. D'où la droite dirigée par ce vecteur $\operatorname{Vect}(X)$ est stable.

— Ou bien, ce facteur est la forme $(A^2 + b_i A + c_i I_n)$, et donc il existe $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ non nul tel que $A^2 \cdot X + b_i A \cdot X + c_i X = 0$. Autrement dit, il existe un vecteur $\vec{x} \in E$ non nul, tel que $u^2(\vec{x}) + b_i u(\vec{x}) + c_i\vec{x} = \vec{0}$. D'où les vecteurs $\vec{x}$ et $u(\vec{x})$ [1]sont libres, et le plan $\operatorname{Vect}(\vec{x}, u(\vec{x}))$ est stable par u. En effet, $u(\vec{x}) \in \operatorname{Vect}(\vec{x}, u(\vec{x}))$, et $u(u(\vec{x})) = -b_i u(\vec{x}) - c_i\vec{x} \in \operatorname{Vect}(\vec{x}, u(\vec{x}))$.

Rappel:
Au chapitre II. on a montré que, si deux endomorphismes u et v commutent, alors $\operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Im} u$ sont stables par v.

Proposition 37:
Soient u et v deux endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Si u et v commutent ($u \circ v = v \circ u$), alors les sous-espaces propres de u sont stables par v.

Preuve:
Or, $\mathrm{SEP}_u(\lambda) = \operatorname{Ker}(\lambda \operatorname{id} - u)$, et, si $u \circ v = v \circ u$, alors $(\lambda \operatorname{id} - u) \circ v = v \circ (\lambda \operatorname{id} - u)$. D'où $\operatorname{Ker}(\lambda \operatorname{id} - u)$ est stable par v. Donc, si deux endomorphismes u et v commutent, alors les SEP de l'un sont stables par l'autre.

Rappel (proposition 30):
Si χ_A est scindé, alors $E = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} C_\lambda$ où $C_\lambda = \operatorname{Ker}(\lambda I_n - A)^{m_\lambda}$ et $\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(A)$, $\dim C_\lambda = m_\lambda$.

Exercice 38 (re-démonstation de la partie jaune (démonstration fausse dans le poly)):
On choisit une base de E : $\mathscr{B}(\vec{\varepsilon}^{\,1}_1, \ldots, \vec{\varepsilon}^{\,1}_{d_1}, \vec{\varepsilon}^{\,2}_1, \ldots, \vec{\varepsilon}^{\,2}_{d_2}, \ldots, \vec{\varepsilon}^{\,r}_1, \ldots, \vec{\varepsilon}^{\,r}_{d_r})$, telle que $\mathscr{B}_i = (\vec{\varepsilon}^{\,i}_1, \ldots, \vec{\varepsilon}^{\,i}_{d_i})$ soit une base de C_{λ_i}, où $d_i = \dim C_{\lambda_i}$. Soit u l'endomorphisme représenté par la matrice A dans la base $\mathscr{B}$. Ainsi,

$$[u]_{\mathscr{B}} = \left(\begin{array}{c|c|c|c} B_1 & & & \\ \hline & B_2 & & \\ \hline & & \ddots & \\ \hline & & & B_r \end{array}\right)$$

