Préparation aux oraux CCINP n°1

# Logique & graphes

**Définition.** Étant donnée une formule $\varphi$ de la logique proportionnelle, on dit que :
- c'est un *littéral* si $\varphi = p$ ou $\varphi = \neg p$, pour $p \in \mathscr{P}$ ;
- c'est une *clause* si $\varphi = \ell_1 \vee \cdots \vee \ell_n$, où les $\ell_i$ sont des littéraux ;
- c'est une *FNC* si $\varphi = c_1 \wedge \cdots \wedge c_m$, où les $c_j$ sont des clauses ;
- c'est une *$n$-FNC* si $\varphi$ est une FNC et que chaque clause de $\varphi$ contient au plus $n$ littéraux.

**Q1.** Parmi les formules suivantes, lesquelles sont des FNC ? Pour toutes les formules sous FNC, lesquelles sont des $n$-FNC ? Quelle sont les valeurs de $n$ ? Quel est le nombre de clauses de ces formules ? Finalement, lesquelles sont satisfiable ?

(1) $\psi_1 = (x_0 \vee x_1 \vee x_2) \wedge (\neg x_0 \vee \neg x_1 \vee \neg x_2)$
(2) $\psi_2 = (x_0 \leftrightarrow x_1) \vee (x_2 \leftrightarrow x_3) \vee (x_4 \leftrightarrow x_5)$
(3) $\psi_3 = (x_0 \wedge x_1 \wedge x_2) \to (\neg x_0 \vee \neg x_1 \vee \neg x_2)$
(4) $\psi_4 = (x_0 \vee x_1) \wedge (\neg x_0 \vee x_2) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2)$
(5) $\psi_5 = (x_0 \wedge \neg x_1) \vee (x_2 \leftrightarrow x_3) \vee (x_4 \leftrightarrow \neg x_5)$
(6) $\psi_6 = (x_0 \wedge \neg x_1 \wedge x_2) \vee (x_0 \wedge x_1 \wedge \neg x_2) \vee (\neg x_0 \wedge x_1 \wedge x_2)$

**Q2.** Mettre sous forme FNC la formule $(x_0 \to (x_1 \wedge x_2)) \wedge \neg(x_1 \vee x_2)$.

On rappelle la définition du problème $n$-SAT, où $n \in \mathbb{N}$.

$n$-SAT : **Entrée.** Une formule $\varphi$ sous forme $n$-FNC
**Sortie.** La formule $\varphi$ est-elle satisfiable ?

**Q3.** Pour quelles valeurs de $n$ le problème $n$-SAT est-il **NP**-complet ? Justifier dans les grandes lignes.

**Définition.** On dit d'un graphe (non orienté) qu'il est *coloriable* si on peut colorier tous les sommets du graphe tels que deux sommets voisins sont de couleurs différentes. Un graphe est dit *$k$-coloriable* s'il est coloriable avec $k$ couleurs.

**Q4.** En considérant le graphe ci-dessous, quelle est la valeur minimale de $k > 0$ telle que le graphe soit $k$-coloriable ?

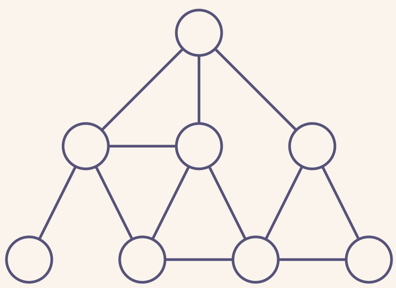

**Figure 1.** Graphe exemple

On considère un ensemble de couleurs $\mathscr{C} = [\![1, k]\!]$, un graphe $G = (S, A)$ avec $S = [\![1, N]\!]$. On crée les littéraux $p_{i,c}$ pour chaque sommet $i \in S$ et chaque couleur $c \in \mathscr{C}$.

*Hugo Salou*

**Q5.** (1) Pour $i$ et $j$ deux sommets voisins et une couleur $c$, créer une clause qui traduit le fait que les sommets $i$ et $j$ ne peuvent pas être de la même couleur $c \in \mathscr{C}$.

(2) Créer une 2-FNC qui traduit le fait que deux sommets $i$ et $j$ ne peuvent pas être de la même couleur.

(3) Créer une FNC qui traduit le fait que deux sommets voisins dans le graphe $G = (S, A)$ ne peuvent pas être de la même couleur.

**Q6.** On souhaite traduire le fait qu'un graphe est $k$-coloriable. Pour cela, il est nécessaire que les sommets voisins ont des couleurs différentes, et que tous les sommets soient coloriés.

(1) Traduire cette deuxième condition pour le graphe $G$ sous la forme d'une FNC.

(2) Construire une FNC qui traduit le fait que $G$ est $k$-coloriable.

On définit le problème ci-dessous :

$k$-COLORATION : | **Entrée.** Un graphe $G = (S, A)$ non orienté
| **Sortie.** Le graphe $G$ est-il $k$-coloriable ?

**Q7.** Montrer que $k$-COLORATION se réduit au problème $k$-SAT.

**Q8.** Montrer que $k$-COLORATION est dans **NP**. Pour quelles valeurs de $k$ le problème $k$-COLORATION est-il **NP**-complet ?