TD Applications

Ce document contient l'entièreté du TD « Applications ». Il est voué à être modifié par la suite, par l'ajout d'autres exercices (et d'autres exercices). C'est plus ou moins l'équivalent des « Fiches de révisions » de Mr Journault, mais pour l'application du cours. Vous pouvez revenir sur ce fichier (notamment avant les concours) pour vous entrainer sur des exercices de cours. Les différentes sections de ce TD sont totalement indépendantes, et peuvent être réalisés dans n'importe quel ordre. Referez-vous à la table des matières ci-dessous pour connaître les différentes sections de ce TD.

Pour les exercices sur les automates et les langages réguliers, vous pourrez vous aider de l'outil *Éditeur d'automates* pour vérifier vos réponses (en particulier pour la déterminisation, la suppression des ε-transitions, le calcul d'expressions régulières à partir d'automates, ou le calcul d'automates à partir d'expressions régulières).

Un corrigé détaillé est disponible à la fin de ce document. Des liens (clickables) sont disponibles dans chaque exercice pour accéder à la correction.

Si vous avez des suggestions (type d'exercices manquants, correction douteuse, *etc*), prévenez-moi.

Table des matières.

Hugo Salou

Partie I.

Énoncés

I.1. Logique propositionnelle

Dans cette partie, on utilisera les formules ci-dessous.

(1) $q \lor ((r \land \lnot t \land \bot) \to (\bot \lor \top))$

(2) $(r \land (\top \lor t)) \lor \bot \lor (q \land \top)$

(3) $(t \land \top) \to \lnot t$

(4) $q \lor \lnot\lnot(q \land (\top \lor (r \land r)))$

(5) $\lnot(q \land (t \to s) \land r)$

(6) $\lnot((\top \lor t) \land r)$

(7) $p \lor p \lor \lnot r$

(8) $((s \to (p \lor p \lor \top)) \lor r) \to (\lnot\lnot t \land q)$

(9) $\lnot((t \land p) \to r)$

(10) $\lnot(q \to (\top \lor (q \land s)))$

(11) $s \lor (\bot \land t \land ((\top \lor \lnot\bot) \land \bot)) \lor r \lor \bot$

(12) $(s \to r) \lor p$

(13) $(s \lor q \lor q \lor (r \to \lnot q)) \land \bot$

(14) $(p \lor \lnot p) \to \bot$

(15) $((q \to (r \land q)) \land \top) \to q$

(16) $((r \to p) \land s \land r) \to (t \to t)$

(17) $\bot \lor ((t \to p) \land r)$

(18) $(p \land r) \lor \lnot q \lor (p \to p)$

(19) $p \lor \lnot\lnot q$

(20) $\lnot r \land q \land (\top \lor r)$

(21) $t \land \bot \land (\lnot r \land (r \to p))$

(22) $t \lor t \lor (\top \land \lnot t)$

(23) $(q \to p) \to \lnot(r \land (p \lor (t \land \top)))$

(24) $\lnot r \land s \land r \land \bot$

(25) $\lnot(q \land \bot \land q) \land ((\top \to q) \to \top)$

(26) $(t \to s) \lor r$

(27) $\lnot((\bot \land t) \to q)$

(28) $(\top \lor q) \to (t \to r)$

(29) $\lnot(t \lor (s \to (r \to s)))$

(30) $s \lor \lnot(\top \lor q)$

I.1.a. Mise sous forme normale disjonctive

Voir le corrigé

Mettre sous forme normale disjonctive les formules définies ci-avant.

I.1.b. Mise sous forme normale conjonctive

Voir le corrigé

Mettre sous forme normale conjonctive les formules définies ci-avant.

I.1.c. Algorithme de Quine

Voir le corrigé

Pour chacune des formules propositionnelles ci-avant, trouver un environnement propositionnel $\rho \in \mathbb{B}^{\mathscr{P}}$ qui satisfait[1] la formule. On représentera l'algorithme de Quine sous forme d'arbre binaire étiqueté par les variables p supposées, la branche gauche représentera la supposition p fausse, et la branche droite représentera la supposition p vraie.

[1] *i.e.* $[\![f]\!]^{\rho} = \boldsymbol{V}$, pour une formule $f \in \mathscr{F}$.

I.2. Langages réguliers et automates

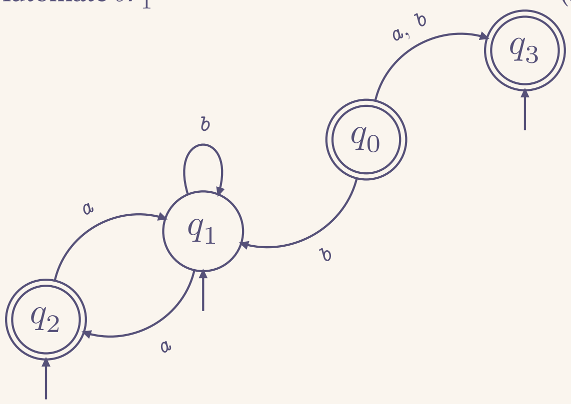
Dans la représentation des automates, les états finaux sont ceux avec des cercles doubles. L'étiquette d'une transition suit *toujours* la courbure de la flèche représentant la transition. Et, elle se situe au milieu de la flèche.

I.2.a. Déterminisation d'automates

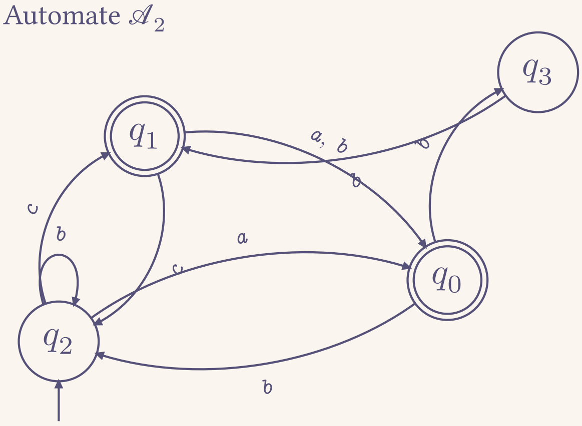
Voir le corrigé

Déterminiser les automates ci-dessous, en utilisant l'algorithme du cours.

