

Récap #1 du traquenand HoTT

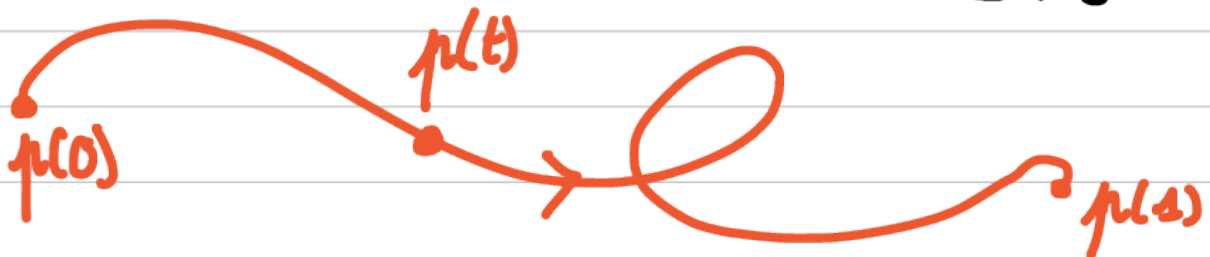
Hugo
SMOU

INTRO à la TOPOLOGIE ALGÈBRE

I. Chemins & homotopie

En topo. alg., on ne travaille qu'avec des fonctions continues.

Un **chemin** est une fonction continue $p : \underset{[0,1]}{\mathbb{I}} \longrightarrow X$.



(les chemins ont une direction)

Opérations sur les chemins

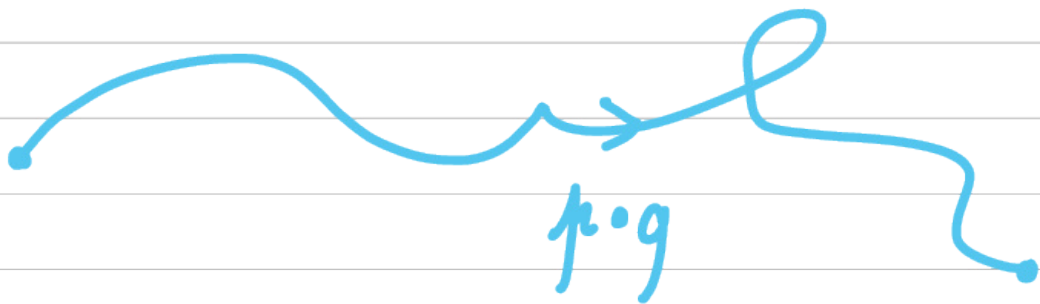
- la concaténation :

$$(p \cdot q)(t) := \begin{cases} p(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ q(2t-1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

↳ on passe de



à



- l' "inversion" : $p^{-1}(t) := p(1-t)$

↳ on passe de

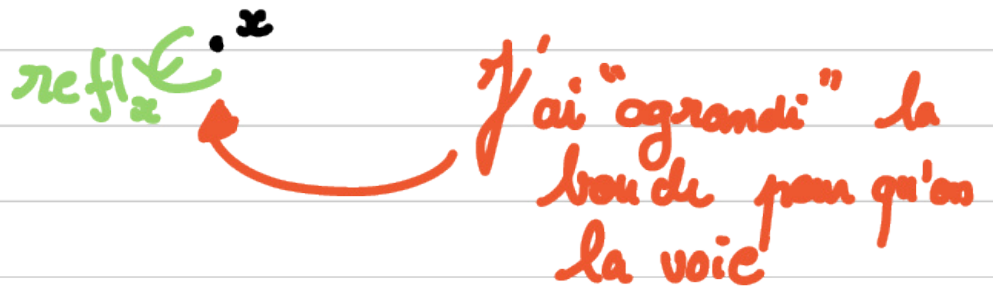


à



Aussi, on a un chemin "trivial"

$$\text{refl}_x(t) := x$$



Sauf que nos opérations ne sont pas
"sympathiques"

$$p \cdot (q \cdot r) \neq (p \cdot q) \cdot r$$

$$p \cdot \text{refl} \neq p$$

$$p \cdot p^{-1} \neq \text{refl}$$

on se déplace
mais rien d'intéressant ...

