

# Récap # 2 du traquenand HoTT

Hugo  
SNOU

## TOPOLOGIE ALGÈBRE et CATÉGORIES

### I Revêtements de $S^1$

On sait trois choses :

1)  $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$

2) les sous-groupes de  $\mathbb{Z}$  sont les  $m\mathbb{Z}$  pour un certain  $m \in \mathbb{Z}$

3) CORRESPONDANCE DE GALOIS :

Revêtements  
(pointés complexes)  
de  $(X, x)$



Sous-groupes  
de  $\pi_1(X, x)$

$$(\tilde{X}, \tilde{x}) \longmapsto \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x})$$

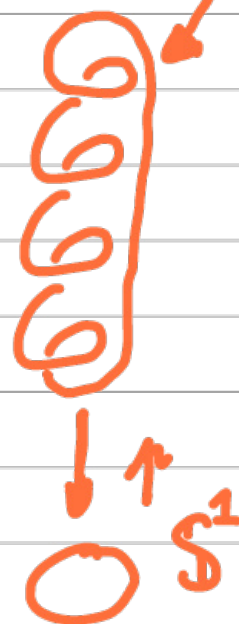
Ainsi, il suffit de s'intéresser aux sous-groupes de  $\pi_1(S^1)$  pour connaître les revêtements pointés complexes de  $S^1$ .

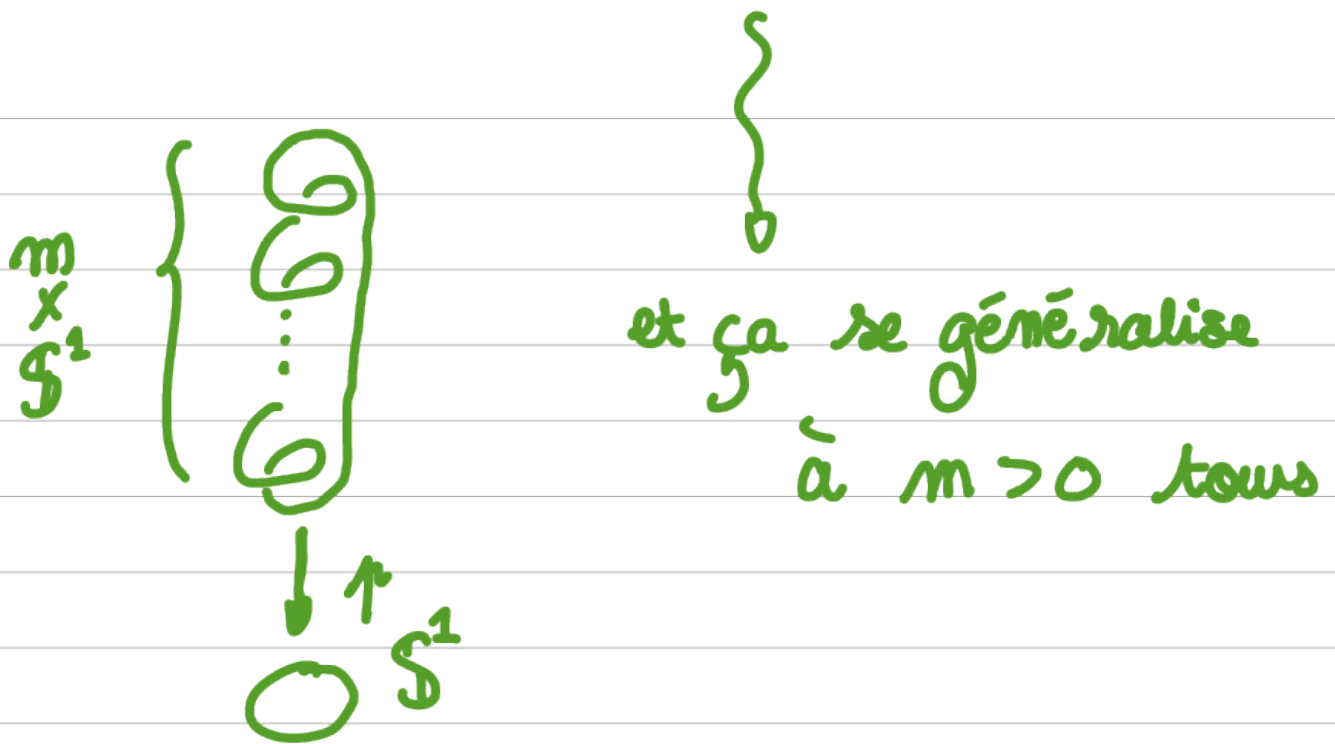
$$m\mathbb{Z} \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } m \neq 0 \\ \{0\} & \text{si } m = 0 \end{cases}$$

