Préparation aux oraux CCINP n°8

Décidabilité

Q1. (1) Rappeler la définition du langage $\mathscr{L}(\mathscr{M})$ d'un machine $\mathscr{M}$.
(2) Construire une machine dont le langage est $\{w \in \Sigma^\star \mid w \text{ est un palindrome}\}$.

Q2. Montrer l'indécidabilité du problème Arrêt défini par :

Arrêt : **Entrée.** Un mot $w \in \Sigma^\star$ et une machine $\mathscr{M}$.
Sortie. La machine $\mathscr{M}$ s'arrête-t-elle sur l'entrée w ?

Étant donné un langage $L \subseteq \Sigma^\star$, on définit le problème $\textsc{Appartient}_L$ comme :

$\textsc{Appartient}_L$: **Entrée.** Un mot $w \in \Sigma^\star$.
Sortie. Est-ce que $w \in L$?

On dira ainsi que L est *indécidable* (resp. *décidable*) dès lors que le problème $\textsc{Appartient}_L$ est indécidable (resp. décidable).

Q3. Montrer qu'il existe un sous-ensemble indécidable de $\{1\}^\star$. On procédera en quatre étapes, comme décrit ci-dessous.
(1) Démontrer l'indécidabilité du problème EstVide

EstVide : **Entrée.** La sérialisation $\langle \mathscr{M} \rangle$ d'une machine.
Sortie. Le langage de $\mathscr{M}$ est-il vide ?

(2) Exprimer mathématiquement le langage des « instances positives » du problème EstVide, c'est-à-dire l'ensemble des entrées vérifiant la condition du problème. Ce langage est-il decidable ?
(3) Définir une fonction injective calculable $f : \Sigma^\star \to \{1\}^\star$.
(4) En déduire qu'il existe un sous-ensemble indécidable de $\{1\}^\star$.

Hugo Salou