

TD Notations n°2

Couplages**I. Couplages généraux.**

Soit $G = (S, A)$ un graphe non orienté. On nomme S l'ensemble des sommets et A l'ensemble des arêtes. L'ensemble A est formé de sous-ensembles de taille $2^{[1]}$ $\{x, y\}$, représentant l'arête $x - y$. Pour une partie $A' \subseteq A$, on notera $\sigma(A') = \bigcup_{a \in A'} a$.

On supposera que G est *sans point isolé* : $\sigma(A) \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{a \in A} a = S$.

I.1. Recouvrement par sommets.

Définition. Un *stable* de G est une partie S' de S ne contenant aucune paire de sommets adjacents :

$$\forall a \in A, \quad \text{card}(a \cap S') \leq 1.$$

Le cardinal maximum d'un stable de G est noté $\alpha(G)$.

Définition. Un *transversal* de G est une partie T de S contenant un sommet adjacent à toute arête :

$$\forall a \in A, \quad \text{card}(a \cap T) \geq 1.$$

Le cardinal minimum d'un transversal de G est noté $\beta(G)$.

Q1. Démontrer les assertions suivantes :

- (1) S' est un stable ssi $S \setminus S'$ est un transversal ;
- (2) $\alpha(G) + \beta(G) = \text{card}(S)$.

RÉPONSE. On note $\bar{S}' = S \setminus S'$ et $n = \text{card } S$.

(1) Nous avons, par union disjointe, $\text{card}(a \cap S') + \text{card}(a \cap \bar{S}') = \text{card}(a \cap S) = \text{card}(a) = 2$, d'où l'équivalence $(\forall a \in A, \text{card}(a \cap S') \leq 1) \iff (\forall a \in A, \text{card}(a \cap \bar{S}') \geq 1)$.

(2) Si S' est un stable de cardinal maximal (qui vaut $\alpha(G)$), alors \bar{S}' est un transversal, on a donc l'inégalité $\beta(G) \leq \text{card}(\bar{S}') = n - \text{card}(S') = n - \alpha(G)$.

Si T est un transversal de cardinal maximal (qui vaut $\beta(G)$), alors \bar{T} est un stable, on a donc l'inégalité $\alpha(G) \geq \text{card}(\bar{T}) = n - \text{card } T = n - \beta(G)$.

On en conclut, par les deux inégalités, que

$$\alpha(G) + \beta(G) = n.$$

I.2. Recouvrement par arêtes.

Définition. Un *couplage* de G est une partie C de A ne contenant aucune paire d'arêtes adjacentes :

$$\forall a, a' \in C, \quad a \neq a' \implies a \cap a' = \emptyset$$

Le cardinal maximum d'un couplage de G est noté $\alpha'(G)$.

Définition. Un *recouvrement* de G est une partie R de A contenant une arête adjacente à tout sommet :

$$\sigma(R) = S.$$

Le cardinal minimum d'un recouvrement de G est noté $\beta'(G)$.

Q2. Prouver l'encadrement $2 \alpha'(G) \leq \text{card } S \leq 2 \beta'(G)$.

^[1]On accepte aussi que ce sous-ensemble soit de taille 1 pour représenter l'arête $x - x$ pour un sommet x . Dans ce TD, on ne se placera pas dans ce cas.

RÉPONSE. Pour un couplage C , les extrémités des arêtes sont distinctes donc $2 \text{card } C \leq n$. Pour un recouvrement R , tout sommet est l'une des deux extrémités des arêtes de R , donc $n \leq 2 \text{card } R$. Ces inégalités sont vérifiées quelque que soit le couplage C et quelque que soit le recouvrement R , elles sont donc vérifiées dans le cas d'un couplage de cardinal maximum et d'un recouvrement d'un cardinal minimum. On en conclut :

$$2 \alpha'(G) \leq \underbrace{\text{card } S}_n \leq 2 \beta'(G).$$

- Q3.** (1) Si C est un couplage de cardinal maximal, prouver que $S \setminus \sigma(C)$ est un stable.
 (2) Si R est un recouvrement de cardinal minimal, prouver que toute arête de R admet au moins un sommet qui n'est adjacent qu'à une seule arête de R .
 (3) Prouver l'encadrement $\alpha'(G) + \beta'(G) = \text{card } S$.

RÉPONSE.

- (1) Soit C un couplage. On procède par contraposée. Si $\overline{\sigma(C)}$ n'est pas un stable, il existe une arête a dont les extrémités sont dans $\overline{\sigma(C)}$, d'où $C \cup \{a\}$ est encore un couplage. Ainsi, C n'est pas de cardinal maximal.

En fait, on a démontré pour C maximal pour l'inclusion \subseteq , ce qui est bien plus général que la maximalité du cardinal.