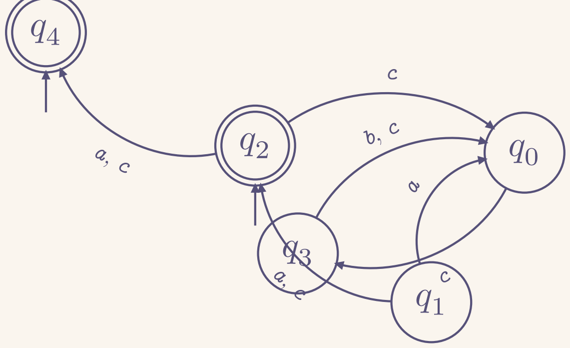
(1) Automate $\mathscr{A}_1$



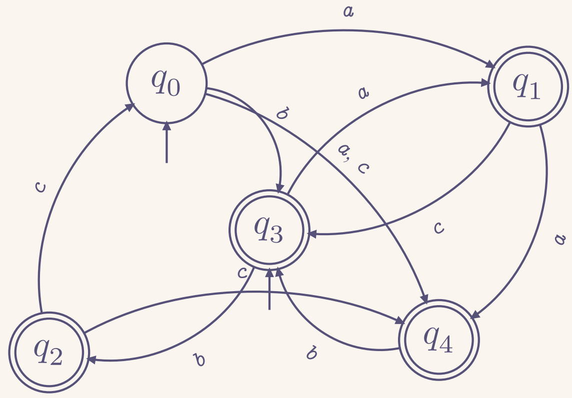
(2) Automate $\mathscr{A}_2$



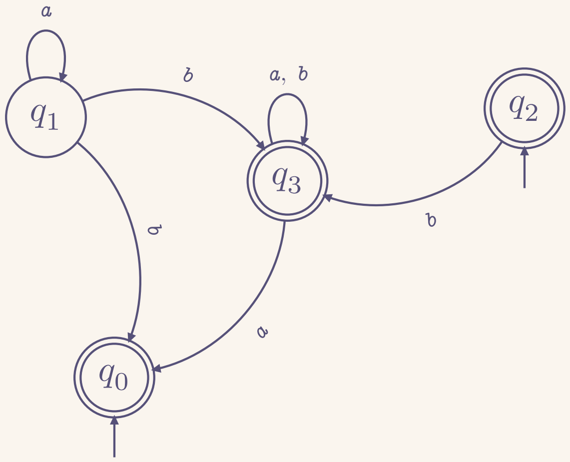
(3) Automate $\mathscr{A}_3$



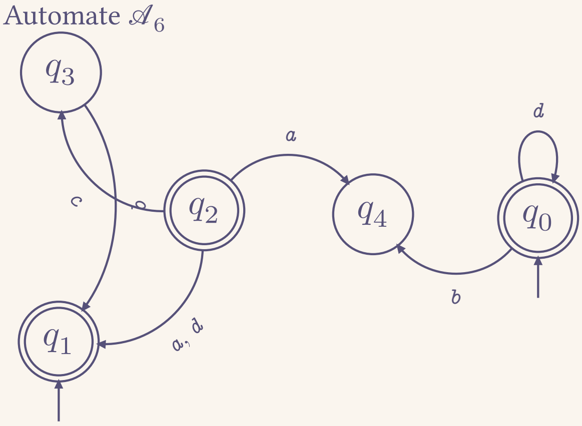
(4) Automate $\mathscr{A}_4$



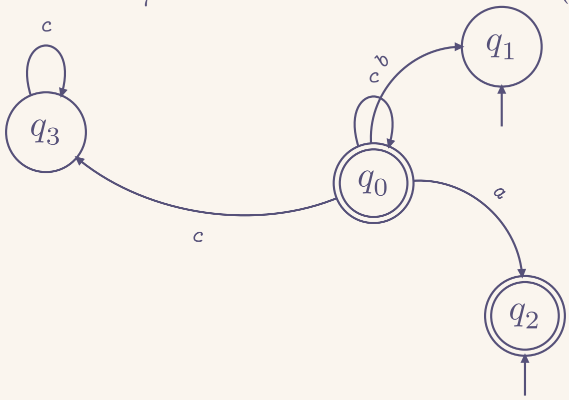
(5) Automate $\mathscr{A}_5$



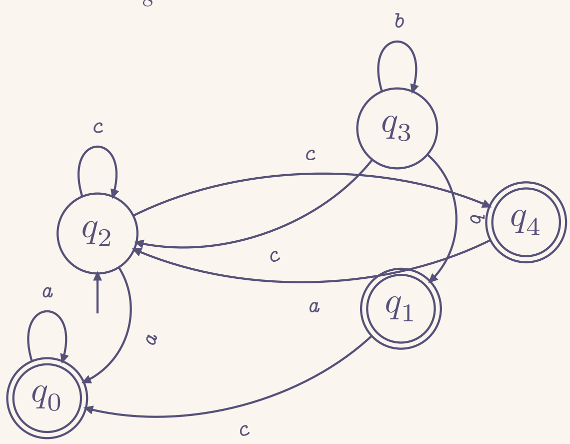
(6) Automate $\mathscr{A}_6$



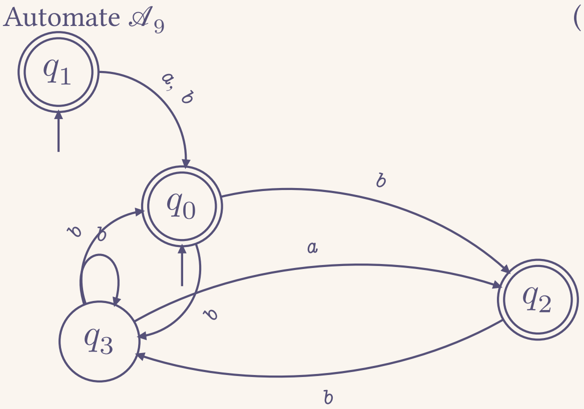
(7) Automate $\mathscr{A}_7$



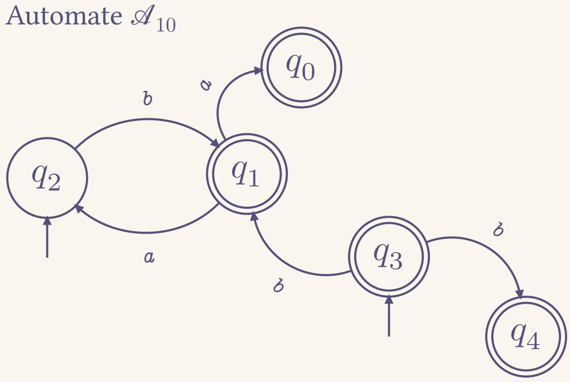
(8) Automate $\mathscr{A}_8$



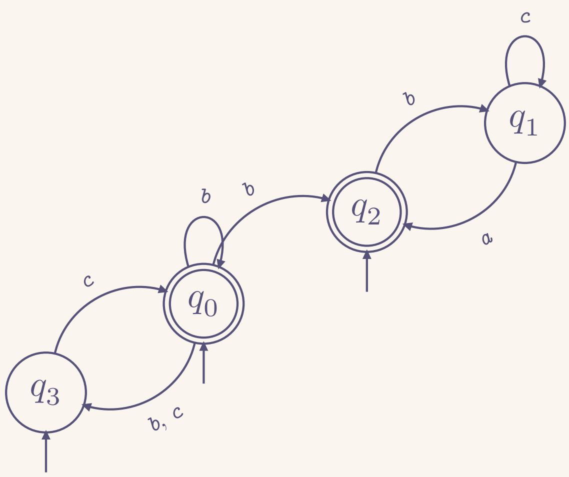
(9) Automate $\mathscr{A}_9$



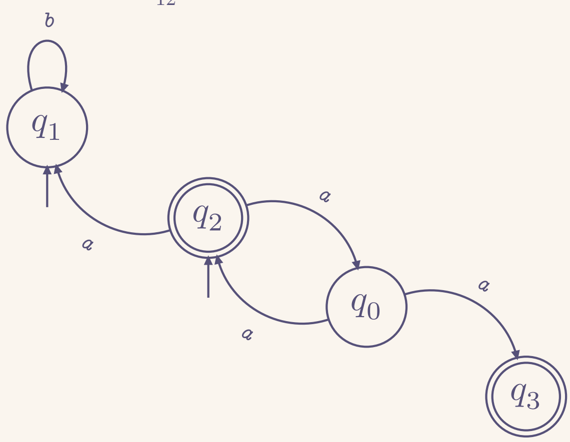
(10) Automate $\mathscr{A}_{10}$



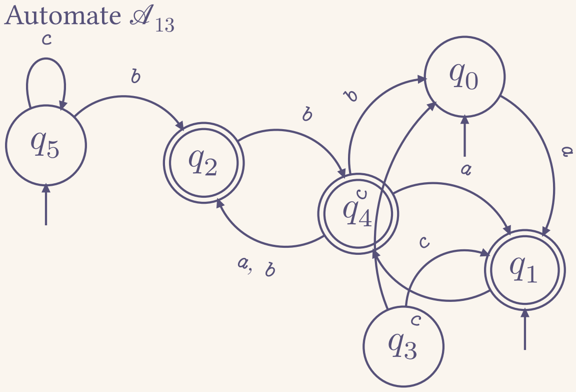
(11) Automate $\mathscr{A}_{11}$



(12) Automate $\mathscr{A}_{12}$



(13) Automate $\mathscr{A}_{13}$



I.2.b. Suppression d'ε-transitions

Voir le corrigé

I.2.c. Algorithme d'élimination d'états

Voir le corrigé

I.2.d. Algorithme de Berry-Sethi

Voir le corrigé

Appliquer l'algorithme de Berry-Sethi pour obtenir un automate reconnaissant les différentes expressions régulières.

(1) $e_1 = a^\star(b \mid a)a^\star$;
(2) $e_2 = a((ba) \mid c)^\star c^\star a\,b$;
(3) $e_3 = ((ba) \mid \varepsilon)^\star(a \mid b)^\star$;
(4) $e_4 = a\,a\,b((ba^\star b^\star) \mid a^\star)(c \mid \varepsilon)^\star$;
(5) $e_5 = ba^\star(d \mid \varepsilon)^\star(d \mid \varepsilon)^\star a^\star$;
(6) $e_6 = a^\star b^\star ba^\star b$;
(7) $e_7 = a(b \mid (a a))^\star b$;
(8) $e_8 = ((ba) \mid (bb))^\star a\,b^\star b$;
(9) $e_9 = (\varepsilon \mid b)^\star a\,ba^\star$;
(10) $e_{10} = a^\star b^\star bb^\star(a \mid \varepsilon)^\star$;
(11) $e_{11} = (b \mid \varepsilon)^\star ba\,b^\star(a \mid b)^\star$;
(12) $e_{12} = (b^\star a\,b^\star)^\star a^\star$;

I.2.e. Automate local

Voir le corrigé

I.2.f. Langages non réguliers

Voir le corrigé

Démontrer que les langages ci-dessous ne sont pas réguliers. L'alphabet Σ est défini comme $\Sigma = \{a, b\}$. L'ordre des questions est totalement aléatoire. On pourra supposer, hormis pour la question 1, que le langage $\{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ n'est pas régulier.

(1) $L = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$,
(2) $L = \{www \mid w \in \Sigma^\star\}$,
(3) $L = \{a^i b^j \mid i < j\}$,
(4) $L = \{ww \mid w \in \Sigma^\star\}$,
(5) $L = \{a^i b^j \mid i \neq j\}$,
(6) $L = \{w \in \Sigma^\star \mid |w|_a = |w|_b\}$,
(5) $L = \{a^n \mid \sqrt{n} \in \mathbb{N}\}$,
(6) $L = \{a^n \mid \log_2 n \in \mathbb{N}\}$,
(7) $L = \{a^n \mid n \text{ premier}\}$.

I.2.g. Clôture des langages réguliers

Voir le corrigé

I.3. Algorithmes probabilistes

I.3.a. Reconnaissance du type d'algorithme probabiliste

I.4. Apprentissage

I.4.a. Application de l'algorithme ID_3

Partie II.

Corrigés

II.1. Logique propositionelle

II.1.a. Mise sous forme normale disjonctive

Voir l'énoncé

II.1.b. Mise sous forme normale conjonctive

Voir l'énoncé

(1)

$$\begin{aligned} q \vee ((r \wedge \neg t \wedge \bot) \to (\bot \vee \top)) &\equiv \neg(r \wedge \bot) \vee \neg(r \wedge \bot) \vee \top \\ &\equiv q \vee \top \\ &\equiv \top \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} (r \wedge (\top \vee t)) \vee \bot \vee (q \wedge \top) &\equiv ((r \wedge (\top \vee t)) \vee \bot \vee q) \wedge ((r \wedge (\top \vee t)) \vee \bot \vee \top) \\ &\equiv ((r \wedge \top) \vee q) \wedge \top \\ &\equiv (q \vee r) \wedge (q \vee \top) \\ &\equiv (q \vee r) \wedge \top \\ &\equiv q \vee r \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned} (t \wedge \top) \to \neg t &\equiv \neg t \vee \neg t \\ &\equiv \neg t \end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned} q \vee \neg\neg(q \wedge (\top \vee (r \wedge r))) &\equiv q \vee (q \wedge (\top \vee (r \wedge r))) \\ &\equiv (q \vee q) \wedge (\top \vee \top \vee (r \wedge r)) \\ &\equiv q \wedge (q \vee \top) \\ &\equiv q \wedge \top \\ &\equiv q \end{aligned}$$

(5)

$$\begin{aligned} \neg(q \wedge (t \to s) \wedge r) &\equiv \neg q \vee \neg((t \to s) \wedge r) \\ &\equiv \neg(t \to s) \vee \neg(t \to s) \vee \neg r \\ &\equiv \neg(\neg t \vee s) \vee \neg(\neg t \vee s) \vee \neg r \\ &\equiv (\neg\neg t \wedge \neg s) \vee (\neg\neg t \wedge \neg s) \vee \neg r \\ &\equiv \neg q \vee ((\neg r \vee \neg\neg t) \wedge (\neg r \vee \neg s)) \\ &\equiv (\neg r \vee \neg r \vee \neg\neg t) \wedge (\neg r \vee \neg r \vee \neg s) \\ &\equiv (\neg r \vee \neg r \vee t) \wedge (\neg r \vee \neg r \vee \neg s) \end{aligned}$$

(6)

$$\begin{aligned} \neg((\top \vee t) \wedge r) &\equiv \neg(\top \vee t) \vee \neg r \\ &\equiv (\neg\top \wedge \neg t) \vee \neg r \\ &\equiv (\neg r \vee \neg\top) \wedge (\neg r \vee \neg t) \\ &\equiv (\neg r \vee \bot) \wedge (\neg r \vee \neg t) \\ &\equiv \neg r \wedge (\neg r \vee \neg t) \end{aligned}$$