... ouh!

Une ^{de chemins} homotopie est une fonction continue

$$h : I \times I \rightarrow X$$

où

$$\begin{aligned} h(u, 0) &= x \\ h(u, 1) &= y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h(0, -) &= p \\ h(1, -) &= q \end{aligned}$$

À tout instant u ,

$$h(u, -)$$

est un chemin de
 x à y

On part de p

On arrive à q .

(En décurryfiant, on peut le voir comme un
chemin de p à q dans un espace de
chemins de x à y .)

Notation: $p \approx_p q$ s'il existe une homotopie
de p à q

La condition **en rose** est nécessaire car
sinon :

$$p \approx_p q \iff p \text{ et } q \text{ sont dans la même comp. connexe}$$

(merci Sarah)

II. Groupe fondamental

On pose $\pi_1(X, x) := \frac{\text{chemins de } x \text{ à } x}{\approx_p}$ **p l'acet en x**

Quelques exemples

$$\pi_1 \left(\begin{array}{c} \uparrow \\ \mathbb{R}^2 \\ \downarrow \end{array} \right) \text{ est trivial}$$

$$\pi_1 \left(\begin{array}{c} \bigcirc \\ \mathbb{S}^1 \end{array} \right) \cong \mathbb{Z}$$

Idee: on doit partir et revenir en un point fixé, on compte juste

le nombre de "tours
autour du trou"

$$\pi_1(\bigcirc \cup \bigcirc) \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$$

↑
produit libre

(c'est $\{a^{-1}, b^{-1}, a, b\}^*$ où
l'on "simplifie" $a^{-1}a, aa^{-1}, b^{-1}b,$
 bb^{-1} .)

Le groupe $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ n'est pas abélien!

$$ab \neq ba$$

$$\pi_1(\bigcirc \cup \bigcirc) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

↑ produit "classique"
(il est abélien)

Euh... Hugo... c'est "légal" d'écrire

sans point ? $\pi_1(X)$

... pas vraiment... mais on peut y remédier de deux manières :

groupeïde
fondamental

ou

connexité
(par arcs)