On s'attend donc à avoir  $|\mathbb{N}|$  revêtements dont un avec un  $\pi_1(-)$  trivial, et les autres "ressemblent" à des cordes.



"avec 4  
tours"





On a donc trouvé les revêtements portés  
complexes de  $S^1$ .

En effet, on a bien que :

$$[\pi_1(S^1) : \pi_1(S^1[m])] = [\langle 1 \rangle : \langle 1^m \rangle]$$

"m tous"

||

$$[\mathbb{Z} : m\mathbb{Z}] = m.$$

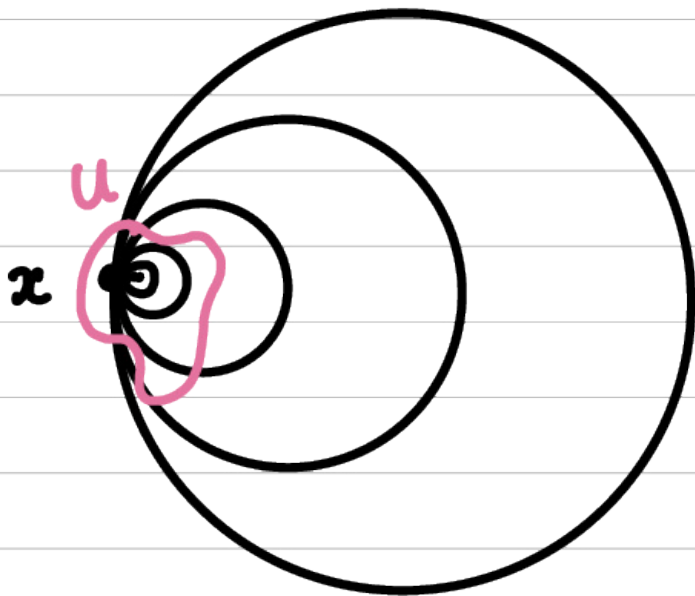
## II Construction explicite du revêtement universel

Le revêtement universel de  $(X, x)$  est

l'unique revêtement de  $(X, x)$  de  $\pi_1(-)$  trivial.  
 point connexe

Comment le montrer à l'aide de la correspondance de Galois ?

Il existe toujours, sous quelques hypothèses topologiques pas très intéressantes... mais parlons-en quand-même !



Les BOUCLES  
HAWAÏENNES  
sont des cercles  
de rayon  $1/2^n$ .

Un revêtement universel  
de  $(X, x)$  doit satisfaire  
qu'il existe un voisinage  $U$   
de  $x$  où