(7)

$$p \vee p \vee \neg r \equiv \top$$

(8)

$$\begin{aligned}((s \to (p \lor p \lor \top)) \lor r) \to (\neg\neg t \land q) &\equiv \neg(p \lor p \lor \top \lor r) \lor (t \land q)\\
&\equiv (\neg(p \lor p \lor \top \lor r) \lor t) \land (\neg(p \lor p \lor \top \lor r) \lor q)\\
&\equiv ((\neg(p \lor p \lor \top) \land \neg r) \lor t) \land ((\neg(p \lor p \lor \top) \land \neg r) \lor q)\\
&\equiv (t \lor \neg(p \lor p \lor \top)) \land (t \lor \neg r) \land ((q \lor \neg(p \lor p \lor \top)) \land (q \lor \neg r))\\
&\equiv (t \lor (\neg\neg s \land \neg(p \lor \top))) \land (t \lor \neg r) \land ((q \lor (\neg\neg s \land \neg(p \lor \top))) \land (q \lor \neg r))\\
&\equiv (t \lor \neg\neg s) \land (t \lor \neg(p \lor \top)) \land (t \lor \neg r) \land ((q \lor \neg\neg s) \land (q \lor \neg(p \lor \top)) \land (q \lor \neg r))\\
&\equiv (t \lor s) \land (t \lor (\neg p \land \neg\top)) \land (t \lor \neg r) \land ((q \lor s) \land (q \lor (\neg p \land \neg\top)) \land (q \lor \neg r))\\
&\equiv (t \lor s) \land (t \lor \neg p) \land (t \lor \neg\top) \land (t \lor \neg r) \land ((q \lor s) \land (q \lor \neg p) \land (q \lor \neg\top) \land (q \lor \neg r))\\
&\equiv (t \lor s) \land (t \lor \neg p) \land (t \lor \bot) \land (t \lor \neg r) \land ((q \lor s) \land (q \lor \neg p) \land (q \lor \bot) \land (q \lor \neg r))\\
&\equiv (t \lor s) \land (t \lor \neg p) \land t \land (t \lor \neg r) \land ((q \lor s) \land (q \lor \neg p) \land q \land (q \lor \neg r))\end{aligned}$$

(9)

$$\begin{aligned}\neg((t \land p) \to r) &\equiv \neg(\neg(t \land p) \lor r)\\
&\equiv \neg\neg(t \land p) \land \neg r\\
&\equiv t \land p \land \neg r\end{aligned}$$

(10)

$$\begin{aligned}\neg(q \to (\top \lor (q \land s))) &\equiv \neg(\neg q \lor \top)\\
&\equiv \neg\neg q \land \neg\top\\
&\equiv q \land \bot\\
&\equiv \bot\end{aligned}$$

(11)

$$\begin{aligned}s \lor (\bot \land t \land ((\top \lor \neg\bot) \land \bot)) \lor r \lor \bot &\equiv ((s \lor (\bot \land t)) \land (s \lor ((\top \lor \neg\bot) \land \bot))) \lor r\\
&\equiv (s \lor s \lor (\bot \land t)) \land (s \lor s \lor ((\top \lor \neg\bot) \land \bot))\\
&\equiv (r \lor ((s \lor \bot) \land (s \lor t))) \land (r \lor ((\top \lor \top \lor \neg\bot) \land (s \lor \bot)))\\
&\equiv (s \lor s \lor \bot) \land (s \lor s \lor t) \land ((s \lor \top \lor \top \lor \neg\bot) \land (s \lor s \lor \bot))\\
&\equiv (r \lor s) \land (s \lor s \lor t) \land ((s \lor s \lor \top) \land (r \lor s))\\
&\equiv (r \lor s) \land (s \lor s \lor t) \land ((r \lor \top) \land (r \lor s))\\
&\equiv (r \lor s) \land (s \lor s \lor t) \land (\top \land (r \lor s))\\
&\equiv (r \lor s) \land (s \lor s \lor t) \land (r \lor s)\end{aligned}$$

(12)

$$(s \to r) \lor p \equiv \neg s \lor r \lor p$$

(13)

$$(s \lor q \lor q \lor (r \to \neg q)) \land \bot \equiv \bot$$

(14)

$$\begin{aligned}(p \lor \neg p) \to \bot &\equiv \neg\top \lor \bot\\
&\equiv \bot\end{aligned}$$

(15)

$$\begin{aligned}((q \to (r \land q)) \land \top) \to q &\equiv \neg(\neg q \lor (r \land q)) \lor q \\ &\equiv (\neg\neg q \land \neg(r \land q)) \lor q \\ &\equiv (q \lor \neg\neg q) \land (q \lor \neg(r \land q)) \\ &\equiv (q \lor q) \land (\neg r \lor \neg r \lor \neg q) \\ &\equiv q \land (\neg r \lor \neg r \lor \neg q)\end{aligned}$$

(16)

$$\begin{aligned}((r \to p) \land s \land r) \to (t \to t) &\equiv \neg t \lor \neg t \lor t \\ &\equiv \neg(\neg r \lor p) \lor \neg(s \land r) \lor \top \\ &\equiv \top\end{aligned}$$

(17)

$$\bot \lor ((t \to p) \land r) \equiv (\neg t \lor p) \land r$$

(18)

$$\begin{aligned}(p \land r) \lor \neg q \lor (p \to p) &\equiv \neg p \lor \neg p \lor p \\ &\equiv (\neg p \lor p \lor (\neg q \lor p)) \land (\neg p \lor p \lor (\neg q \lor r)) \\ &\equiv (\neg q \lor \neg q \lor p) \land (\neg q \lor \neg q \lor r) \\ &\equiv \top \land \top \\ &\equiv \top\end{aligned}$$

(19)

$$p \lor \neg\neg q \equiv p \lor q$$

(20)

$$\begin{aligned}\neg r \land q \land (\top \lor r) &\equiv \neg r \land q \land \top \\ &\equiv \neg r \land q\end{aligned}$$

(21)

$$\begin{aligned}t \land \bot \land (\neg r \land (r \to p)) &\equiv \bot \land \neg r \land (\neg r \lor p) \\ &\equiv \bot\end{aligned}$$

(22)

$$\begin{aligned}t \lor t \lor (\top \land \neg t) &\equiv r \lor ((t \lor \top) \land (t \lor \neg t)) \\ &\equiv (t \lor t \lor \top) \land (t \lor t \lor \neg t) \\ &\equiv (r \lor \top) \land (r \lor \top) \\ &\equiv \top\end{aligned}$$

(23)

$$\begin{aligned}(q \to p) \to \neg(r \land (p \lor (t \land \top))) &\equiv \neg r \lor \neg r \lor \neg(p \lor (t \land \top)) \\ &\equiv \neg r \lor \neg r \lor (\neg p \land \neg(t \land \top)) \\ &\equiv (\neg r \lor (\neg p \land \neg(t \land \top)) \lor \neg\neg q) \land (\neg r \lor (\neg p \land \neg(t \land \top)) \lor \neg p) \\ &\equiv (((\neg r \lor \neg p) \land (\neg r \lor \neg(t \land \top))) \lor q) \land (((\neg r \lor \neg p) \land (\neg r \lor \neg(t \land \top))) \lor \neg p) \\ &\equiv (\neg r \lor \neg r \lor \neg p) \land (\neg r \lor \neg r \lor \neg(t \land \top)) \land ((\neg r \lor \neg r \lor \neg p) \land (\neg r \lor \neg r \lor \neg(t \land \top))) \\ &\equiv (\neg r \lor \neg r \lor \neg p) \land (\neg r \lor \neg t \lor \neg t \lor \neg\top) \land ((\neg r \lor \neg r \lor \neg p) \land (\neg r \lor \neg t \lor \neg t \lor \neg\top)) \\ &\equiv (\neg r \lor \neg r \lor \neg p) \land (\neg r \lor \neg t \lor \neg t \lor \bot) \land ((\neg r \lor \neg r \lor \neg p) \land (\neg r \lor \neg t \lor \neg t \lor \bot)) \\ &\equiv (\neg r \lor \neg r \lor \neg p) \land (\neg r \lor \neg r \lor \neg t) \land ((\neg r \lor \neg r \lor \neg p) \land (\neg r \lor \neg r \lor \neg t))\end{aligned}$$

(24)

$$\neg r \land s \land r \land \bot \equiv \bot$$

(25)

$$\begin{aligned}\neg(q \land \bot \land q) \land ((\top \to q) \to \top) &\equiv (\neg q \lor \neg(\bot \land q)) \land (\neg(\neg\top \lor q) \lor \top) \\ &\equiv (\neg\bot \lor \neg\bot \lor \neg q) \land \top \\ &\equiv \top \lor \top \lor \neg q \\ &\equiv \neg q \lor \top \\ &\equiv \top\end{aligned}$$

(26)

$$(t \to s) \lor r \equiv \neg t \lor s \lor r$$

(27)

$$\begin{aligned}\neg((\bot \land t) \to q) &\equiv \neg(\neg\bot \lor q) \\ &\equiv \neg\neg\bot \land \neg q \\ &\equiv \bot \land \neg q \\ &\equiv \bot\end{aligned}$$

(28)

$$\begin{aligned}(\top \lor q) \to (t \to r) &\equiv \neg t \lor \neg t \lor r \\ &\equiv \neg t \lor \neg t \lor r \\ &\equiv \neg t \lor r\end{aligned}$$

(29)

$$\begin{aligned}\neg(t \lor (s \to (r \to s))) &\equiv \neg t \land \neg(s \to (r \to s)) \\ &\equiv \neg t \land \neg(\neg r \lor \neg r \lor s) \\ &\equiv \neg t \land \neg\neg s \land \neg(\neg r \lor s) \\ &\equiv \neg t \land s \land \neg\neg r \land \neg s \\ &\equiv \neg t \land s \land r \land \neg s\end{aligned}$$

(30)

$$\begin{aligned}s \lor \neg(\top \lor q) &\equiv s \lor (\neg\top \land \neg q) \\ &\equiv (s \lor \neg\top) \land (s \lor \neg q) \\ &\equiv (s \lor \bot) \land (s \lor \neg q) \\ &\equiv s \land (s \lor \neg q)\end{aligned}$$

II.1.c. Algorithme de QUINE

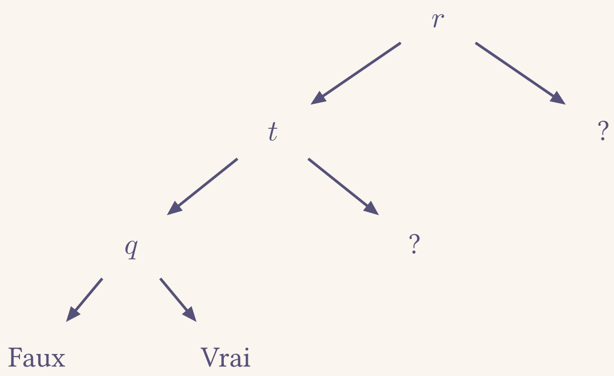
Voir l'énoncé

On représente l'algorithme de QUINE sous forme d'arbres binaires étiquetés par les variables p supposées. La branche gauche correspond à la supposition p fausse, et celle de droite correspond à p vraie. On applique des règles de simplification de formules logiques.[2] Les feuilles des arbres sont soit « Vrai » si l'interprétation de la formule dans l'environnement propositionnel[3] est vraie, soit « Faux » si l'interprétation est fausse, soit « ? » si l'on n'a pas eu besoin de calculer ce sous-arbre.