c.f. annexe

ou
maintenant

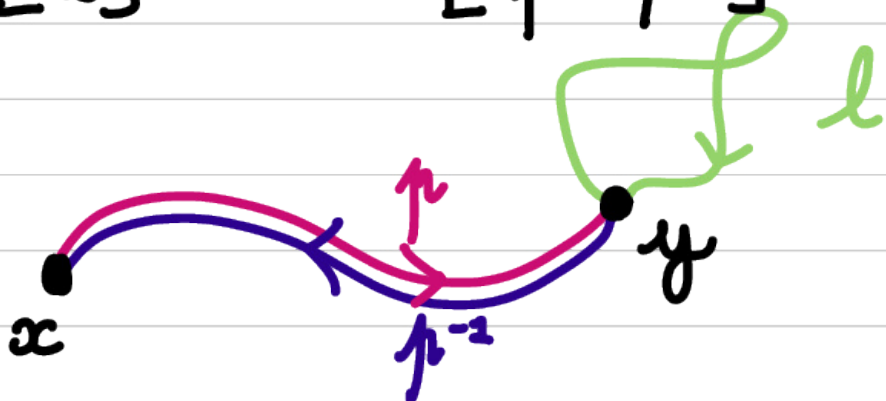
chemin de x à y

PROPOSITION: Si $p: x \rightsquigarrow y$ alors

$$\pi_1(X, x) \cong \pi_1(X, y)$$

$$[l] \mapsto [p \cdot l \cdot p^{-1}]$$

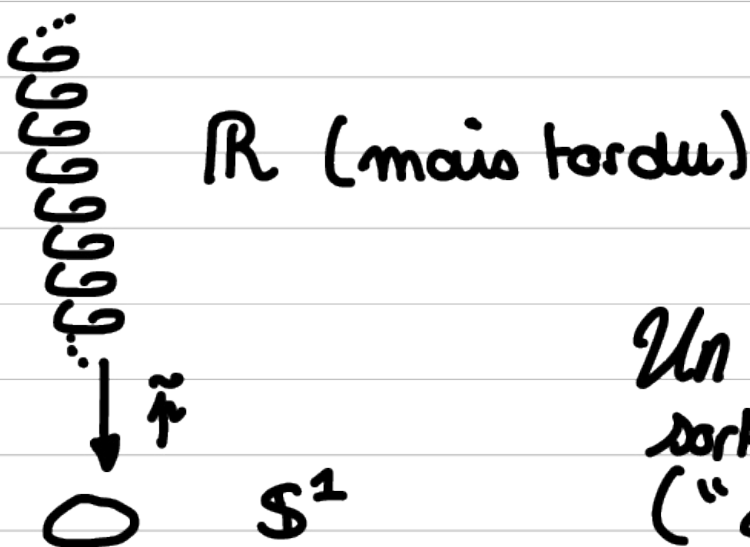
Pourquoi ?