car chaque sous-espace caractéristique C_{λ_i} est stable par u. Or, A commute avec $(\lambda_i I_n - A)^{m_{\lambda_i}}$. D'où $\operatorname{Ker}(\lambda_i I_n - A)^{m_{\lambda_i}} = C_{\lambda_i}$ est stable par A. De plus, la taille du bloc B_i est égal à la $d_i = \dim C_{\lambda_i}$. On veut montrer que, pour tout i, $d_i = m_{\lambda_i}$. On sait que $B_i = [u|_{C_{\lambda_i}}]_{\mathscr{B}}$. Or, $C_{\lambda_i} = \operatorname{Ker}\big((\lambda_i \operatorname{id} - u)^{m_{\lambda_i}}\big)$, d'où $\forall \vec{x} \in C_{\lambda_i}$, $(\lambda_i \operatorname{id} - u|_{C_{\lambda_i}})^{m_{\lambda_i}}(\vec{x}) = \vec{0}$. D'où $\lambda_i \operatorname{id} - u|_{C_{\lambda_i}}$ est nilpotent. D'où, le polynôme caractéristique $\chi_{\lambda_i - \operatorname{id} - u|_{C_{\lambda_i}}} = X^{d_i}$. Or, le polynôme caractéristique d'une restriction d'un endomorphisme divise le polynôme caractéristique de cet endomorphisme. D'où $\forall i$, $d_i \leqslant m_{\lambda_i}$. Or, $\sum_{i=1}^r d_i = n$, où $n = \dim E$, et $\sum_{i=1}^r m_{\lambda_i} = n$. D'où, $\forall i$, $d_i = m_{\lambda_i}$. Enfin, $B_i = [u|_{C_{\lambda_i}}]_{\mathscr{B}_i}$. Or, $(u|_{C_{\lambda_i}} - \lambda_i \operatorname{id})^{m_{\lambda_i}} = 0$. D'où $u|_{C_{\lambda_i}} = \lambda_i \operatorname{id} + (u|_{C_{\lambda_i}} - \lambda_i \operatorname{id})$, et donc $B_i = \lambda_i I_{d_i} + N_i$ où N_i est une matrice nilpotente.

Proposition 39:
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et $u : E \to E$ un endomorphisme de E. Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par u. On définit

$$v = u|_F : F \longrightarrow F$$
$$\vec{x} \longmapsto u(\vec{x}).$$

Alors $\chi_v \mid \chi_u$ (i.e. χ_u est un multiple de χ_v).

Preuve:
Soit $A = [u]_{\mathscr{B}}$ où $\mathscr{B}$ est une base de E. Soient F et G deux supplémentaires de E. Soit $(\vec{\varepsilon}_1, \ldots, \vec{\varepsilon}_d)$ une base de F. En complétant cette base de F en une base $(\vec{\varepsilon}_1, \ldots, \vec{\varepsilon}_d, \vec{\varepsilon}_{d+1}, \ldots, \vec{\varepsilon}_n)$ de E. Il existe une matrice inversible P telle que

$$P^{-1} \cdot A \cdot P = \left(\begin{array}{c|c} C & * \\ \hline 0 & D \end{array}\right).$$

Le bloc C est la matrice de v dans la base $(\vec{\varepsilon}_1, \ldots, \vec{\varepsilon}_d)$. Or,

$$\chi_A(x) = \det(xI_n - A) = \det\left(\begin{array}{c|c} xI - C & -* \\ \hline 0 & xI - D \end{array}\right) = \underbrace{\det(xI - C)}_{\chi_C} \times \underbrace{\det(xI - D)}_{\chi_D}$$

1. En effet, si $u(\vec{x})$ et $\vec{x}$ sont liés, alors il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $u(\vec{x}) = k\vec{x}$, et donc le facteur dans l'expression de $\chi_A(X)$ est donc $(X - k)$.

car ce déterminant est triangulaire par blocs. D'où $\chi_A = \chi_C \times \chi_D$, et donc $\chi_C \mid \chi_A$ i.e. $\chi_v = \chi_u$.

Proposition 40:
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et soit $u : E \to E$ un endomorphisme. Si u est diagonalisable, et F est un sous-espace vectoriel stable par u, alors $u\big|_F$ est aussi diagonalisable.

Preuve:
On suppose u diagonalisable. D'où u possède un polynôme annulateur P scindé à racine simple. Alors $P(u) = 0_{\mathscr{L}(E)}$, d'où $\forall \vec{x} \in E$, $P(u)(\vec{x}) = \vec{0}_E$, et donc $\forall \vec{x} \in F$, $P(u\big|_F)(\vec{x}) = \vec{0}_E = \vec{0}_F$. Et donc, le polynôme P est annulateur de $u\big|_F$ et il est scindé à racines simples. D'où $u\big|_F$ est diagonalisable.