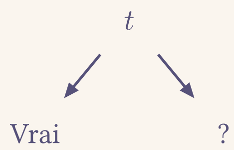
(1) $q \vee ((r \wedge \neg t \wedge \bot) \to (\bot \vee \top))$

Vrai

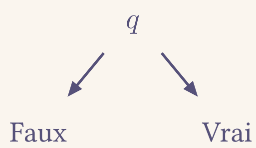
(2) $(r \wedge (\top \vee t)) \vee \bot \vee (q \wedge \top)$



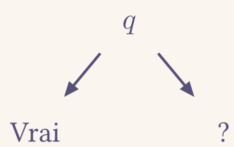
(3) $(t \wedge \top) \to \neg t$



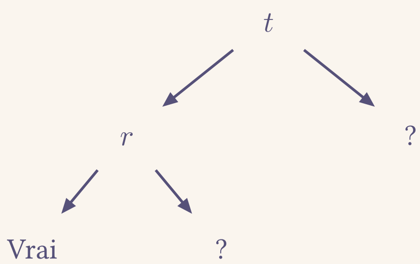
(4) $q \vee \neg\neg(q \wedge (\top \vee (r \wedge r)))$



(5) $\neg(q \wedge (t \to s) \wedge r)$



(6) $\neg((\top \vee t) \wedge r)$



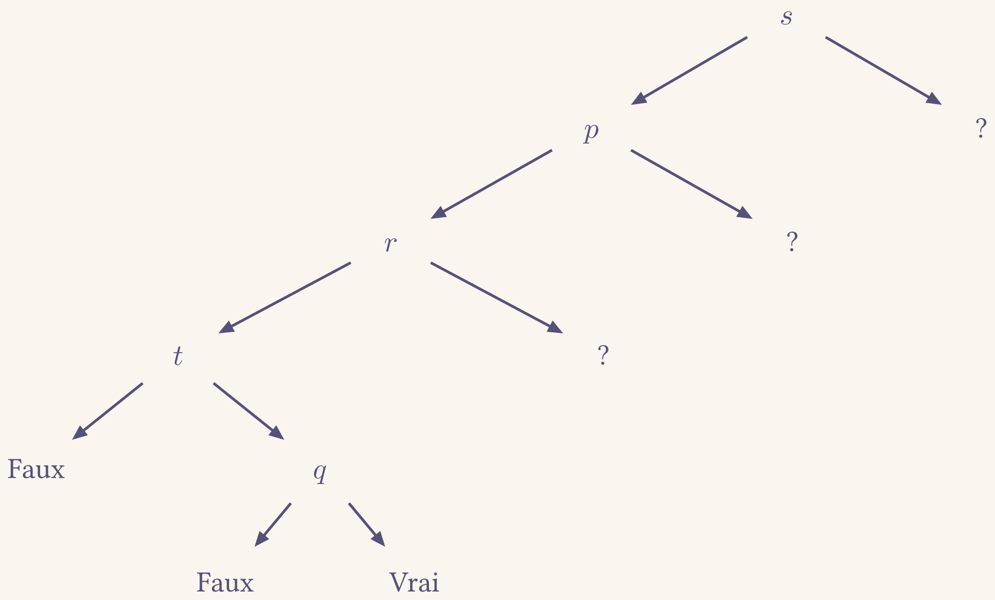
[2]Ici, on parle des règles classiques : si l'on a un ET, dont une variable est fausse, le ET est faux. De même pour les autres opérateurs logiques.

[3]potentiellement partiel, si l'on n'utilise pas toutes les variables

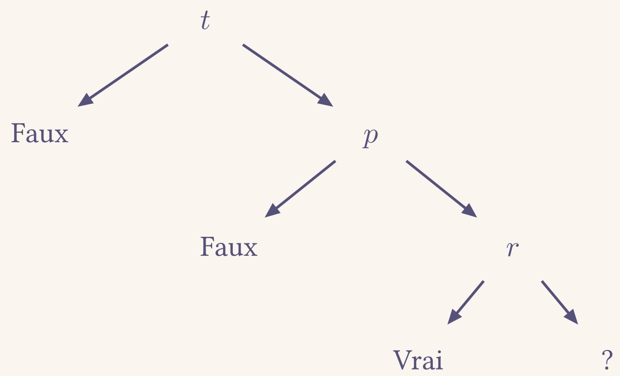
(7) $p \lor p \lor \neg r$

Vrai

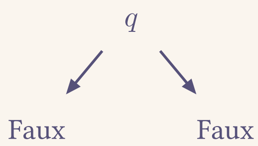
(8) $((s \to (p \lor p \lor \top)) \lor r) \to (\neg\neg t \land q)$



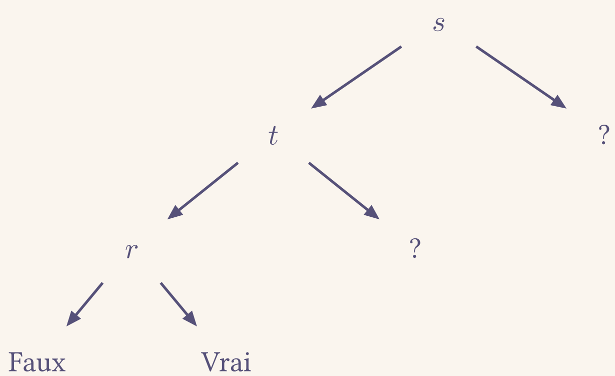
(9) $\neg((t \land p) \to r)$



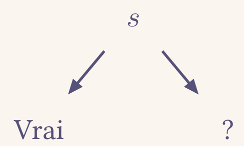
(10) $\neg(q \to (\top \lor (q \land s)))$



(11) $s \lor (\bot \land t \land ((\top \lor \neg\bot) \land \bot)) \lor r \lor \bot$



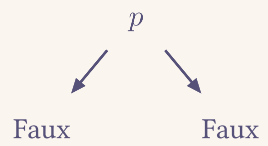
(12) $(s \to r) \lor p$



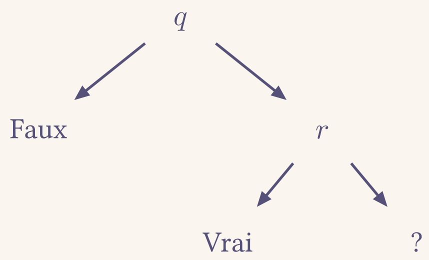
(13) $(s \vee q \vee q \vee (r \to \neg q)) \wedge \bot$

Faux

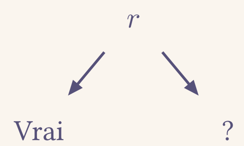
(14) $(p \vee \neg p) \to \bot$



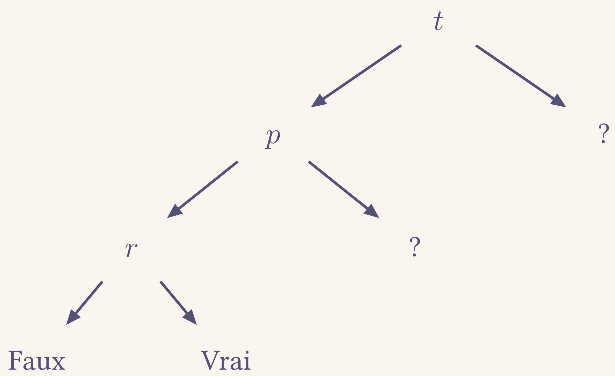
(15) $((q \to (r \wedge q)) \wedge \top) \to q$



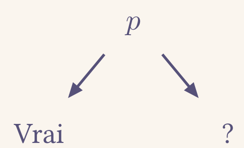
(16) $((r \to p) \wedge s \wedge r) \to (t \to t)$



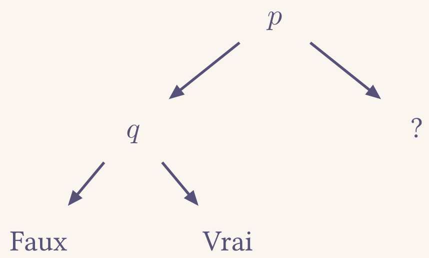
(17) $\bot \vee ((t \to p) \wedge r)$



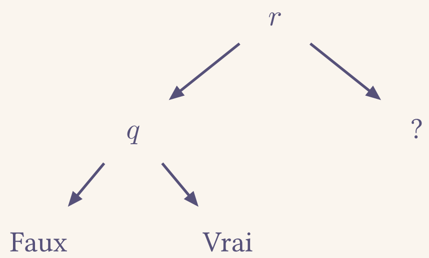
(18) $(p \wedge r) \vee \neg q \vee (p \to p)$



(19) $p \vee \neg\neg q$



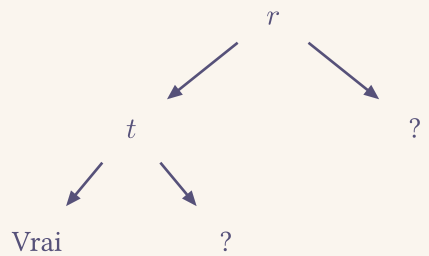
(20) $\neg r \land q \land (\top \lor r)$



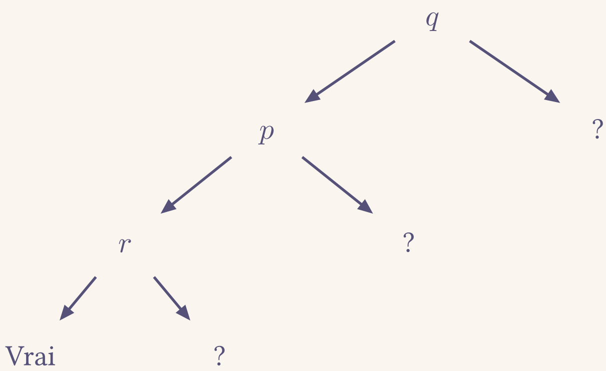
(21) $t \land \bot \land (\neg r \land (r \to p))$

Faux

(22) $t \lor t \lor (\top \land \neg t)$



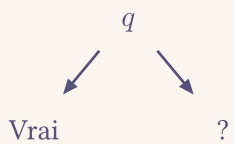
(23) $(q \to p) \to \neg(r \land (p \lor (t \land \top)))$



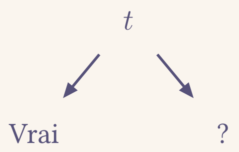
(24) $\neg r \land s \land r \land \bot$