Ainsi, dans un espace connexe (non-vide),
pas besoin de donner le point de base.

D'autres propriétés la prochaine fois...

III. Revêtements



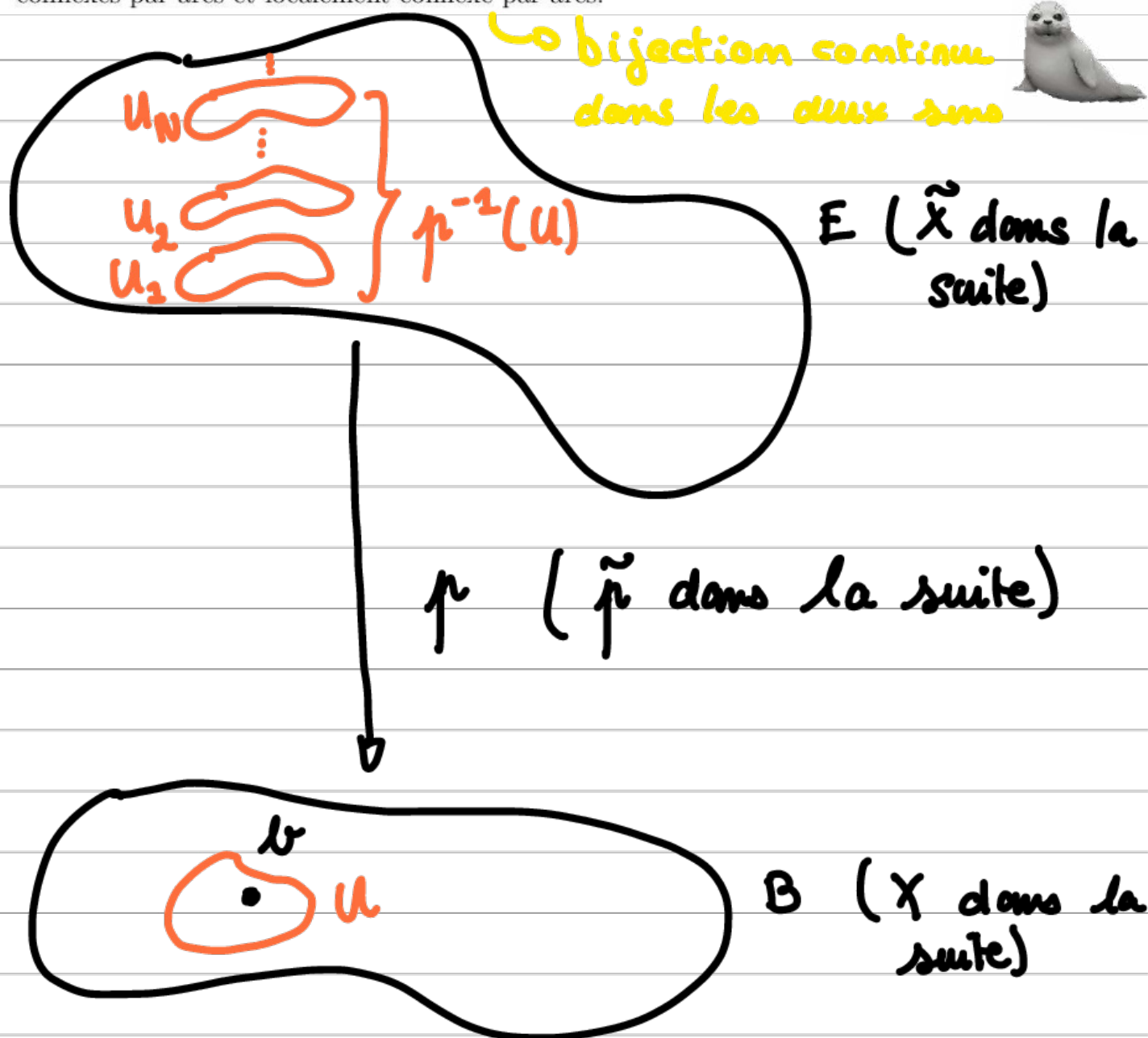
Un revêtement est une
sorte de simplification
("dépliage") d'un espace.