- (2) Soit R un recouvrement. On procède par contraposée. S'il existe $a \in R$ dont les deux sommets sont adjacents à une autre arête de R , alors $R \setminus \{a\}$ est encore un recouvrement, donc R n'est pas de cardinal minimal.
 (3) Soit C un couplage de cardinal maximal. Les sommets du stable $S' = \overline{\sigma(C)}$ ne sont pas reliés par des arêtes mais ont chacun une arête adjacente car le graphe n'a pas de sommet isolé. Si on ajoute ces arêtes à C , on obtient un recouvrement R avec $\text{card } R = \text{card } C + \text{card } S'$. Or, les arêtes de C sont non adjacentes, donc $\text{card } \sigma(C) = 2 \text{card } C$, puis $\text{card } S' = n - 2 \text{card } \sigma(C) = n - 2 \text{card } C$. Ainsi, on obtient l'inégalité

$$\beta'(G) \leq \text{card } R = n - \text{card } C = n - \alpha'(G) \quad \text{d'où} \quad \alpha'(G) + \beta'(G) \leq \text{card } S$$

Soit R un recouvrement de cardinal minimal. Pour chaque arête de R , on choisit un sommet qui n'est adjacent qu'à cette arête. Il reste $n - \text{card } R$ sommets. On obtient un couplage en choisissant une arête de R , il peut y en avoir plusieurs, pour chacun de ces sommets restants. On a ainsi l'inégalité $\alpha'(G) \geq n - \text{card } R = n - \beta'(G)$, d'où $\alpha'(G) + \beta'(G) \geq \text{card } S$.

On en conclut, des deux inégalités,

$$\alpha'(G) + \beta'(G) = \text{card } S.$$

Définition. Un couplage est *parfait* s'il est en même temps un recouvrement.

- Q4.** Prouver que G admet un couplage parfait ssi $2 \alpha'(G) = \text{card } S = 2 \beta'(G)$.

RÉPONSE. Procédons en deux temps.

« \implies ». Si G admet un couplage parfait C , alors $\text{card } C \leq \alpha'(G)$, car C est un couplage. De plus, nous avons l'inégalité $\text{card } C \geq \beta'(G)$ car G est un recouvrement. On a donc $2\alpha'(G) \geq 2\beta'(G)$, et comme l'inégalité inverse est toujours vraie, on en déduit $\alpha'(G) = \beta'(G)$. Comme la somme est égale à n , la valeur commune est $n/2$.

« \impliedby ». Inversement, si $\alpha'(G) = n/2$ alors, pour un couplage C de cardinal maximal, les sommets couverts forment un ensemble de cardinal $2 \text{card } C = n$ et donc C est aussi un recouvrement, c'est donc un couplage parfait.

I.3. Augmentations.

On considère G un graphe muni d'un couplage C .

Définition. Un sommet est *couplé* s'il est une des extrémités de a , pour $a \in C$.

Définition. Une *chaîne alternée* relativement au couplage est une suite finie de sommets distincts (x_0, \dots, x_n) telle que :

- x_0 n'est pas couplé ;
- $\{x_{2k}, x_{2k+1}\}$ est une arête de G n'appartenant pas à C , pour tout $k \leq n \div 2$;
- $\{x_{2k-1}, x_{2k}\}$ appartient à C , pour tout $k \leq n \div 2$.

Une chaîne alternée est *augmentante* si, de plus, x_n n'est pas couplé.

Q5. Prouver que si un couplage C admet une chaîne alternée augmentante (x_0, \dots, x_p) alors p est impair et le couplage C n'est pas de cardinal maximum. On pourra utiliser l'indication ci-dessous.

RÉPONSE.

- Par l'absurde, si p était pair, alors p serait l'extrémité de l'arête $\{x_{p-1}, x_p\} \in C$, *absurde*.
- Posons $p = 2q + 1$. On remplace les q arêtes $\{x_1, x_2\}, \{x_3, x_4\}, \dots, \{x_{2q-1}, x_{2q}\}$ par les $q + 1$ arêtes $\{x_0, x_1\}, \{x_2, x_3\}, \dots, \{x_{2q}, x_{2q+1}\}$ dans C . Le résultat est toujours un couplage, dont le cardinal est supérieur de 1 à celui de C .

Définition. Si X et Y sont des ensembles, la *différence symétrique* de X et Y est :

$$X \triangle Y = (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X) = (X \cup Y) \setminus (X \cap Y).$$

Indication. Si C est un couplage et si (x_0, \dots, x_p) est une chaîne augmentante pour C la preuve de Q5 consiste à prouver que $C \triangle \Gamma$ est aussi un couplage, où

$$\Gamma = \{\{x_0, x_1\}, \{x_2, x_3\}, \dots, \{x_{p-1}, x_p\}\}.$$

Q6. Si C et C' sont deux couplages de G , avec $\text{card } C < \text{card } C'$, prouver que $C \triangle C'$ contient une chaîne augmentante pour C .