Faux

(25) $\neg(q \land \bot \land q) \land ((\top \to q) \to \top)$



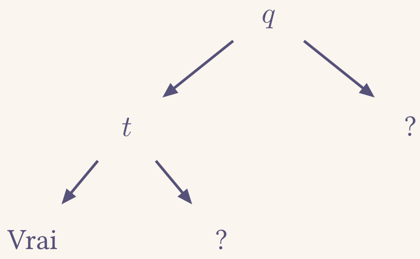
(26) $(t \to s) \lor r$



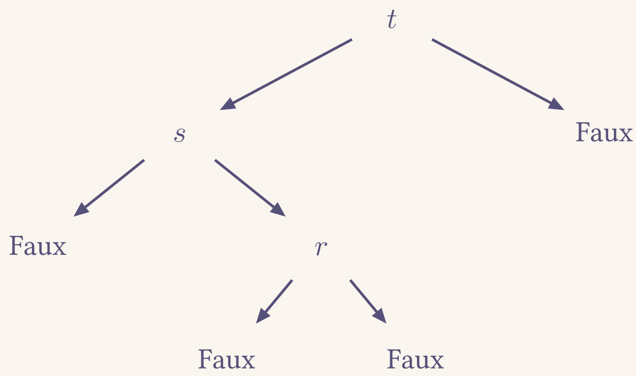
(27) $\neg((\bot \wedge t) \rightarrow q)$

Faux

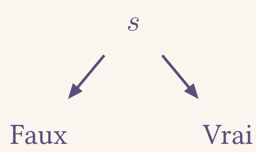
(28) $(\top \vee q) \rightarrow (t \rightarrow r)$



(29) $\neg(t \vee (s \rightarrow (r \rightarrow s)))$



(30) $s \vee \neg(\top \vee q)$



II.2. Langages réguliers et automates

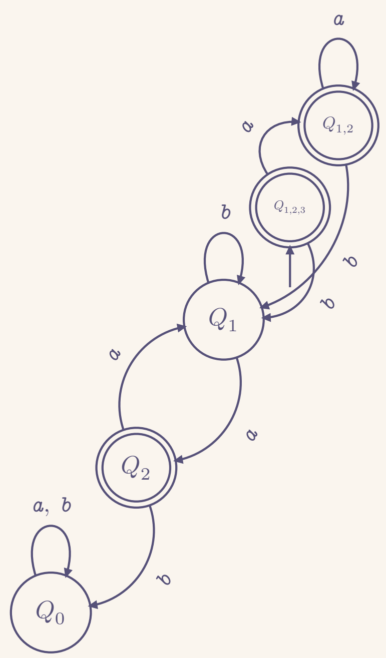
II.2.a. Déterminisation d'automates

Voir l'énoncé

On crée la table de transitions de l'automate, puis on en déduit un automate déterministe équivalent. Les automates produits sont parfois « emmêlés », surtout lorsqu'il y a beaucoup d'états : vous pouvez utiliser l'*Éditeur d'automates* pour le démêler, mais attention, l'éditeur simplifie automatiquement les automates après déterminisation (il fusionne les états similaires). Le programme de visualisation d'automates que j'utilise n'a pas réussi a trouver un agencement convenable pour les états.

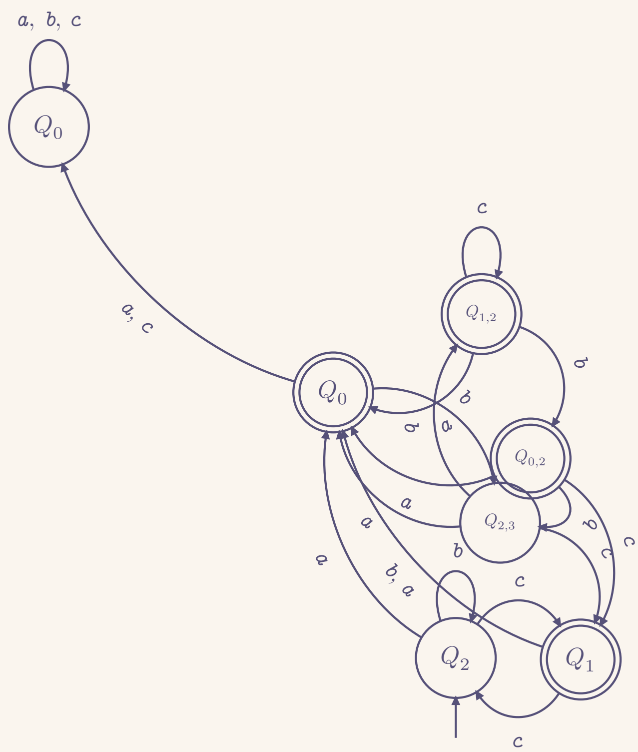
	a	b
q_0	q_3	q_3, q_1
q_1	q_2	q_1
q_2	q_1	/
q_3	/	/

Automate $\mathscr{A}_1$ $\rightarrow$



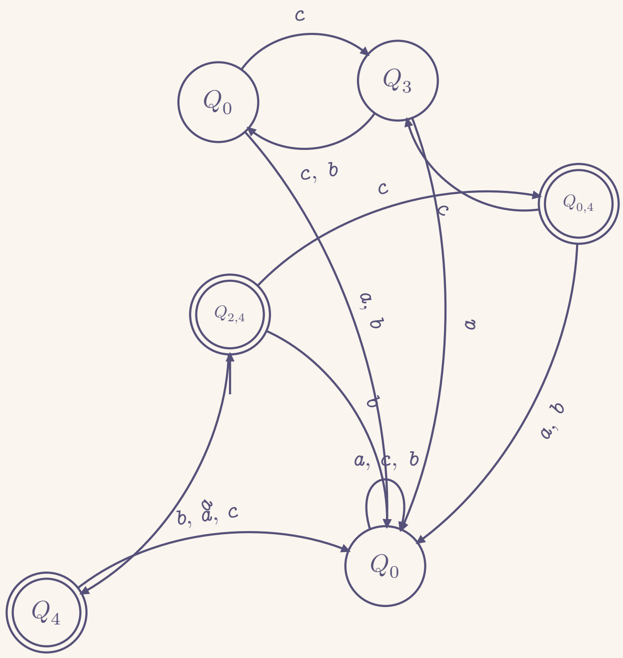
	a	b	c
q_0	/	q_2, q_3	/
q_1	q_0	q_0	q_2
q_2	q_0	q_2	q_1
q_3	/	q_1	/

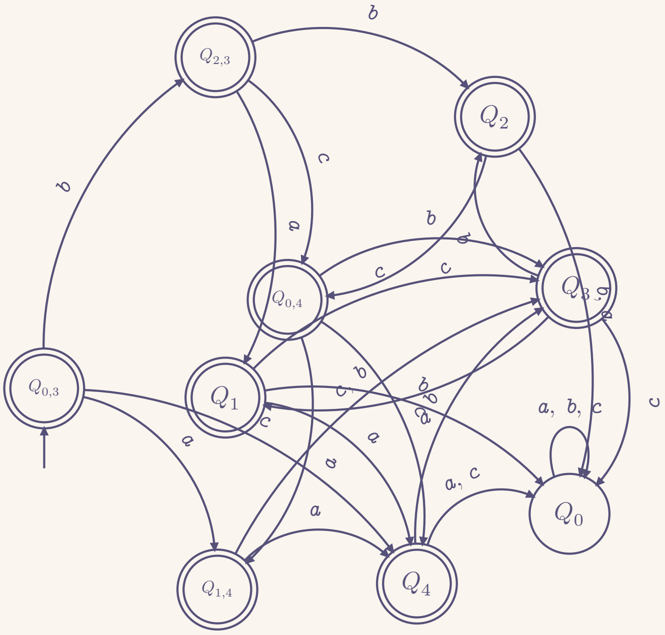
$\leftarrow$ Automate $\mathscr{A}_2$



	a	b	c
q_0	/	/	q_3
q_1	q_2, q_0	/	q_2
q_2	q_4	/	q_4, q_0
q_3	/	q_0	q_0
q_4	/	/	/

Automate $\mathscr{A}_3$ $\rightarrow$



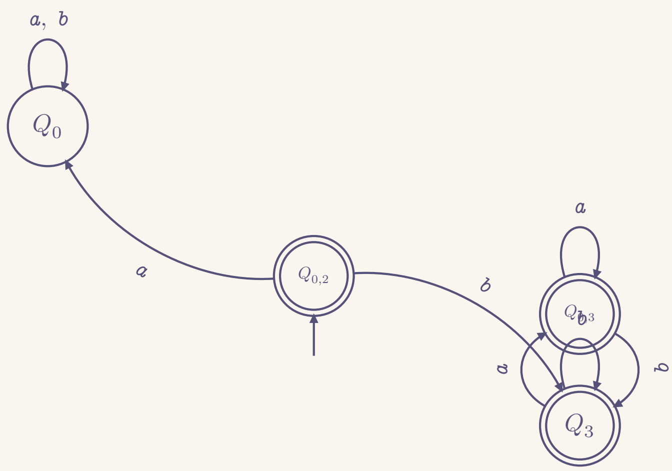


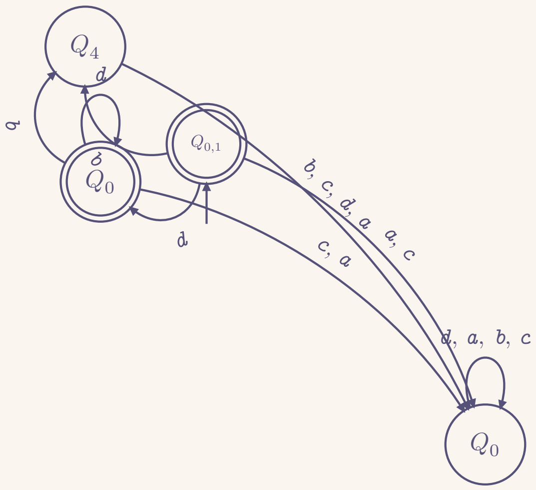
	a	b	c
q_0	q_4, q_1	q_3	q_4
q_1	q_4	/	q_3
q_2	/	/	q_4, q_0
q_3	q_1	q_2	/
q_4	/	q_3	/

$\leftarrow$ Automate $\mathscr{A}_4$

	a	b
q_0	/	/
q_1	q_1	q_3, q_0
q_2	/	q_3
q_3	q_3, q_0	q_3

Automate $\mathscr{A}_5$ $\rightarrow$

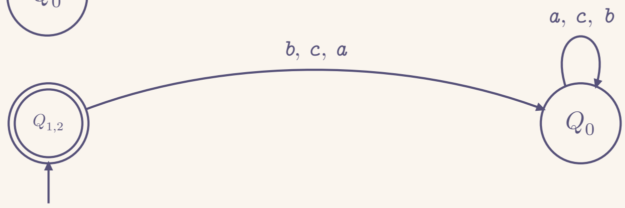




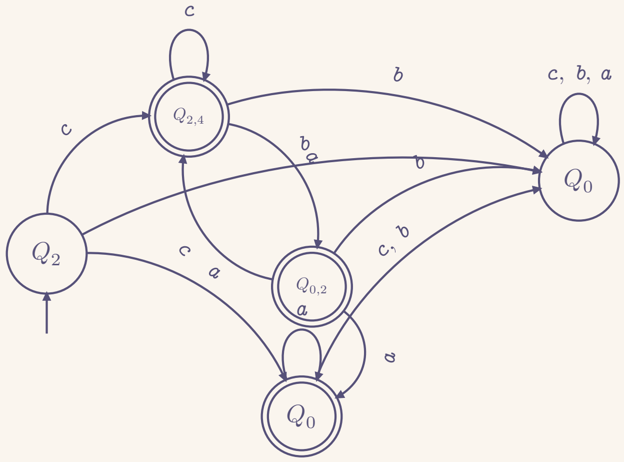
	a	b	c	d
q_0	/	q_4	/	q_0
q_1	/	/	/	/
q_2	q_1, q_4	/	q_3	q_1
q_3	/	q_1	/	/
q_4	/	/	/	/

