KHÔLLE N° 1

Exercice 1 On considère quatre cas : $a = 1$, $a = -1$, $|a| < 1$ et $|a| > 1$.

CAS 1 On pose $a = 1$. On étudie donc la convergence de la série $\sum \frac{1}{1+n}$. Or, on sait que $\sum \frac{1}{1+n} \sim \sum \frac{1}{n}$, et cette série diverge. On en déduit que, si $a = 1$, la série $\boxed{\sum \frac{a^n}{n+a^{2n}} \text{ diverge.}}$

CAS 2 On pose $a = -1$. On étudie donc la convergence de la série $\sum \frac{(-1)^n}{n+1}$. Nous savons que la suite $\left(\frac{1}{n+1}\right)$ est décroissante et tend vers 0. D'après le théorème des séries alternées, la série $\boxed{\sum \frac{(-1)^n}{n+1} \text{ converge}}$ donc.

CAS 3 Soit $a \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1]$. On sait que, $n = o(a^n)$ quand n tend vers $+\infty$. Et donc,

$$\frac{a^n}{n + a^{2n}} = \frac{a^n}{a^{2n} + o(a^n)} = \frac{1}{a^n + o(1)} = \underset{n \to +\infty}{o}(a^{-n}).$$

Or, comme $|a| > 1$, $\frac{1}{|a|} < 1$ et donc $\sum a^{-n}$ converge (car $\sum |a|^{-n}$ converge). On en déduit que $\boxed{\sum \frac{a^n}{n+a^{2n}} \text{ converge.}}$

CAS 4 Soit $a \in]-1, 1[$. On sait que, comme $|a| < 1$, $a^n = o(n^2)$. Ainsi, on a

$$\frac{a^n}{n + a^{2n}} = \frac{o(n^2)}{n + o(n^4)} = \frac{o(n)}{1 + o(n^3)} = \frac{1}{o(n^2)}.$$

Mais, comme la série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, on en déduit que la série $\boxed{\sum \frac{a^n}{n+a^{2n}} \text{ converge.}}$

Exercice 2

1. Montrons que $(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}), \times)$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$. On sait que $I_2 \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ car $\det I_2 = 1$. Soient A et B deux matrices de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. Montrons que $A \times B^{-1} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. Tout d'abord, nous savons que B^{-1} existe car $\det B = 1 \neq 0$. Et, $\det(A \times B^{-1}) = \det A \times \frac{1}{\det B} = 1$. On en conclut que $A \times B^{-1} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. On a montré

$$\boxed{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \text{ est un sous-groupe de } \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}).}$$

2. D'après l'énoncé, nous savons que

$$\begin{aligned} \varphi : \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &\longmapsto \left(x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d} \right). \end{aligned}$$

Soient M et N deux matrices de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. Montrons que $\varphi(M \cdot N) = \varphi(M) \circ \varphi(N)$. On pose $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ et $N = \left(\begin{smallmatrix} u & v \\ w & z \end{smallmatrix}\right)$. Calculons $M \cdot N$:

$$M \cdot N = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u & v \\ w & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} au + bw & av + bz \\ cu + dw & bv + dz \end{pmatrix}.$$

Et, soit $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\big(\varphi(M) \circ \varphi(N)\big)(x) = \frac{a\frac{ux+v}{wx+z} + b}{c\frac{ux+v}{wx+z} + d} = \frac{au\,x + av + bw\,x + bz}{cu\,x + cv + dw\,x + dz} = \varphi \begin{pmatrix} au + vw & av + bz \\ cu + dw & cv + dz \end{pmatrix} (x)$$

On a bien $\varphi(M \cdot N) = \varphi(M) \circ \varphi(N)$. On cherche, à présent, $\operatorname{Ker} \varphi$. On procède par analyse-synthèse.

ANALYSE Soit $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \operatorname{Ker} \varphi$. On a donc

$$\varphi \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \left(x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d} \right) = (x \mapsto 0).$$

D'où, on en déduit que $(x \mapsto ax + b) = (x \mapsto 0)$, autrement dit, $a = b = 0$.

Synthèse On en déduit que

$$\boxed{\operatorname{Ker} \varphi = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right).}$$

En effet, soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, on calcule $\varphi\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ \alpha & \beta \end{smallmatrix}\right)(x) = \frac{0x+0}{\alpha x+\beta} = 0$.