RÉPONSE. Dans C et dans C' , les arêtes n'ont pas de sommet en commun. Ainsi, dans $C \triangle C'$ un sommet ne peut être l'extrémité que de deux arêtes au plus (chaque sommet est de degré 2 au plus) et, dans le cas où deux arêtes ont un sommet en commun, l'une appartient à C et l'autre à C' . On en déduit que les composantes connexes de $C \triangle C'$ sont :

- soit des chemins simples^[2] alternant entre les arêtes de C et les arêtes de C' ;
- soit des cycles de longueur paire.

Les composantes connexes contiennent donc :

- soit autant d'arêtes de C et d'arêtes de C' , c'est le cas des cycles car ils sont d'ordre pair ; soit une arête de C de plus que le nombre d'arêtes de C' , c'est donc un chemin qui commence et finit par une arête de C : une chaîne alternée augmentante pour C' .
- soit une arête de C' de plus que le nombre d'arêtes de C , c'est donc un chemin qui commence et finit par une arête de C' : une chaîne alternée augmentante pour C .

Si on note $n = \text{card } C$ et $n' = \text{card } C'$ et $d = \text{card}(C \cap C')$, on a $n < n'$ et le nombre d'arêtes de C (resp. de C') dans $C \triangle C'$ est $n - d$ (resp. $n' - d$). Il y a donc plus d'arêtes de C' que d'arêtes de C dans $C \triangle C'$. D'après le décompte ci-dessus, on en déduit qu'il existe au moins $n' - n$ chaînes alternées augmentantes pour C dans $C \triangle C'$.

Q7. Prouver qu'un couplage C est de cardinal maximum ssi il n'admet pas de chaîne alternée augmentante.

RÉPONSE. On a déjà vu la contraposée du sens direct : si un couplage admet une chaîne alternée augmentante, alors il n'est pas de cardinal maximal. Inversement, si C est un couplage non maximal, il existe un couplage C' tel que $\text{card } C' > \text{card } C$ et la question précédente montre qu'il existe une chaîne alternée augmentante pour C dans $C \triangle C'$.

II. Couplages dans les graphes bipartis.

^[2]Ici, le « simple » signifie sans cycles.

Définition. Un graphe non orienté (S, A) est *biparti* si l'ensemble des sommets peut s'écrire sous la forme d'une union disjointe $S = U \cup V$ telle que toute arête ne peut joindre qu'un sommet de U à un sommet de V :

$$\forall a \in A, \quad \text{card}(a \cap U) = \text{card}(a \cap V) = 1.$$

Un graphe biparti est dit *équilibré* si $\text{card } U = \text{card } V$.

Comme les chaînes alternées relativement à un couplage C alternent aussi les sommets dans U et V , et qu'une chaîne alternée augmentante à un nombre pair de sommets, on en déduit que ses extrémités appartiennent l'une à U et l'autre à V . On ne considérera ici que les chaînes alternées augmentantes d'origine U et d'extrémité dans V :

$$x_0 - x_1 - x_2 - \cdots - x_{p-1} - x_p,$$

où

- p est impair,
- $x_i \in U$ pour i pair et $x_i \in V$ pour i impair,
- $\{x_i, x_{i+1}\} \notin C$ pour i pair et $\{x_i, x_{i+1}\} \in C$ pour i impair.

II.1. Dénombrements.

Soit C un couplage d'un graphe biparti $G = (U \cup V, A)$.

On considère U_0 l'ensemble, possiblement vide, des sommets de U qui ne sont pas une extrémité d'une arête de C , et Z l'ensemble des extrémités finales de chemins alternants commençant par un sommet de U_0 . On pose $T = (U \setminus (U_0 \cup Z)) \cup (V \cap Z)$.

Dans l'exemple de la figure ci-après (Figure 1), avec le couplage C indiqué en rouge, les ensembles U_0 , Z et T sont :

$$U_0 = \{u_2\}, \quad Z = \{u_1, v_2\} \quad \text{et} \quad T = \{u_0, v_2\}.$$

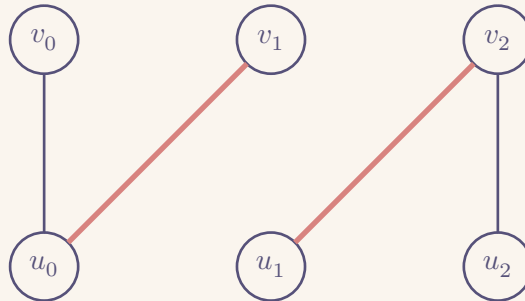


Figure 1. Exemple de couplage dans un graphe biparti

Q8. Montrer que T est transversal.