$$\tilde{\pi}^{-1}(U) = \bigsqcup_{i \in I} V_i$$

$$\text{et } V_i \xrightarrow[\tilde{\pi}]{} U \quad (*)$$

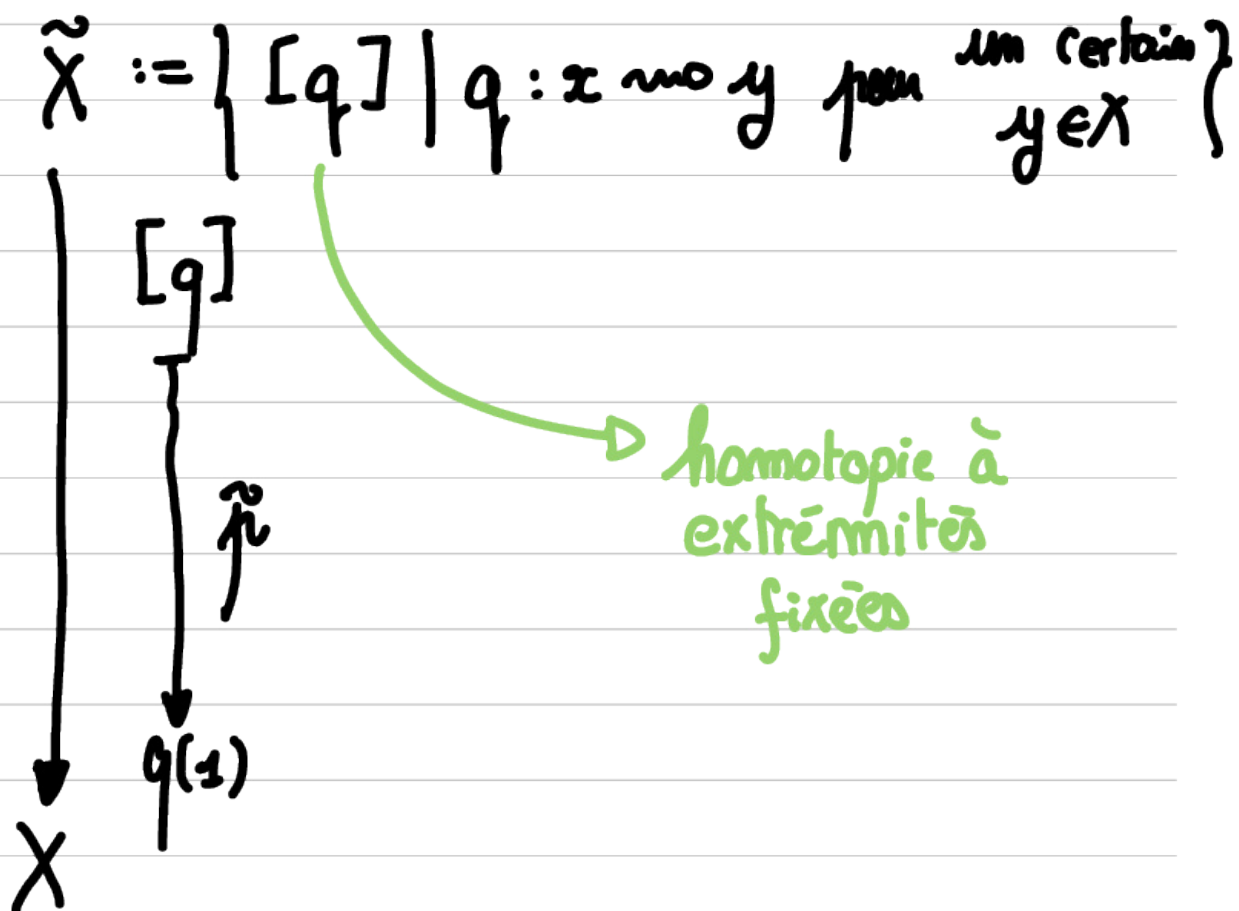
$$\begin{aligned} \text{Or, } \pi_1(X, x) &\cong \pi_1(U, x) && \text{par le dessin} \\ &\cong \pi_1(V_i, \tilde{x}_i) && p(\tilde{x}_i) = x \text{ par } (*) \\ &\leq \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_i) = \{e\} \end{aligned}$$

D'où  $\pi_1(X, x)$ , absurde!

