

## TD Notations n°2

Couplages**I. Couplages généraux.**

Soit  $G = (S, A)$  un graphe non orienté. On nomme  $S$  l'ensemble des sommets et  $A$  l'ensemble des arêtes. L'ensemble  $A$  est formé de sous-ensembles de taille 2<sup>[1]</sup>  $\{x, y\}$ , représentant l'arête  $x - y$ . Pour une partie  $A' \subseteq A$ , on notera  $\sigma(A') = \bigcup_{a \in A'} a$ .

On supposera que  $G$  est *sans point isolé* :  $\sigma(A) \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{a \in A} a = S$ .

**I.1. Recouvrement par sommets.**

**Définition.** Un *stable* de  $G$  est une partie  $S'$  de  $S$  ne contenant aucune paire de sommets adjacents :

$$\forall a \in A, \quad \text{card}(a \cap S') \leq 1.$$

Le cardinal maximum d'un stable de  $G$  est noté  $\alpha(G)$ .

**Définition.** Un *transversal* de  $G$  est une partie  $T$  de  $S$  contenant un sommet adjacent à toute arête :

$$\forall a \in A, \quad \text{card}(a \cap T) \geq 1.$$

Le cardinal minimum d'un transversal de  $G$  est noté  $\beta(G)$ .

**Q1.** Démontrer les assertions suivantes :

- (1)  $S'$  est un stable ssi  $S \setminus S'$  est un transversal ;
- (2)  $\alpha(G) + \beta(G) = \text{card}(S)$ .

**I.2. Recouvrement par arêtes.**

**Définition.** Un *couplage* de  $G$  est une partie  $C$  de  $A$  ne contenant aucune paire d'arêtes adjacentes :

$$\forall a, a' \in C, \quad a \neq a' \implies a \cap a' = \emptyset$$

Le cardinal maximum d'un couplage de  $G$  est noté  $\alpha'(G)$ .

**Définition.** Un *recouvrement* de  $G$  est une partie  $R$  de  $A$  contenant une arête adjacente à tout sommet :

$$\sigma(R) = S.$$

Le cardinal minimum d'un recouvrement de  $G$  est noté  $\beta'(G)$ .

**Q2.** Prouver l'encadrement  $2 \alpha'(G) \leq \text{card } S \leq 2 \beta'(G)$ .

**Q3.** (1) Si  $C$  est un couplage de cardinal maximal, prouver que  $S \setminus \sigma(C)$  est un stable.

(2) Si  $R$  est un recouvrement de cardinal minimal, prouver que toute arête de  $R$  admet au moins un sommet qui n'est adjacent qu'à une seule arête de  $R$ .

(3) Prouver l'encadrement  $\alpha'(G) + \beta'(G) = \text{card } S$ .

**Définition.** Un couplage est *parfait* s'il est en même temps un recouvrement.

**Q4.** Prouver que  $G$  admet un couplage parfait ssi  $2 \alpha'(G) = \text{card } S = 2 \beta'(G)$ .

**I.3. Augmentations.**

On considère  $G$  un graphe muni d'un couplage  $C$ .

<sup>[1]</sup>On accepte aussi que ce sous-ensemble soit de taille 1 pour représenter l'arête  $x - x$  pour un sommet  $x$ . Dans ce TD, on ne se placera pas dans ce cas.

**Définition.** Un sommet est *couplé* s'il est une des extrémités de  $a$ , pour  $a \in C$ .

**Définition.** Une *chaîne alternée* relativement au couplage est une suite finie de sommets distincts  $(x_0, \dots, x_n)$  telle que :

- $x_0$  n'est pas couplé ;
- $\{x_{2k}, x_{2k+1}\}$  est une arête de  $G$  n'appartenant pas à  $C$ , pour tout  $k \leq n \div 2$  ;
- $\{x_{2k-1}, x_{2k}\}$  appartient à  $C$ , pour tout  $k \leq n \div 2$ .

Une chaîne alternée est *augmentante* si, de plus,  $x_n$  n'est pas couplé.

**Q5.** Prouver que si un couplage  $C$  admet une chaîne alternée augmentante  $(x_0, \dots, x_p)$  alors  $p$  est impair et le couplage  $C$  n'est pas de cardinal maximum. On pourra utiliser l'indication ci-dessous.