Exercice 41:
Soit A une matrice diagonale par blocs. Montrer que A est diagonalisable si et seulement si chaque bloc est diagonalisable.

$$\begin{array}{cl} \left[\begin{array}{c|c|c|c} B_1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & B_2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \ddots & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & B_r \end{array}\right] & \begin{array}{l} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_{d_1} \\ \varepsilon_{d_1+1} \\ \vdots \\ \varepsilon_{d_1+d_2} \\ \vdots \\ \varepsilon_{d_1+\cdots+d_{r-1}+1} \\ \vdots \\ \varepsilon_{d_1+\cdots+d_r}. \end{array} \end{array}$$

“ $\Longleftarrow$ ” Soit u l'endomorphisme tel que $[u]_{\mathscr{B}} = A$, où $\mathscr{B} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_d, \dots, \varepsilon_{d_1+\cdots+d_{r-1}+1}, \dots, \varepsilon_{d_1+\cdots+d_r})$. Chaque sous-espace vectoriel F_i est stable par u car la matrice est diagonale par blocs. Or, chaque bloc est diagonalisable, d'où chaque $u\big|_{F_i}$ est diagonalisable. Il existe donc une base de F_i formée de vecteurs propres de u. En concaténant ces bases, on obtient une base de F formée de vecteurs propres de u.
Autre méthode : Chaque bloc B_i est diagonalisable, d'où $\forall i$, $\exists P_i \in \mathrm{GL}_{d_i}(\mathbb{K})$, $P_i^{-1} \cdot B_i \cdot P_i = D_i$ diagonale. On pose

$$P = \left(\begin{array}{c|c|c|c} P_1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & P_2 & \ddots & \vdots \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \hline 0 & \dots & 0 & P_r \end{array}\right).$$

Et donc

$$P^{-1} \cdot A \cdot P = \left(\begin{array}{c|c|c|c} D_1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & D_2 & \ddots & \vdots \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \hline 0 & \dots & 0 & D_r \end{array}\right).$$

“ $\Longrightarrow$ ” Réciproquement, pour tout i, on a $B_i = \left[u\big|_{F_i}\right]_{(\varepsilon_{d_1+\cdots+d_{i-1}+1}, \dots, \varepsilon_{d_1+\cdots+d_i})}$.
Or u est diagonalisable, donc tout endomorphisme induit par u sur un sous-espace vectoriel stable est diagonalisable. Et donc, chaque bloc est diagonalisable.

Deuxième partie

T.D.

Exercice ? : Matrice compagnon

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & & & \vdots & -a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & & & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & -a_{p-1} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & -a_p \end{pmatrix}.$$

Ainsi, dans un système d'équation différentielles, on a

$$\begin{pmatrix} x_0'(t) \\ x_1'(t) \\ \vdots \\ x_p'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & & & \vdots & -a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & & & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & -a_{p-1} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & -a_p \end{pmatrix}^{\top} \begin{pmatrix} x_0(t) \\ x_1(t) \\ \vdots \\ x_p(t) \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} x_0'(t) \\ x_1'(t) \\ \vdots \\ x_p'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & & 0 \\ & & & & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{p-1} & -a_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0(t) \\ x_1(t) \\ \vdots \\ x_p(t) \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} x_0'(t) = x_1(t) \\ x_1'(t) = x_2(t) \\ \vdots \\ x_{p-1}'(t) = x_p \\ x_p'(t) = -a_0x_0(t) - a_1x_1(t) - \cdots - a_px_p(t) \end{cases}$$

$$\rightsquigarrow \begin{cases} \boxed{\text{Notations}} \\ x^{(p+1)}(t) + a_0x(t) + a_1x'(t) + \cdots + a_px^{(p)}(t) = 0 \end{cases}$$

La dernière ligne du système est un équation différentielle d'ordre $p+1$.

Calculons $\det(xI_{p+1} - A)$. On note

$$D_i = \begin{vmatrix} x & 0 & \cdots & \cdots & a_i \\ -1 & \ddots & \ddots & & a_{i+1} \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & x + a_p \end{vmatrix}.$$

D'où $D_0 = xD_1 + a_0$, $D_1 = xD_2 + a_1$, et donc

$$\begin{aligned} D_0 &= x(xD_2 + a_1) + a_0 \\ &= xD_2 + xa_1 + a_0 \\ &= \cdots \\ &= x^{p-1}D_{p-1} + \sum_{k=0}^{p-2} x^k a_k \\ &= x^{p-1}(x(x+a_p) + a_{p-1}) + \sum_{k=0}^{p-2} x^k a_k \\ &= \sum_{k=0}^{p} x^k a_k + x^{p+1} \end{aligned}$$