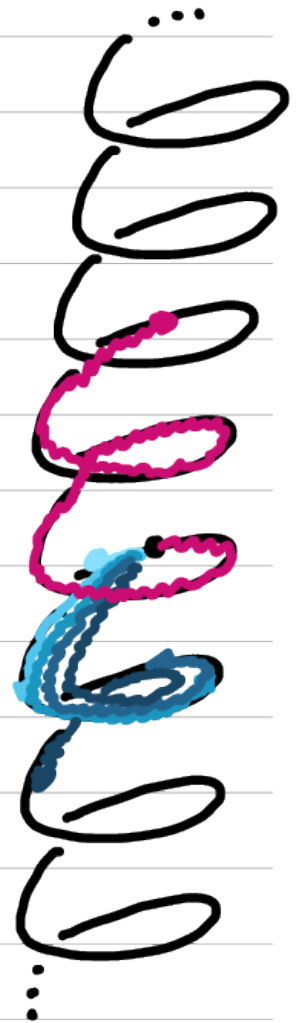
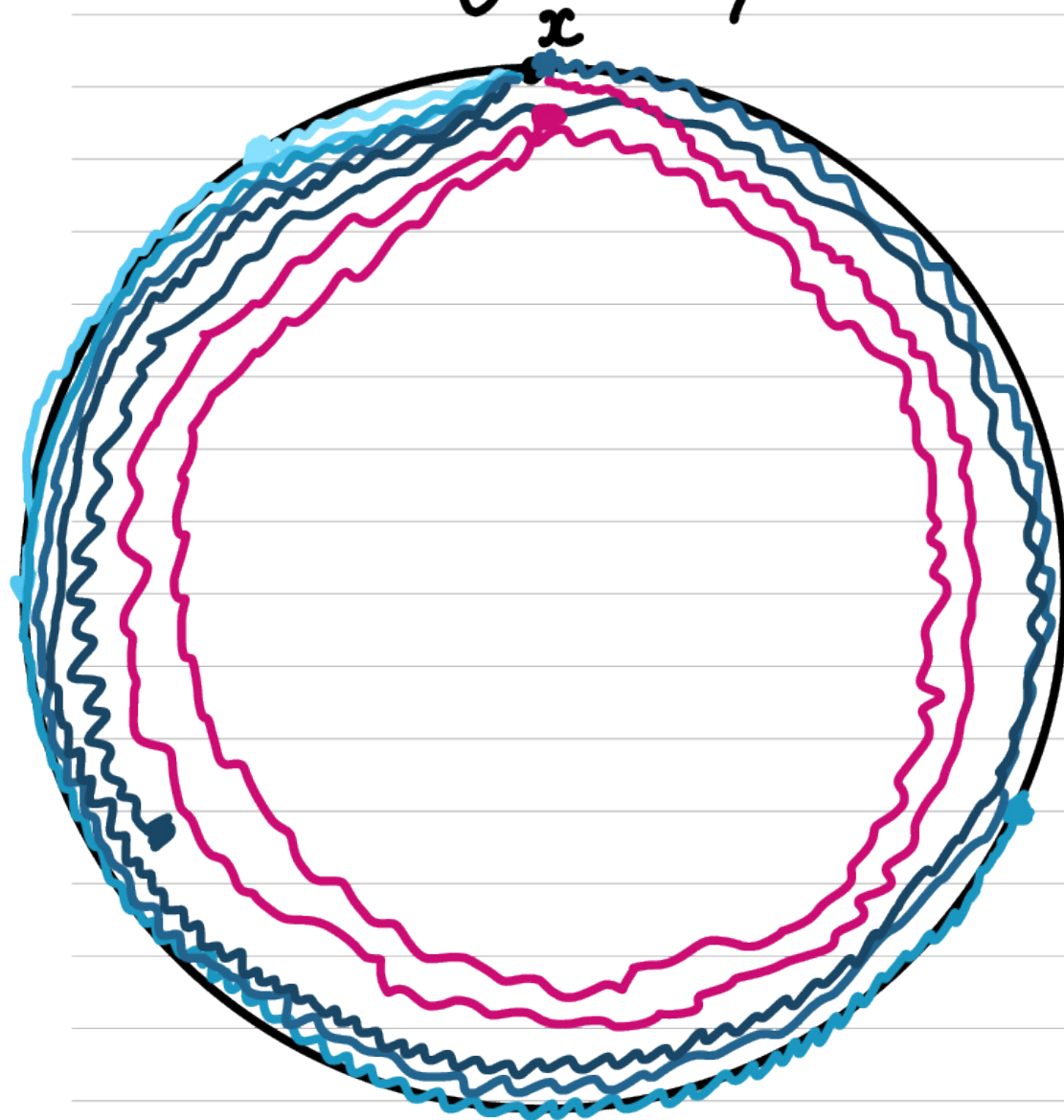
On a besoin que  $X$  soit  
"localement simplement connexe"

(et aussi localement connexe).