Exercice 3

1. Montrons que $\left(\sqrt{I}, +\right)$ est un sous-groupe de A et que $\forall i \in \sqrt{I}$, $\forall a \in A$, $i \times a \in \sqrt{I}$.
   - $0 \in I$ (car c'est un sous-groupe de $(A, +)$) et donc $0 \in \sqrt{I}$ (car $x^1 \in I$).
   - Soient x et y deux éléments de $\sqrt{I}$. On pose n et m deux entiers tels que $x^m \in I$ et $y^n \in I$. Quitte à intervertir x et y ainsi que m et n, on peut suppose que $n < m$. Ainsi, en posant $k = n+m$, on calcule, à l'aide de la formule du binôme de Newton (qui est applicable car A est un anneau commutatif), $(x-y)^k$:

     $$\sum_{i=0}^{n} \binom{k}{i} (-1)^{k-i} x^i y^{k-i} = \sum_{i=0}^{m} \binom{k}{i} (-1)^{k-i} x^i y^{k-i} + \sum_{i=m+1}^{m+n} \binom{k}{i} (-1)^{k-i} x^i y^{k-i}.$$

     Or, avec $i \in [\![0, m]\!]$, on a $k - i \geqslant n$ et donc $y^{k-i} \in I$ (car I est un idéal). De même, avec $i \in [\![m+1, m+n]\!]$, $i \geqslant m$ et donc $x^i \in I$ (car I est un idéal). On en déduit, comme I est un idéal et que c'est, par conséquent, un sous groupe de $(A, +)$, que

     $$(x-y)^k = \underbrace{\sum_{i=0}^{m} \binom{k}{i} (-1)^{k-i} x^i y^{k-i}}_{\in I} + \underbrace{\sum_{i=m+1}^{m+n} \binom{k}{i} (-1)^{k-i} x^i y^{k-i}}_{\in I} \in I.$$

     On en déduit que $\left(\sqrt{I}, +\right)$ est un sous-groupe de A.
   - En posant $n = 1$, on a $\sqrt{I} \supset \{x \in A \mid x^n \in I\} = \{x \in I\} = I$. D'où $I \subset \sqrt{I}$.
2. (a) On sait que $I \cap J$ est un sous-groupe de $(A, +)$. Soit $i \in I \cap J$. Soit $a \in A$. Comme $i \in I$, on sait que $a \cdot i \in I$. De même, comme $i \in J$, $a \cdot i \in J$. On en déduit que $a \cdot i \in I \cap J$. On en déduit que $I \cap J$ est un idéal de A.

   (b) On suppose $I \subset J$. Soit $i \in \sqrt{I}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $i^n \in I \subset J$. D'où $i^n \in J$ et donc $i \in \sqrt{J}$.

   (c) "$\subset$" Soit $x \in \sqrt{I \cap J}$. Il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $x^n \in I \cap J$ donc $x^n \in I$ et $x^n \in J$. On en déduit que $x \in \sqrt{I}$ et $x \in \sqrt{J}$, d'où $x \in \sqrt{I} \cap \sqrt{J}$.
   "$\supset$" Soit $x \in \sqrt{I} \cap \sqrt{J}$. Comme $x \in \sqrt{I}$, soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $x^n \in I$. De même, comme $x \in \sqrt{J}$, soit $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $x^m \in J$. Ainsi, en posant $N = m + n$, on a $x^{m+n} \in I$ (car I est un idéal) et $x^{m+n} \in J$ (car J est un idéal). On en déduit que $x^{m+n} \in I \cap J$ et donc $x^{m+n} \in \sqrt{I \cap J}$.
3. Si I et J deux idéaux tels que $I \subset J$, alors $\sqrt{I} \subset \sqrt{J}$. Mais $\sqrt{I}$ est un idéal et, $I \subset \sqrt{I}$, d'où $\sqrt{I} \subset \sqrt{\sqrt{I}}$. On montre donc $\sqrt{\sqrt{I}} \subset \sqrt{I}$. Soit $x \in \sqrt{\sqrt{I}}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $x^n \in \sqrt{I}$. Soit $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $(x^n)^m \in I$. On a donc $x^{n \cdot m} \in I$ et donc $x \in \sqrt{I}$.