Autre méthode :

$$\det(xI_{p+1} - A) = \begin{vmatrix} x & 0 & \dots & 0 & a_i \\ -1 & \ddots & \ddots & \vdots & a_0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & x & a_{p-1} \\ 0 & \dots & 0 & -1 & x+a_p \end{vmatrix} \begin{matrix} \leftarrow L_0 + xL_1 + \cdots + x^p L_p \\ \leftarrow L_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \leftarrow L_p \end{matrix}$$

Exercice 9

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -4 \\ 4 & 1 & -4 \end{pmatrix}.$$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On sait que

$$\lambda \in \mathrm{Sp}(A) \iff \det(\lambda I_3 - A) = 0.$$

On calcule $\det(\lambda I_3 - A)$:

$$\begin{aligned} \det(\lambda I_3 - A) &= \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & 1 \\ -2 & \lambda-3 & 4 \\ -4 & -1 & \lambda+4 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & 1 \\ \lambda-1 & \lambda-3 & 4 \\ \lambda-1 & -1 & \lambda+4 \end{vmatrix} \text{ avec le changement } C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3 \\ &= (\lambda-1)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & \lambda-3 & 4 \\ 1 & -1 & \lambda+4 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda-1)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & \lambda-2 & 3 \\ 0 & 0 & \lambda-3 \end{vmatrix} \text{ avec les changements } \begin{cases} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{cases} \\ &= (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda+3). \end{aligned}$$

D'où $\mathrm{Sp}(A) = \{1, 2, -3\}$, et

$$1 \leqslant \dim(\mathrm{SEP}(1)) \leqslant 1 \qquad 1 \leqslant \dim(\mathrm{SEP}(2)) \leqslant 1 \quad \text{et} \quad 1 \leqslant \dim(\mathrm{SEP}(-3)) \leqslant 1.$$ [2]

2. inutile dans ce cas

La matrice A est de taille 3 et elle possède 3 valeurs propres distinctes deux à deux. D'où, d'après la proposition 18, on sait donc que A est diagonalisable. Diagonalisons-la.

Exercice 8

1. Soit un vecteur non nul $\vec{x} \in \operatorname{Ker}(\lambda \mathrm{id} - u \circ v)$. Ainsi, $u(v(\vec{x})) = \lambda\vec{x}$. Et, donc $v(u(v(\vec{x}))) = \lambda v(\vec{x})$. On a donc $v(\vec{x}) \in \operatorname{Ker}(\lambda \mathrm{id} - v \circ u)$. Or, si $\lambda \neq 0$, on a $v(\vec{x}) \neq \vec{0}$; en effet, si $v(\vec{x}) = \vec{0}$, alors $u \circ v(\vec{x}) = \vec{0} = \lambda\vec{x}$ et donc $\vec{x} = \vec{0}$, ce ne serait donc pas un vecteur propre de $u \circ v$: une contradiction. On en déduit que $v(\vec{x})$ est un vecteur propre de $u \circ v$ associé à la valeur propre λ.
2. On pose donc $\lambda = 0$, une valeur propre de $u \circ v$. L'endomorphisme $u \circ v$ n'est donc pas injectif, donc bijectif. On sait donc, comme E est de dimension finie, que $\det(u \circ v) = 0$. Or $\det(u \circ v) = \det u \times \det v = \det(v \circ u)$. Et donc $\det(v \circ u) = 0$, $v \circ u$ n'est donc pas bijectif, donc injectif. Et donc, on a $0 \in \operatorname{Sp}(v \circ u)$.
3. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, et soit Q une primitive de P.

$$\begin{aligned}
P \in \operatorname{Ker}(u \circ v) &\iff \Big(\int_0^X P(t)\ \mathrm{d}t\Big)' = 0 \\
&\iff \big(Q(X) - Q(0)\big)' = 0 \\
&\iff Q'(X) = 0 \\
&\iff P(X) = 0
\end{aligned}$$

On en déduit que $\operatorname{Ker}(u \circ v) = \{0\}$.
Également,

$$\begin{aligned}
P \in \operatorname{Ker}(v \circ u) &\iff \int_0^X P'(t)\ \mathrm{d}t = 0 \\
&\iff P(X) - P(0) = 0 \\
&\iff P(X) = P(0) \\
&\iff \deg P \leqslant 0 \\
&\iff P \in \mathbb{R}_0[X]
\end{aligned}$$

On en déduit que $\operatorname{Ker}(v \circ u) = \mathbb{R}_0[X]$.