## La construction explicite

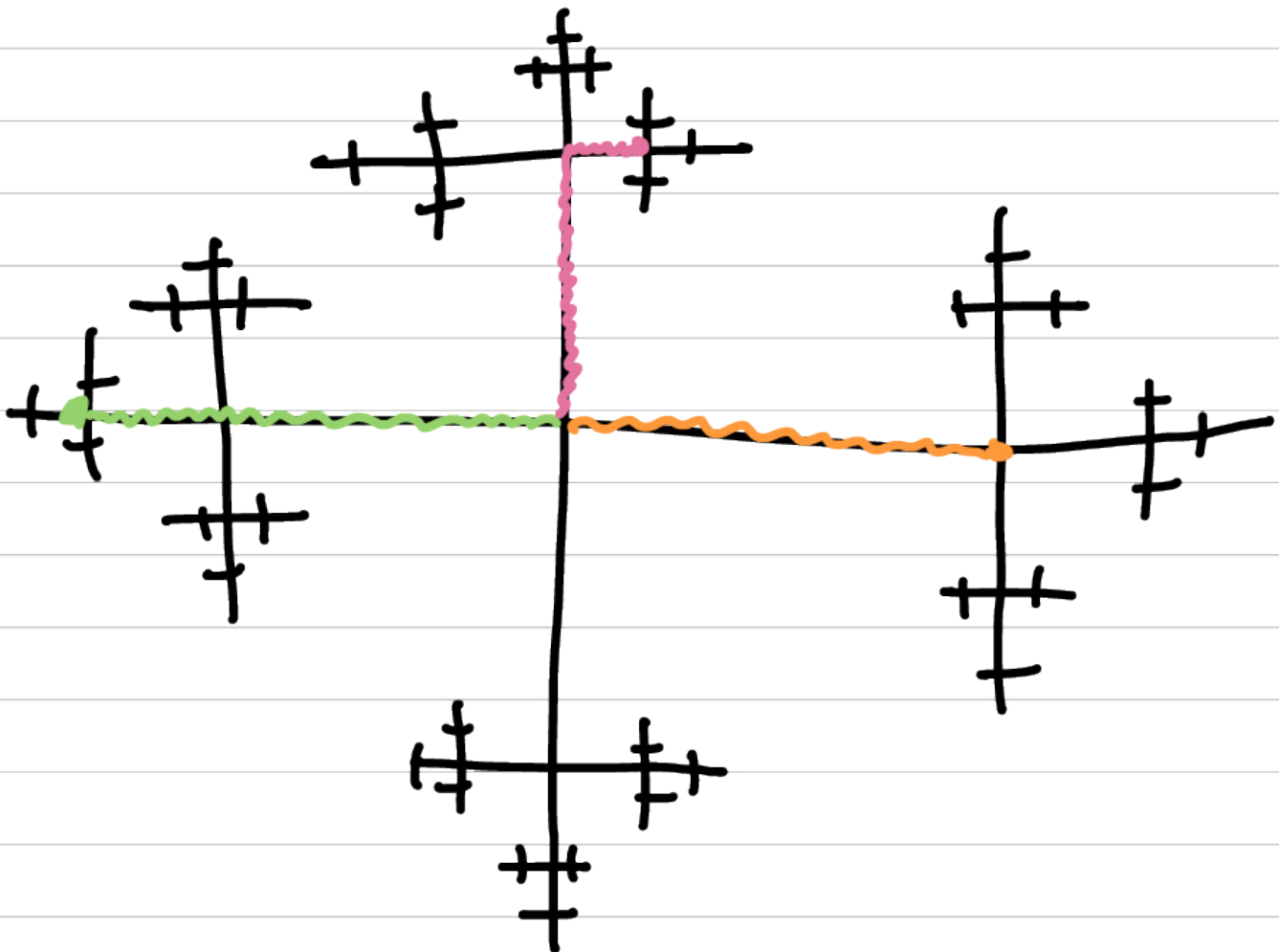
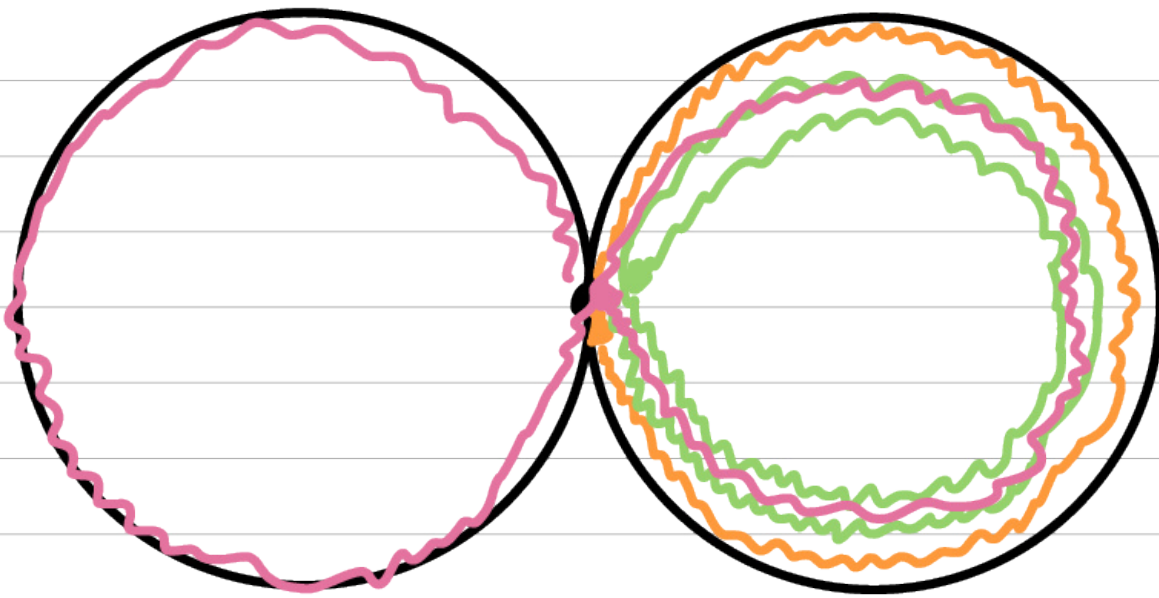