**Définition.** Si  $X$  et  $Y$  sont des ensembles, la *différence symétrique* de  $X$  et  $Y$  est :

$$X \triangle Y = (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X) = (X \cup Y) \setminus (X \cap Y).$$

**Indication.** Si  $C$  est un couplage et si  $(x_0, \dots, x_p)$  est une chaîne augmentante pour  $C$  la preuve de Q5 consiste à prouver que  $C \triangle \Gamma$  est aussi un couplage, où

$$\Gamma = \{\{x_0, x_1\}, \{x_2, x_3\}, \dots, \{x_{p-1}, x_p\}\}.$$

**Q6.** Si  $C$  et  $C'$  sont deux couplages de  $G$ , avec  $\text{card } C < \text{card } C'$ , prouver que  $C \triangle C'$  contient une chaîne augmentante pour  $C$ .

**Q7.** Prouver qu'un couplage  $C$  est de cardinal maximum ssi il n'admet pas de chaîne alternée augmentante.

## II. Couplages dans les graphes bipartis.

**Définition.** Un graphe non orienté  $(S, A)$  est *biparti* si l'ensemble des sommets peut s'écrire sous la forme d'une union disjointe  $S = U \cup V$  telle que toute arête ne peut joindre qu'un sommet de  $U$  à un sommet de  $V$  :

$$\forall a \in A, \quad \text{card}(a \cap U) = \text{card}(a \cap V) = 1.$$

Un graphe biparti est dit *équilibré* si  $\text{card } U = \text{card } V$ .

Comme les chaînes alternées relativement à un couplage  $C$  alternent aussi les sommets dans  $U$  et  $V$ , et qu'une chaîne alternée augmentante à un nombre pair de sommets, on en déduit que ses extrémités appartiennent l'une à  $U$  et l'autre à  $V$ . On ne considérera ici que les chaînes alternées augmentantes d'origine  $U$  et d'extrémité dans  $V$  :

$$x_0 - x_1 - x_2 - \dots - x_{p-1} - x_p,$$

où

- $p$  est impair,
- $x_i \in U$  pour  $i$  pair et  $x_i \in V$  pour  $i$  impair,
- $\{x_i, x_{i+1}\} \notin C$  pour  $i$  pair et  $\{x_i, x_{i+1}\} \in C$  pour  $i$  impair.

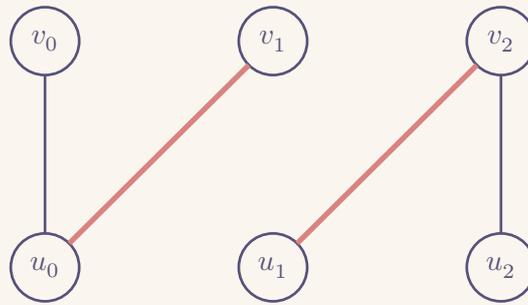
### II.1. Dénombrements.

Soit  $C$  un couplage d'un graphe biparti  $G = (U \cup V, A)$ .

On considère  $U_0$  l'ensemble, possiblement vide, des sommets de  $U$  qui ne sont pas une extrémité d'une arête de  $C$ , et  $Z$  l'ensemble des extrémités finales de chemins alternants commençant par un sommet de  $U_0$ . On pose  $T = (U \setminus (U_0 \cup Z)) \cup (V \cap Z)$ .

Dans l'exemple de la figure ci-après (Figure 1), avec le couplage  $C$  indiqué en rouge, les ensembles  $U_0$ ,  $Z$  et  $T$  sont :

$$U_0 = \{u_2\}, \quad Z = \{u_1, v_2\} \quad \text{et} \quad T = \{u_0, v_2\}.$$



**Figure 1.** Exemple de couplage dans un graphe biparti

**Q8.** Montrer que  $T$  est transversal.

**Q9.** Montrer que, dans un graphe biparti,  $\alpha'(G) = \beta(G)$ .

On note  $\Gamma(X)$  l'ensemble des sommets adjacents à  $X \subseteq S$ .

**Q10.** Montrer qu'un graphe biparti  $G$  admet un couplage parfait ssi  $\text{card } \Gamma(X) \geq \text{card } X$  pour tout  $X \subseteq U$ .  
On supposera  $G$  équilibré.

Parmi les questions de ce TD se cachent des théorèmes :

- Q3 est le théorème de Gallai,
- Q7 est le théorème de Berge,
- Q9 est le théorème de König,
- Q10 est le théorème de Hall.