"Localement, un revêtement de X
ressemble à (un sandwich de copies
de) X ."



La définition formelle est pas fun...

Définition 1.1.1. Une application continue $p : E \rightarrow B$ est un **revêtement** de B si tout point $b \in B$ admet $U \in \mathcal{V}(b)$ ouvert tel que $p^{-1}(U)$ est une union disjointe d'ouverts $U_i, i \in I$ avec $p|_{U_i} : U_i \rightarrow U$ est un **homéomorphisme**. On dira que le revêtement est **CALCA** si E et B sont connexes par arcs et localement connexe par arcs.

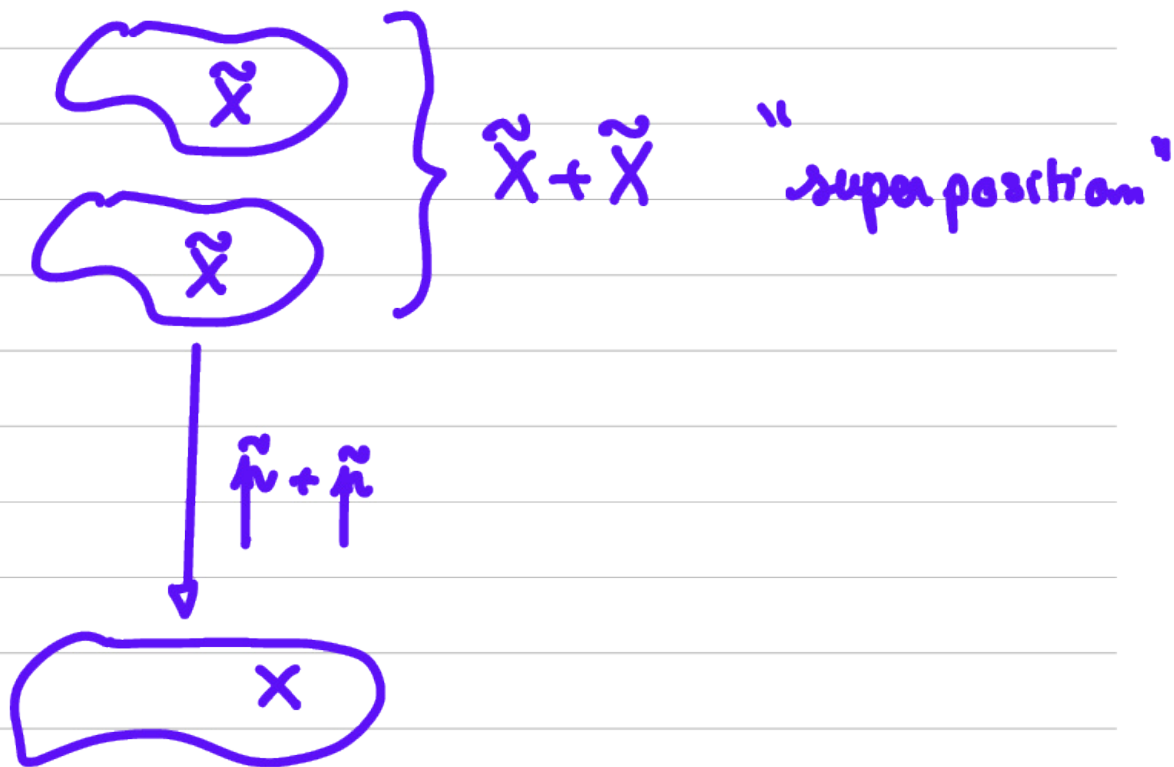


On travaillera toujours avec $X(B)$ connexe (il suffit de travailler sur chaque comp. connexe de X sinon).

On se restreint aussi aux revêtements
commexes ($\tilde{X} = E$ commexe) car sinon...

"une infinité pour le prix d'un !!"

On peut dupliquer les revêtements:
si $\tilde{\mu} : \tilde{X} \rightarrow X$ est un revêtement
alors



est aussi un revêtement... et on peut
faire autant de copies que l'on veut.

Plus de propriétés la prochaine fois...

IV Correspondance de Galois.

Revêtements
pointés commes
de (X, x)



Sous-groupes
de $\pi_1(X, x)$

Sources sympatoches :

→ topologie algébrique ~o Fletcher

→ théorie des types homotopiques ~o HOTT Book

→ théorie des catégories ~o ~~nLab~~ Perrone
Paolo

(c'est un bon livre!)

ANNEXE.

Quelques bases en théorie des catégories

Le but n'est pas de tout définir mais de donner les éléments principaux.

Une catégorie $\mathcal{C}$ est la donnée de :

→ une collection d'objets $\text{Ob}_{\mathcal{C}}$

→ pour deux objets A et B , un ensemble

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$$

de "morphismes" de A à B

→ pour $A, B, C \in \text{Ob}_{\mathcal{C}}$,

$$-\circ- : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, C)$$

la loi de composition.

tels que

→ pour tout $A \in \text{Ob}_{\mathcal{C}}$, $\text{id}_A \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A)$

→ $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h \quad \forall f, g, h$

→ $f \circ \text{id}_A = \text{id}_A \circ f = f. \quad \forall f$

Quelques exemples :

• la catégorie Set :

→ objets : ensembles

→ morphismes : fonctions

→ composition : composition de fonctions

• la catégorie Group :

→ objets : groupes

→ morphismes : morphismes de groupes

→ composition : composition de fonctions

... de même pour Ring, Field, ...

Les morphismes sont toujours des fonctions dans les exemples précédents... sauf que ce n'est pas toujours le cas.