L'intuition géométrique :



On "déplie" l'espace de base.

Autre exemple plus complexe :  
 $S^1 \vee S^1$



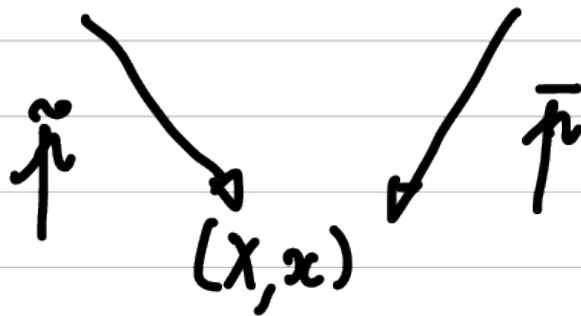
et on construit ainsi le  
revêtement universel  
de  $S^1 \vee S^1$

# III La catégorie $\text{Cov}(X, x)$

On définit  $\text{Cov}(X, x)$  par :

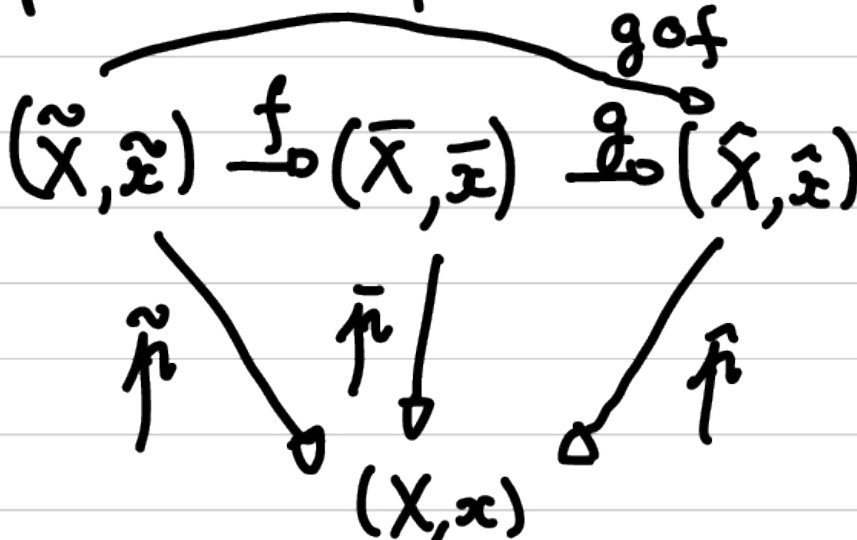
- objets : revêtements connexes pointés de  $(X, x)$
- morphismes : on a  $f : (\tilde{X}, \tilde{x}) \rightarrow (\bar{X}, \bar{x})$ ssi