Exercice 6

Soient a, b et c trois réels. Soient A et B deux matrices 3×3, définies par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \qquad \textit{et} \qquad \begin{pmatrix} 2 & b & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Pour quelles valeurs des réels a, b et c les matrices A et B sont-elles diagonalisables ?

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. D'où

$$\lambda \in \operatorname{Sp}(A) \iff \det(\lambda I_3 - A) = 0$$

Or,

$$\det(\lambda I_3 - A) = \begin{pmatrix} \lambda - 1 & -a & -1 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - a \end{pmatrix} = (\lambda - 1)^2 \cdot (\lambda - a)$$

1^er^ CAS $a = 1$: on a donc $\operatorname{Sp}(A) = \{1\}$. Par l'absurde, si A est diagonalisable, alors $A \sim I_3$, d'où $A = I_3$, ce qui est absurde. Et donc A n'est pas diagonalisable.

2$^{\text{nd}}$ cas $a \neq 1$: on a donc $\mathrm{Sp}(A) = \{1, a\}$. D'où $1 \leqslant \dim(\mathrm{SEP}(a)) \leqslant 1$, et $1 \leqslant \dim(\mathrm{SEP}(1)) \leqslant 2$. Or, la matrice A est diagonalisable si et seulement si $\dim(\mathrm{SEP}(a)) + \dim(\mathrm{SEP}(1)) = 3$, donc si et seulement si $\dim(\mathrm{SEP}(1)) = 2$. Soit donc $X = \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}
X \in \mathrm{SEP}(1) &\iff AX = X \\
&\iff \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{cases} ay + z = 0 \\ az = z \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} ay = 0 \\ z = 0 \end{cases} \qquad \text{car } a \neq 1
\end{aligned}$$

1$^{\text{er}}$ sous-cas $a = 0$:

$$X \in \mathrm{SEP}(1) \iff z = 0 \iff X = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

D'où $\dim(\mathrm{SEP}(1)) = 2$.

2$^{\text{nd}}$ sous-cas $a \neq 0$:

$$X \in \mathrm{SEP}(1) \iff \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \iff X = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

D'où $\dim(\mathrm{SEP}(1)) = 1$.

Ainsi, A est diagonalisable si et seulement si $a = 0$.

Exercice 15

“ $\Longrightarrow$ ” On suppose A et B diagonalisables. On suppose aussi $AB = BA$. Ainsi, il existe une matrice inversible $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $P^{-1} \cdot A \cdot P = A'$ diagonale. Soit $B' = P^{-1} \cdot P \cdot P$. Également, on sait que les sous-espaces propres de A sont stables par B. Ainsi,

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc}
\lambda_1 & & & & & & & & \\
 & \ddots & & & & & & & \\
 & & \lambda_1 & & & & & & \\ \hline
 & & & \ddots & & & & & \\
 & & & & \ddots & & & & \\
 & & & & & \ddots & & & \\ \hline
 & & & & & & \lambda_r & & \\
 & & & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & & & \lambda_r
\end{array}\right) \quad \text{et } B' = \left(\begin{array}{c|c|c}
B_1 & & \\ \hline
 & \ddots & \\ \hline
 & & B_r
\end{array}\right).$$

B' est diagonalisable car B est diagonalisable. Mieux : chaque bloc de B' est diagonalisable d'après le théorème 40. On diagonalise le bloc B_1 en B_1'' en passant dans une nouvelle base $(\vec{\varepsilon}_1\,', \ldots, \vec{\varepsilon}_{d_1}\,')$ de $\mathrm{SEP}_A(\lambda_1)$. Alors B_1'' est diagonal. De même, $B_2'', \ldots, B_r''$ sont des blocs diagonaux. Or, la matrice A' est restée diagonale car les vecteurs $(\vec{\varepsilon}_1\,', \ldots, \vec{\varepsilon}_{d_1}\,')$ sont dans $\mathrm{SEP}_A(\lambda_1)$. Et, de même pour les autres blocs.

Exercice 10

1.