- soit $\leq$ un ordre sur X , la catégorie

$\text{Poset}(X)$:

→ objets: éléments de X

→ morphismes: un unique morphisme

$x \rightarrow y$

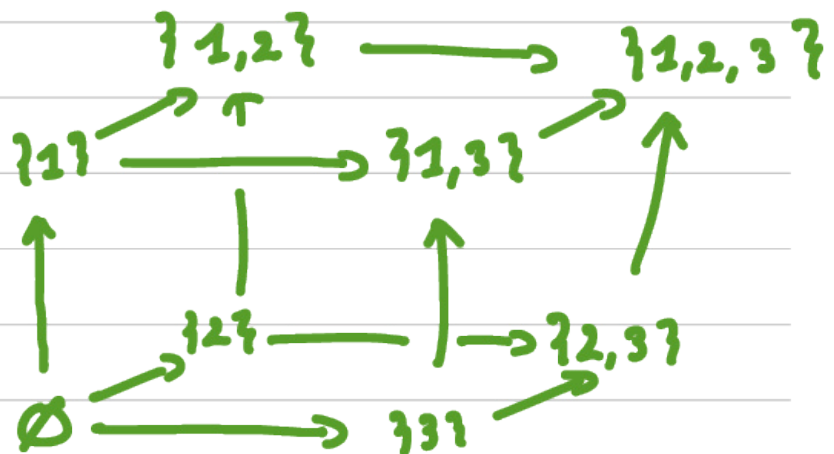
si $x \leq y$

→ composition: la seule manière possible

Les morphismes sont des objets purement formels.

Exemple avec

$\text{Poset}(\mathcal{P}(\{1,2,3\}), \subseteq)$



on ne dessine pas les identités ni les composées pour simplifier.

espace topo.

Autre exemple : le groupoïde fondamental $\Pi(X)$

- objets : points de X
- morphismes : chemins à homotopie près
- composition : concaténation de chemins.

C'est même mieux qu'une "simple" catégorie, c'est un **groupoïde** : tous les morphismes sont des isomorphismes car p^{-1} existe et

$$p \cdot p^{-1} \underset{\text{refl}}{\approx}_p \text{id} \quad p^{-1} \cdot p \underset{\text{refl}}{\approx}_p \text{id}.$$

PROPOSITION Si $\mathcal{G}$ est un groupoïde alors pour tout $x \in \text{Ob } \mathcal{G}$, $\text{Hom}_{\mathcal{G}}(x, x)$ est un groupe.

$\underbrace{\text{Hom}_{\mathcal{G}}(x, x)}_{\text{Aut}_{\mathcal{G}}(x)}$

Dans notre cas:

$$\pi_1(X, x) = \text{Hom}_{\pi(X)}(x, x).$$

Les morphismes entre deux catégories : les foncteurs.

Un foncteur $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ est la donnée de :

- une fonction $F: \text{Ob}_{\mathcal{C}} \rightarrow \text{Ob}_{\mathcal{D}}$
- une fonction $F: \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(A), F(B))$

on écrit "F" dans tous les cas car il n'y a pas vraiment d'ambiguïté des notations

telles que :

- $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g) \quad \forall f \forall g$
- $F(\text{id}_A) = \text{id}_{F(A)} \quad \forall A.$

Quelques exemples :

- foncteur d'oubli" $U : \text{Group} \rightarrow \text{Set}$
qui à $(G, \cdot, 1_G)$ associe G l'ensemble
sous-jacent et à

$$U : (G, \cdot, 1_G) \rightarrow (H, \cdot, 1_H)$$

associe $U\mu : G \rightarrow H$

- de même, on a des foncteurs d'oubli

$$\text{Field} \rightarrow \text{Ring}, \text{Ring} \rightarrow \text{Group}, \\ \text{Group} \rightarrow \text{Monoid}, \text{ etc}$$

- On construit un foncteur

$$-^* : \text{Set} \rightarrow \text{Monoid}$$

- à Σ , on associe Σ^* l'ens. des mots sur Σ
avec la concaténation de mots et le mot vide
- à $f : \Sigma \rightarrow \Gamma$, on associe

$$f^* : \Sigma^* \rightarrow \Gamma^*$$

$$a_1 \dots a_n \mapsto f(a_1) \dots f(a_n).$$

Autre exemple : π_1 ... mais on en parle
la prochaine fois.