RÉPONSE. Si s appartient à Z , alors il y a un chemin de x_0 à s vérifiant :

$$x_0 - x_1 - x_2 - \cdots - x_{p-1} - x_p = s,$$

- $x_0 \in U_0$,
- $x_i \in U$ pour i pair et $x_i \in V$ pour i impair,
- $\{x_i, x_{i+1}\} \notin C$ pour i pair et $\{x_i, x_{i+1}\} \in C$ pour i impair.

Soit $a = \{u, v\}$ une arête du graphe. On a la disjonction de choix :

- soit $u \in U_0$ et donc $\{u, v\}$ n'est pas une arête du couplage et $v \in Z \cap V \subseteq T$;
- soit $u \in Z \cap U$ et donc $u = x_p$, avec p pair et $\{x_{p-1}, u\} \in C$ donc
 - soit $v = x_{p-1}$ d'où $v \in Z \cap V \subseteq T$;
 - soit $v \neq x_{p-1}$ donc $\{u, v\} \notin C$ d'où $v \in Z \cap V \subseteq T$;
- soit $u \in U \setminus (U_0 \cup Z) \subseteq T$.

Dans tous les cas, une extrémité de l'arête est dans T , d'où T est un transversal.

Q9. Montrer que, dans un graphe biparti, $\alpha'(G) = \beta(G)$.

RÉPONSE. Si T est un transversal, chaque arête d'un couplage a , au moins, une extrémité dans T et les extrémités des arêtes du couplage sont distinctes donc on peut définir une injection depuis l'ensemble des arêtes d'un couplage vers les sommets d'un transversal (en choisissant éventuellement une des deux extrémités). On a donc $\text{card } C \leq \text{card } T$, d'où $\alpha'(G) \leq \beta(G)$.

Pour un couplage maximal C , la question précédente construit un transversal T . Tout sommet $u \in T \cap U$ est l'extrémité d'une arête de C car $u \notin U_0$. Tout sommet $v \in T \cap V$ est l'extrémité d'un chemin alternant commençant par un sommet de U_0 . S'il n'existait pas d'arête de C passant par v , le chemin alternant serait augmentant, ce qui n'est pas possible car C est maximal. Ainsi, v est l'extrémité d'une arête de C . Comme il ne peut exister qu'une arête de C passant par un sommet, le raisonnement ci-dessus définit une application de T vers C . Si deux sommets distincts étaient associés à une même arête de C , on aurait alors $\{u, v\} \in C$ avec $u \in T$ et $v \in T$. Comme $v \in T \cap V = Z \cap V$, il serait l'extrémité d'un chemin alternant commençant par un sommet de U_0 donc u appartiendrait aussi à Z , ce qui est impossible car $u \in T \cap U = U \setminus (U_0 \cup Z)$. On a donc une injection de T dans C , d'où $\text{card } T \leq \text{card } C$ ce qui permet d'avoir $\beta(G) \leq \alpha'(G)$.

On en déduit $\alpha'(G) = \beta(G)$.

On note $\Gamma(X)$ l'ensemble des sommets adjacents à $X \subseteq S$.

Q10. Montrer qu'un graphe biparti G admet un couplage parfait ssi $\text{card } \Gamma(X) \geq \text{card } X$ pour tout $X \subseteq U$.
On supposera G équilibré.

RÉPONSE. Soit $G = (U \cup V, A)$, où $\text{card } U = \text{card } V = n$. Procédons en deux temps.

« \implies ». Si G admet un couplage de cardinal n , celui-ci définit une bijection φ de U vers V donc, pour tout ensemble $X \subseteq U$, on a l'inclusion $\Gamma(X) \supseteq \varphi(X)$ et donc $\text{card } \Gamma(X) \geq \text{card } \varphi(X) = \text{card } X$.

« \impliedby ». Soit p le cardinal maximal d'un couplage. On a $p \leq n$. D'après le théorème de König (Q9), p est le cardinal (minimal) d'un transversal T . On note $T_1 = T \cap U$ et $T_2 = T \cap V$. Comme T est un transversal, toute arête du graphe a une extrémité dans T_1 ou dans T_2 , donc il n'y a aucune arête allant de $U \setminus T_1$ vers $V \setminus T_2$. On a donc $\Gamma(U \setminus T_1) \subseteq T_2$ et $\Gamma(V \setminus T_2) \subseteq T_1$. Par passage au cardinal, on trouve

$$\text{card } V - \text{card } T_2 = \text{card}(V \setminus T_2) \leq \text{card } \Gamma(V \setminus T_2) \leq \text{card } T_1,$$

d'où $n \geq \text{card } T_1 + \text{card } T_2 = p$. Ainsi $p = n$ et le couplage est parfait.

Parmi les questions de ce TD se cachent des théorèmes :

- Q3 est le théorème de Gallai,
- Q7 est le théorème de Berge,
- Q9 est le théorème de König,
- Q10 est le théorème de Hall.