← Automate $\mathscr{A}_6$

	a	b	c
q_0	q_2	q_1	q_3, q_0
q_1	/	/	/
q_2	/	/	/
q_3	/	/	q_3



Automate $\mathscr{A}_7$ →

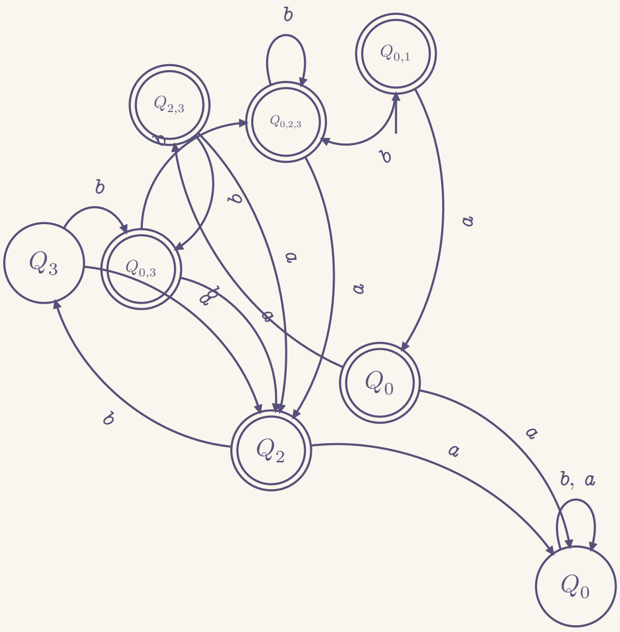


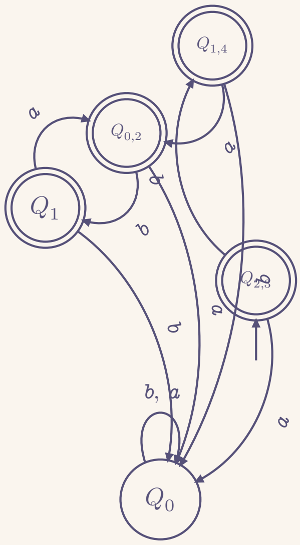
	a	b	c
q_0	q_0	/	/
q_1	/	/	q_0
q_2	q_0	/	q_4, q_2
q_3	/	q_3, q_1	q_2
q_4	q_2	/	/

← Automate $\mathscr{A}_8$

	a	b
q_0	/	q_3, q_2
q_1	q_0	q_0
q_2	/	q_3
q_3	q_2	q_3, q_0

Automate $\mathscr{A}_9$ $\rightarrow$



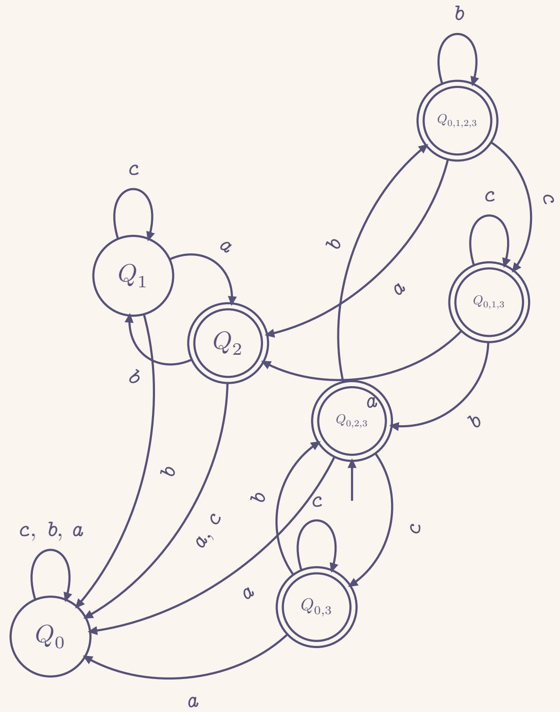


	a	b
q_0	/	/
q_1	q_0, q_2	/
q_2	/	q_1
q_3	/	q_4, q_1
q_4	/	/

$\leftarrow$ Automate $\mathscr{A}_{10}$

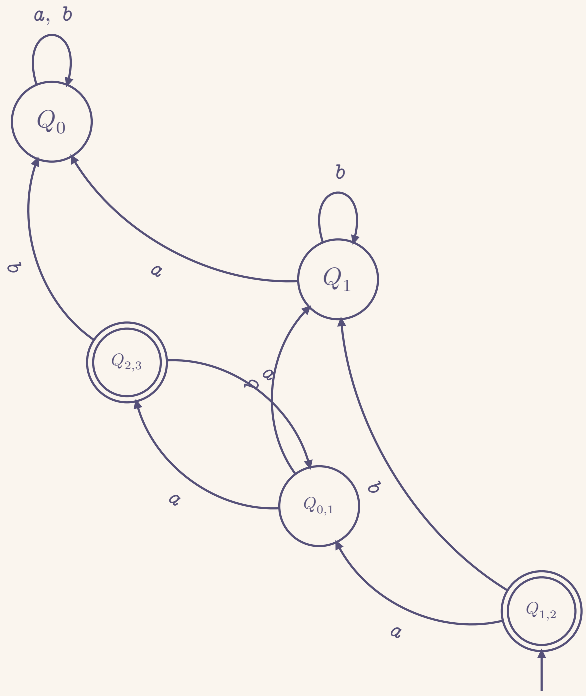
	a	b	c
q_0	/	q_0, q_3, q_2	q_3
q_1	q_2	/	q_1
q_2	/	q_1	/
q_3	/	/	q_0

Automate $\mathscr{A}_{11}$ $\rightarrow$



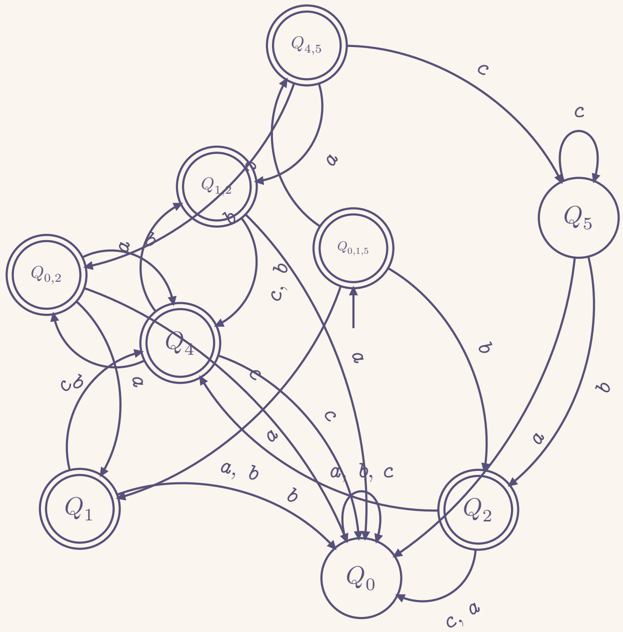
	a	b
q_0	q_3, q_2	/
q_1	/	q_1
q_2	q_0, q_1	/
q_3	/	/

$\leftarrow$ Automate $\mathscr{A}_{12}$



	a	b	c
q_0	q_1	/	/
q_1	/	/	q_4
q_2	/	q_4	/
q_3	/	/	q_1, q_0
q_4	q_1, q_2	q_0, q_2	/
q_5	/	q_2	q_5

Automate $\mathscr{A}_{13}$ $\rightarrow$



II.2.b. Suppression d'ε-transitions

Voir l'énoncé

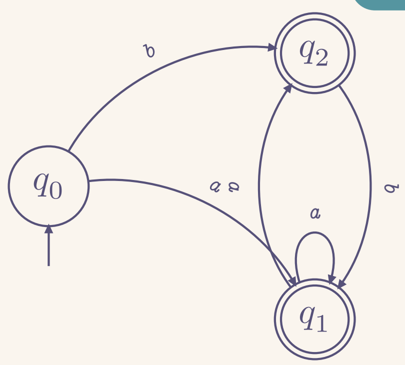
II.2.c. Algorithme d'élimination d'états

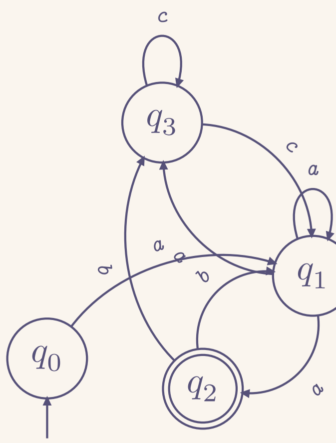
Voir l'énoncé

II.2.d. Algorithme de Berry-Sethi

Voir l'énoncé

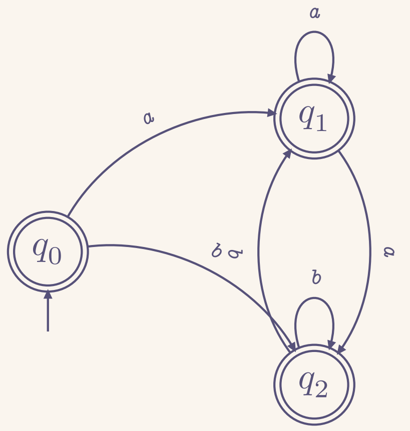
e_1	$\Lambda(e_1)$	$P(e_1)$	$S(e_1)$	$F(e_1)$
a	$\emptyset$	a	a	$\emptyset$
$a^\star$	ε	a	a	aa
b	$\emptyset$	b	b	$\emptyset$
$b \mid a$	$\emptyset$	a, b	a, b	$\emptyset$
$(b \mid a)a^\star$	$\emptyset$	a, b	a, b	aa, ab
$a^\star(b \mid a)a^\star$	$\emptyset$	a, b	a, b	aa, ba, ab

