

Préparation aux oraux CCINP n°9

 k -ième plus petit élément

Dans cet exercice, on s'intéresse au problème k -PLUSPETITÉLÉMENT.

k -PLUSPETITÉLÉMENT : **Entrée.** Un ensemble $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ ordonné par \preceq de cardinal $n > k$.
Sortie. Quel est le k -ième plus petit élément de A ?

Q1. Proposer une méthode déterministe répondant au problème. On la décrira sous forme d'un algorithme synthétique. Quelle est la complexité de cette méthode ? On supposera avoir une complexité en $O(1)$ pour la comparaison $x \preceq y$, et pour le calcul du cardinal.

Au vu de la question précédente, on peut faire mieux. Pour cela, on utilise un algorithme probabiliste.

Procédure $\text{Rs}(A, k)$

$n \leftarrow \text{card } A$

$\{a_1, \dots, a_n\} \leftarrow A$

Si $n = 1$ **alors Renvoyer** a_1

$i \leftarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$

$A_{\prec} \leftarrow \{x \in A \mid x \prec a_i\}$

$A_{\succ} \leftarrow \{y \in A \mid y \succ a_i\}$

Si $\text{card } A_{\prec} \geq k$ **alors Renvoyer** $\text{Rs}(A_{\prec}, k)$

Sinon si $\text{card } A_{\prec} = k - 1$ **alors Renvoyer** a_i

Sinon Renvoyer $\text{Rs}(A_{\succ}, k - (\text{card } A_{\prec}) - 1)$

Q2. De quel type d'algorithme cela s'agit-il ?

Q3. En notant $C(n)$ la variable aléatoire donnant le nombre d'opérations pour un appel de $\text{Rs}(A, k)$ avec un ensemble A de cardinal n , démontrer que $\mathbb{E}[C(n)] = O(n)$.