2. Analyse On suppose qu'il existe P une matrice inversible telle que $P^{-1} \cdot A \cdot P = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix} = T$.

1ère méthode On a $\operatorname{tr} A = 2 = a + b = \operatorname{tr} T$, et $\det A = 1 = a \times b = \det T$. D'où a et b sont solutions de l'équation $X^2 - 2X - 1 = 0$, i.e. $(X-1)^2 = 0$. D'où $a = b = 1$.

2nde méthode On a $\chi_A(X) = \begin{vmatrix} X & -1 \\ 1 & X-2 \end{vmatrix} = (X-1)^2 = (X-a)(X-b) = \chi_T(X)$. D'où $a = b = 1$.

Troisième partie

Annexes

Annexe I : Retour sur la diagonalisation

— *Soient A et B deux matrices diagonalisables qui commutent. Montrer qu'il existe une matrice inversible P telle que $P^{-1} \cdot A \cdot P$ et $P^{-1} \cdot A \cdot P$ sont diagonales.* La matrice A représente un endomorphisme f dans une base $\mathscr{B}$, et la matrice B représente un endomorphisme g dans la même base $\mathscr{B}$. Par hypothèse, A est diagonalisable, d'où il existe une matrice inversible P telle que $P^{-1} \cdot A \cdot P = A'$ est diagonale. Les matrices A et B commutent, d'où les sous-espaces propres de A sont stables par B. D'où, $P^{-1} \cdot B \cdot P = B'$ est diagonale par blocs. Or, la matrice B' est diagonalisable (car B est diagonalisable), et B' est diagonale par blocs. D'où, chaque bloc de B' est diagonalisable, car... Diagonalisons le bloc B_1 : dans une nouvelle $\mathscr{B}'_1 = (\varepsilon'_1, \dots, \varepsilon'_{d_1})$, la matrice $g(\varepsilon'_1) = \mu_1 \varepsilon'_1$, ..., et $g(\varepsilon'_{d_1}) = \mu_{d_1} \varepsilon'_{d_1}$. De plus, $f(\varepsilon'_1) = \lambda_1 \varepsilon'_1$, ..., $f(\varepsilon'_{d_1}) = \lambda_1 \varepsilon'_{d_1}$. En effet, les vecteurs $(\varepsilon'_i)_i$ sont des combinaisons linéaires des vecteurs $\varepsilon_j \in \mathrm{SEP}_f(\lambda_1)$. On procède de même pour les autres blocs. Ainsi, il existe une matrice inversible $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $Q^{-1} \cdot A \cdot Q$ et $Q^{-1} \cdot B \cdot Q$ sont diagonalisables.

— *Comparer les spectres et les sous-espaces propres de A et A^k (avec $k \in \mathbb{N}^*$)* La matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ est donc trigonalisable, il existe une matrice inversible $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $P^{-1} \cdot A \cdot P = T$ est triangulaire :

$$T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \dots & * \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

D'où, $\chi_A(X) = \chi_T(X) = (\lambda_1 - X)(\lambda_2 - X) \cdots (\lambda_n - X)$, donc $\mathrm{Sp}(A) = \mathrm{Sp}(T) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$. De plus,

$$T^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & * & \dots & * \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n^k \end{pmatrix}.$$

D'où, $\mathrm{Sp}(A^k) = \mathrm{Sp}(T^k) = \{\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k\}$. En outre, si $A \cdot X = \lambda X$, alors $A^k \cdot X = \lambda^k \cdot X$. D'où, $\mathrm{SEP}_A(\lambda) \subset \mathrm{SEP}_{A^k}(\lambda^k)$

— (Exercice de khôlle) Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que A est diagonalisable. D'où il existe une matrice inversible $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que la matrice $D = P^{-1} \cdot A \cdot P$ sont diagonale :

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

D'où,

$$D^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & & \\ & \lambda_2^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^k \end{pmatrix}.$$

D'où,$\mathrm{Sp}(A^k) = \mathrm{Sp}(D^k) = \{\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k\}$, et $\forall k$, $AX = \lambda X$ donc $A^k \cdot X = \lambda^k X$. D'où, $\mathrm{SEP}_A(\lambda) \subset \mathrm{SEP}_{A^k}(\lambda^k)$.

— On suppose $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisable et k impair.