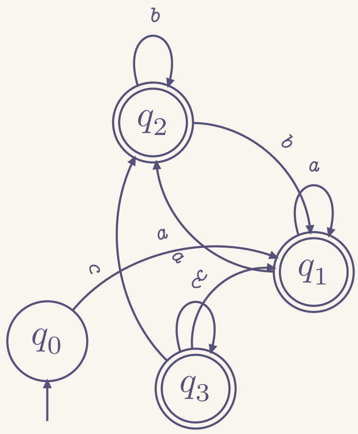




e_2	$\Lambda(e_2)$	$P(e_2)$	$S(e_2)$	$F(e_2)$
b	$\emptyset$	b	b	$\emptyset$
a	$\emptyset$	a	a	$\emptyset$
ab	$\emptyset$	a	b	ba
c	$\emptyset$	c	c	$\emptyset$
$c^\star$	ε	c	c	cc
$c^\star ab$	$\emptyset$	a, c	b	ac, ba, cc
ba	$\emptyset$	b	a	ab
$(ba) \mid c$	$\emptyset$	c, b	c, a	ab
$((ba) \mid c)^\star$	ε	c, b	c, a	cc, ca, bc, ba, ab
$((ba) \mid c)^\star c^\star ab$	$\emptyset$	a, c, b	b	$ac, aa, cc, ca, ba, bc, ab$
$a((ba) \mid c)^\star c^\star ab$	$\emptyset$	a	b	$aa, ca, ba, ac, cc, bc, ab$

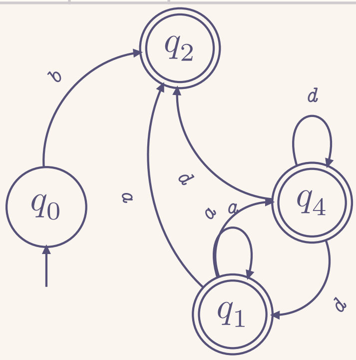
e_3	$\Lambda(e_3)$	$P(e_3)$	$S(e_3)$	$F(e_3)$
b	$\emptyset$	b	b	$\emptyset$
a	$\emptyset$	a	a	$\emptyset$
$a \mid b$	$\emptyset$	b, a	b, a	$\emptyset$
$(a \mid b)^\star$	ε	b, a	b, a	bb, ba, ab, aa
ε	ε	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
ba	$\emptyset$	b	a	ab
$(ba) \mid \varepsilon$	ε	b	a	ab
$((ba) \mid \varepsilon)^\star$	ε	b	a	ba, ab
$((ba) \mid \varepsilon)^\star(a \mid b)^\star$	ε	b, a	a, b	ba, aa, bb, ab

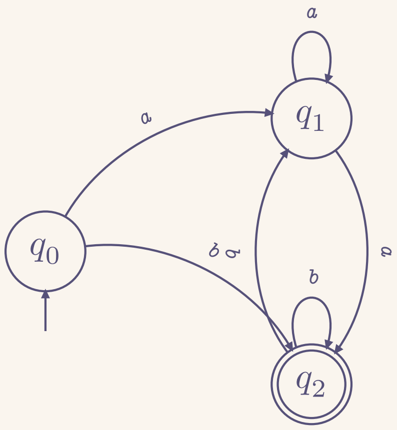




e_4	$\Lambda(e_4)$	$P(e_4)$	$S(e_4)$	$F(e_4)$
ε	ε	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
c	$\emptyset$	c	c	$\emptyset$
$c \mid \varepsilon$	ε	c	c	$\emptyset$
$(c \mid \varepsilon)^\star$	ε	c	c	cc
a	$\emptyset$	a	a	$\emptyset$
$a^\star$	ε	a	a	aa
b	$\emptyset$	b	b	$\emptyset$
$b^\star$	ε	b	b	bb
$a^\star b^\star$	ε	b, a	a, b	ba, bb, aa
$ba^\star b^\star$	$\emptyset$	b	b, a	bb, ab, ba, aa
$(ba^\star b^\star) \mid a^\star$	ε	a, b	a, b	aa, bb, ab, ba
$((ba^\star b^\star) \mid a^\star)(c \mid \varepsilon)^\star$	ε	c, a, b	a, b, c	$ca, cb, cc, aa, bb, ab, ba$
$b((ba^\star b^\star) \mid a^\star)(c \mid \varepsilon)^\star$	$\emptyset$	b	b, a, c	$cb, ab, bb, ca, cc, aa, ba$
$ab((ba^\star b^\star) \mid a^\star)(c \mid \varepsilon)^\star$	$\emptyset$	a	b, a, c	$ba, cb, ab, bb, ca, cc, aa$
$aab((ba^\star b^\star) \mid a^\star)(c \mid \varepsilon)^\star$	$\emptyset$	a	b, a, c	$aa, ba, cb, ab, bb, ca, cc$

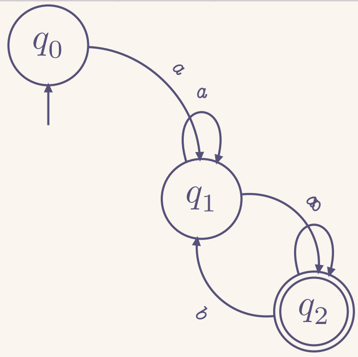
e_5	$\Lambda(e_5)$	$P(e_5)$	$S(e_5)$	$F(e_5)$
a	$\emptyset$	a	a	$\emptyset$
$a^\star$	ε	a	a	aa
ε	ε	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
d	$\emptyset$	d	d	$\emptyset$
$d \mid \varepsilon$	ε	d	d	$\emptyset$
$(d \mid \varepsilon)^\star$	ε	d	d	dd
$(d \mid \varepsilon)^\star a^\star$	ε	a, d	d, a	ad, aa, dd
$(d \mid \varepsilon)^\star(d \mid \varepsilon)^\star a^\star$	ε	a, d	d, a	ad, dd, aa
$a^\star(d \mid \varepsilon)^\star(d \mid \varepsilon)^\star a^\star$	ε	a, d	a, d	aa, da, ad, dd
b	$\emptyset$	b	b	$\emptyset$
$ba^\star(d \mid \varepsilon)^\star(d \mid \varepsilon)^\star a^\star$	$\emptyset$	b	b, a, d	ab, db, aa, da, ad, dd

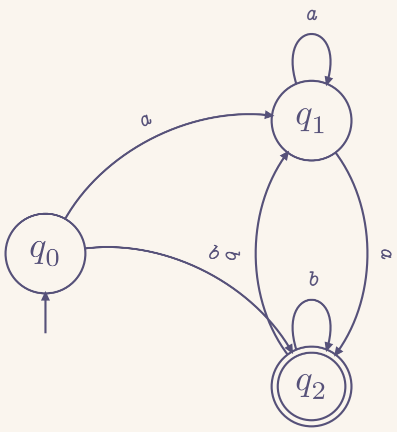




e_6	$\Lambda(e_6)$	$P(e_6)$	$S(e_6)$	$F(e_6)$
b	$\emptyset$	b	b	$\emptyset$
a	$\emptyset$	a	a	$\emptyset$
$a^\star$	ε	a	a	$a\,a$
$a^\star\,b$	$\emptyset$	b, a	b	ba, $a\,a$
$ba^\star\,b$	$\emptyset$	b	b	$b\,b$, $a\,b$, ba, $a\,a$
$b^\star$	ε	b	b	$b\,b$
$b^\star\,ba^\star\,b$	$\emptyset$	b	b	$b\,b$, $a\,b$, ba, $a\,a$
$a^\star\,b^\star\,ba^\star\,b$	$\emptyset$	b, a	b	ba, $b\,b$, $a\,b$, $a\,a$

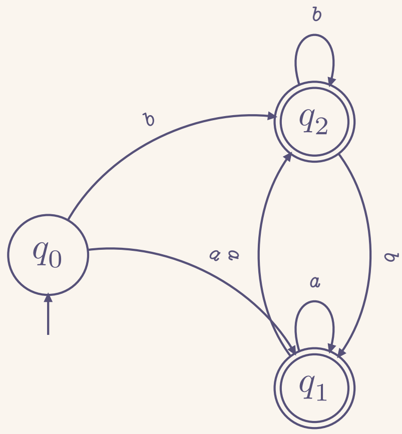
e_7	$\Lambda(e_7)$	$P(e_7)$	$S(e_7)$	$F(e_7)$
b	$\emptyset$	b	b	$\emptyset$
a	$\emptyset$	a	a	$\emptyset$
$a\,a$	$\emptyset$	a	a	$a\,a$
$b \mid (a\,a)$	$\emptyset$	a, b	a, b	$a\,a$
$(b \mid (a\,a))^\star$	ε	a, b	a, b	$a\,a$, $a\,b$, ba, $b\,b$
$(b \mid (a\,a))^\star\,b$	$\emptyset$	b, a	b	ba, $b\,b$, $a\,a$, $a\,b$
$a(b \mid (a\,a))^\star\,b$	$\emptyset$	a	b	ba, $a\,a$, $b\,b$, $a\,b$

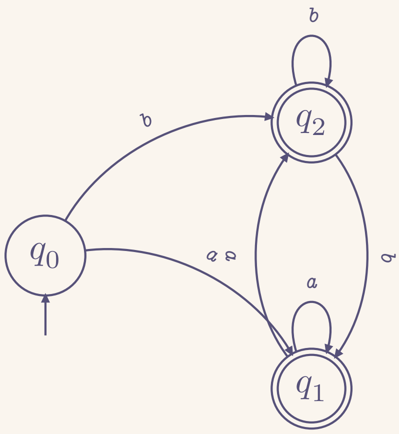




e_8	$\Lambda(e_8)$	$P(e_8)$	$S(e_8)$	$F(e_8)$
b	$\emptyset$	b	b	$\emptyset$
$b^\star$	ε	b	b	$b\,b$
$b^\star\,b$	$\emptyset$	b	b	$b\,b$
a	$\emptyset$	a	a	$\emptyset$
$a\,b^\star\,b$	$\emptyset$	a	b	ba, $b\,b$
$b\,b$	$\emptyset$	b	b	$b\,b$
ba	$\emptyset$	b	a	$a\,b$
$(ba) \mid (b\,b)$	$\emptyset$	b	b, a	$b\,b$, $a\,b$
$((ba) \mid (b\,b))^\star$	ε	b	b, a	$b\,b$, ba, $a\,b$
$((ba) \mid (b\,b))^\star\,a\,b^\star\,b$	$\emptyset$	a, b	b	$a\,b$, $a\,a$, ba, $b\,b$

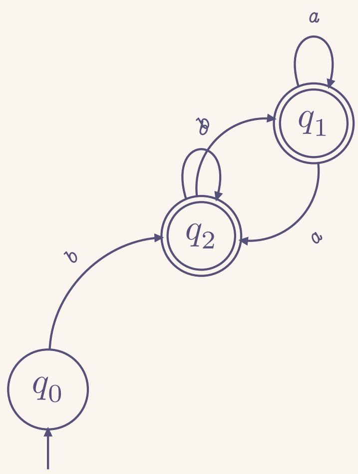
e_9	$\Lambda(e_9)$	$P(e_9)$	$S(e_9)$	$F(e_9)$
a	$\emptyset$	a	a	$\emptyset$
$a^\star$	ε	a	a	$a\,a$
b	$\emptyset$	b	b	$\emptyset$
$b a^\star$	$\emptyset$	b	$b,\ a$	$a\,b,\ a\,a$
$a\,b a^\star$	$\emptyset$	a	$b,\ a$	$b a,\ a\,b,\ a\,a$
ε	ε	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\varepsilon \mid b$	ε	b	b	$\emptyset$
$(\varepsilon \mid b)^\star$	ε	b	b	$b\,b$
$(\varepsilon \mid b)^\star\, a\, b a^\star$	$\emptyset$	$a,\ b$	$b,\ a$	$a\,b,\ b a,\ a\,a,\ b\,b$

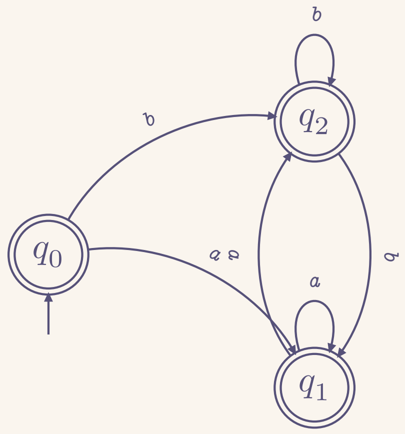




e_{10}	$\Lambda(e_{10})$	$P(e_{10})$	$S(e_{10})$	$F(e_{10})$
ε	ε	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
a	$\emptyset$	a	a	$\emptyset$
$a \mid \varepsilon$	ε	a	a	$\emptyset$
$(a \mid \varepsilon)^\star$	ε	a	a	$a\,a$
b	$\emptyset$	b	b	$\emptyset$
$b^\star$	ε	b	b	$b\,b$
$b^\star (a \mid \varepsilon)^\star$	ε	$a,\ b$	$b,\ a$	$a\,b,\ a\,a,\ b\,b$
$b\,b^\star (a \mid \varepsilon)^\star$	$\emptyset$	b	$b,\ a$	$a\,b,\ b\,b,\ a\,a$
$b^\star\, b\,b^\star (a \mid \varepsilon)^\star$	$\emptyset$	b	$b,\ a$	$b\,b,\ a\,b,\ a\,a$
$a^\star$	ε	a	a	$a\,a$
$a^\star\, b^\star\, b\,b^\star (a \mid \varepsilon)^\star$	$\emptyset$	$b,\ a$	$b,\ a$	$b a,\ b\,b,\ a\,b,\ a\,a$

e_{11}	$\Lambda(e_{11})$	$P(e_{11})$	$S(e_{11})$	$F(e_{11})$
b	$\emptyset$	b	b	$\emptyset$
a	$\emptyset$	a	a	$\emptyset$
$a \mid b$	$\emptyset$	$b,\ a$	$b,\ a$	$\emptyset$
$(a \mid b)^\star$	ε	$b,\ a$	$b,\ a$	$b\,b,\ b a,\ a\,b,\ a\,a$
$b^\star$	ε	b	b	$b\,b$
$b^\star (a \mid b)^\star$	ε	$b,\ a$	$b,\ a$	$b\,b,\ a\,b,\ b a,\ a\,a$
$a\,b^\star (a \mid b)^\star$	$\emptyset$	a	$a,\ b$	$b a,\ a\,a,\ b\,b,\ a\,b$
$b a\,b^\star (a \mid b)^\star$	$\emptyset$	b	$a,\ b$	$a\,b,\ b a,\ a\,a,\ b\,b$
ε	ε	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
$b \mid \varepsilon$	ε	b	b	$\emptyset$
$(b \mid \varepsilon)^\star$	ε	b	b	$b\,b$
$(b \mid \varepsilon)^\star\, b a\, b^\star (a \mid b)^\star$	$\emptyset$	b	$a,\ b$	$b\,b,\ a\,b,\ b a,\ a\,a$





e_{12}	$\Lambda(e_{12})$	$P(e_{12})$	$S(e_{12})$	$F(e_{12})$
a	$\emptyset$	a	a	$\emptyset$
$a^\star$	ε	a	a	aa
b	$\emptyset$	b	b	$\emptyset$
$b^\star$	ε	b	b	bb
$a\,b^\star$	$\emptyset$	a	$a,\ b$	$ba,\ bb$
$b^\star a\, b^\star$	$\emptyset$	$a,\ b$	$a,\ b$	$ab,\ ba,\ bb$
$(b^\star a\, b^\star)^\star$	ε	$a,\ b$	$a,\ b$	$aa,\ ab,\ ba,\ bb$
$(b^\star a\, b^\star)^\star a^\star$	ε	$a,\ b$	$a,\ b$	$aa,\ ab,\ ba,\ bb$

II.2.e. Automate local

Voir l'énoncé

II.2.f. Langages non réguliers

Voir l'énoncé

(1) $L = \{a^n\, b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

On utilise le lemme de l'étoile. Supposons L reconnu par un automate $\mathscr{A}$ déterministe à n états. On considère le mot $w = a^n\, b^n$, mot de taille supérieure à n. D'après le lemme de l'étoile, on décompose $w = xyz$ où $|x| < |xy| \leq n$, et $xy^pz \in L$, quel que soit $p \in \mathbb{N}$. De la condition $|xy| \leq p$, on sait donc que y contient uniquement des a, et alors $xyyz \notin L$, car on ajouterai des a. **Absurde !**

(2) $L = \{www \mid w \in \Sigma^\star\}$.

On utilise le lemme de l'étoile. Supposons L reconnu par un automate $\mathscr{A}$ déterministe à n états. On considère le mot $s = a^n\, ba^n\, ba^n\, b$, mot de taille supérieure à n. D'après le lemme de l'étoile, on décompose $s = xyz$ où $|x| < |xy| \leq n$, et $xy^pz \in L$, quel que soit $p \in \mathbb{N}$. De la condition $|xy| \leq n$, on sait donc que y ne contient que des a, et donc $xz \notin L$, car on n'aurait pas le même nombre de a au début, à la fin et au milieu de xz. **Absurde !**

(3) $L = \{a^i\, b^j \mid i > j\}$.

On utilise le lemme de l'étoile. Supposons L reconnu par un automate $\mathscr{A}$ déterministe à n états. On considère le mot $s = a^{n+1}\, b^n$, mot de taille supérieure à n. D'après le lemme de l'étoile, on décompose $s = xyz$ où $|x| < |xy| \leq n$, et $xy^pz \in L$, quel que soit $p \in \mathbb{N}$. De l'inégalité $|xy| \leq n$, on sait que y ne contient que des a. Ainsi, xz contient moins de a que de b. En effet, le nombre de a diminue entre w et xz. Or, w contient un a de plus que de b. Ainsi, on en déduit que $xz \notin L$. **Absurde !**

(4) $L = \{ww \mid w \in \Sigma^\star\}$.

On utilise le lemme de l'étoile. Supposons L reconnu par un automate $\mathscr{A}$ déterministe à n états. On considère le mot $s = a^n\, ba^n\, b$, mot de taille supérieure à n. D'après le lemme de l'étoile, on décompose $s = xyz$ où $|x| < |xy| \leq n$, et $xy^pz \in L$, quel que soit $p \in \mathbb{N}$. De la condition $|xy| \leq n$, on sait donc que y ne contient que des a, et donc $xz \notin L$, car on n'aurait pas le même nombre de a au début et à la fin de xz. **Absurde !**

(5) $L = \{a^i\, b^j \mid i \neq j\}$.

On peut procéder par lemme de l'étoile, mais il y a plus simple : par réduction. Supposons L régulier. Ainsi, $L' = \mathscr{L}(a^\star\, b^\star) \setminus L$ est régulier, par différence de langages réguliers. Or, par calcul, on a que $L' = \{a^n\, b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$, qui n'est pas régulier. **Absurde !**

(6) $L = \{w \in \Sigma^\star \mid |w|_a = |w|_b\}$.

On peut procéder par lemme de l'étoile, mais il y a plus simple : par réduction. Supposons L régulier. Ainsi, $L' = \mathscr{L}(a^\star b^\star) \cap L$ est régulier, par intersection de langages réguliers. Or, par calcul, on a que $L' = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$, qui n'est pas régulier. **Absurde !**

(7) $L = \{a^n \mid \sqrt{n} \in \mathbb{N}\}$.

Utilisons le lemme de l'étoile. Supposons L reconnu par un automate $\mathscr{A}$ à n états. Considérons le mot $w = a^{n^2}$, de taille supérieure à n. D'après le lemme de l'étoile, décomposons w comme $w = xyz$, avec $|x| < |xy| \leq n$, et $xy^p z \in L$, quel que soit $p \in \mathbb{N}$. Nous savons que $|y| \neq 0$, ce qui permet d'en déduire $|xyz| < |xyyz|$. Or, $|xyz| = n^2$ par hypothèse sur w, et $|xyyz| \leq n^2 + n$ l'inégalité $|y| \leq |xy| \leq n$. Mais, $n^2 < n^2 + n < n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$, et donc $\sqrt{|xyyz|} \notin \mathbb{N}$, d'où $xyyz \notin L$. **Absurde !**

(8) $L = \{a^n \mid \log_2 n \in \mathbb{N}\}$.

Dans la preuve, on utilise l'inégalité $2^n < n$. Cette inégalité est vraie par convexité de la fonction $x \mapsto 2^x$. En effet, en 0, on obtient l'inégalité $2^x \geq x + 1 > x$.

Utilisons le lemme de l'étoile. Supposons L reconnu par un automate $\mathscr{A}$ à n états. On pose $m = 2^n > n$. Considérons le mot $w = a^m$, de taille supérieure à n. D'après le lemme de l'étoile, décomposons w comme $w = xyz$, avec $|x| < |xy| \leq n$, et $xy^p z \in L$, quel que soit $p \in \mathbb{N}$. Nous savons que $|y| \neq 0$, ce qui permet d'en déduire $|xyz| < |xyyz|$. Or, $|xyz| = 2^n$ par hypothèse sur w, et $|xyyz| \leq 2^n + n$ l'inégalité $|y| \leq |xy| \leq n$. Mais, $2^n < 2^n + n < 2^n + 2^n = 2^{n+1}$, et donc $\log_2 |xyyz| \notin \mathbb{N}$, d'où $xyyz \notin L$. **Absurde !**

(9) $L = \{a^n \mid n \text{ premier}\}$.

Utilisons le lemme de l'étoile. Supposons L reconnu par un automate $\mathscr{A}$ à n états. Soit m un nombre premier supérieur ou égal à n. Considérons le mot $w = a^m$, de taille supérieure à n. D'après le lemme de l'étoile, décomposons w comme $w = xyz$, avec $|x| < |xy| \leq n$, et $xy^p z \in L$, quel que soit $p \in \mathbb{N}$. Posons $p = n + 1$. Ainsi, on a

$$|xy^p z| = n + (p-1) \cdot |y| = n + n\ |y| = n(1 + |y|),$$

qui n'est pas un nombre premier, et donc $xy^p z \notin L$. **Absurde !**

II.2.g. Clôture des langages réguliers

Voir l'énoncé