$$(\tilde{X}, \tilde{x}) \xrightarrow{f} (\bar{X}, \bar{x})$$



commute

- composition : composition usuelle et on "colle" les triangles



(Bonus pour celles et ceux qui comprennent)

Remarque: C'est une sous-catégorie de  
la "slice category"  $\text{Top}_*/(X, x)$ .

Est-elle pleine? Oui!

$$\text{Hom}_{\text{Cov}(X, x)}((\tilde{X}, \tilde{x}), (\bar{X}, \bar{x})) = \text{Hom}_{\text{Top}_*/(X, x)}((\tilde{X}, \tilde{x}), (\bar{X}, \bar{x}))$$

Est-elle large? (wide) Non!

$$\underbrace{\text{Obj}_{\text{Cov}(X, x)}}_{\substack{\text{revêtements} \\ \text{(points commens)} \\ \text{de } (X, x)}} \neq \underbrace{\text{Obj}_{\text{Top}_*/(X, x)}}_{\substack{\text{espaces} \\ \text{topologiques}}} = \underbrace{\text{Obj}_{\text{Top}_*}}_{\text{espaces topologiques}}$$

(Fin du bonus)

### III. A. Quelques propriétés des revêtements

Un relèvement de  $f: (A, a) \rightarrow (X, x)$  à un revêtement  $(\tilde{X}, \tilde{x})$  de  $(X, x)$  est une fonction <sup>pointée</sup> commexe  $\tilde{f}: (A, a) \rightarrow (\tilde{X}, \tilde{x})$

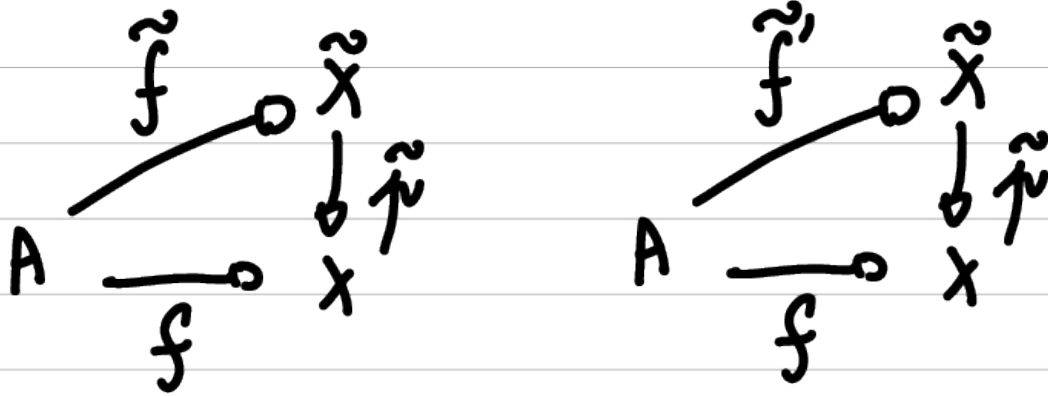
tel que

$$\begin{array}{ccc} & \tilde{f} & (\tilde{X}, \tilde{x}) \\ & \swarrow \text{---} & \downarrow \tilde{p} \\ (A, a) & \xrightarrow{f} & (X, x) \end{array}$$

commute.

En général,  $\tilde{f}$  n'existe pas forcément.  
Mais, si  $\tilde{f}$  existe, elle est unique.

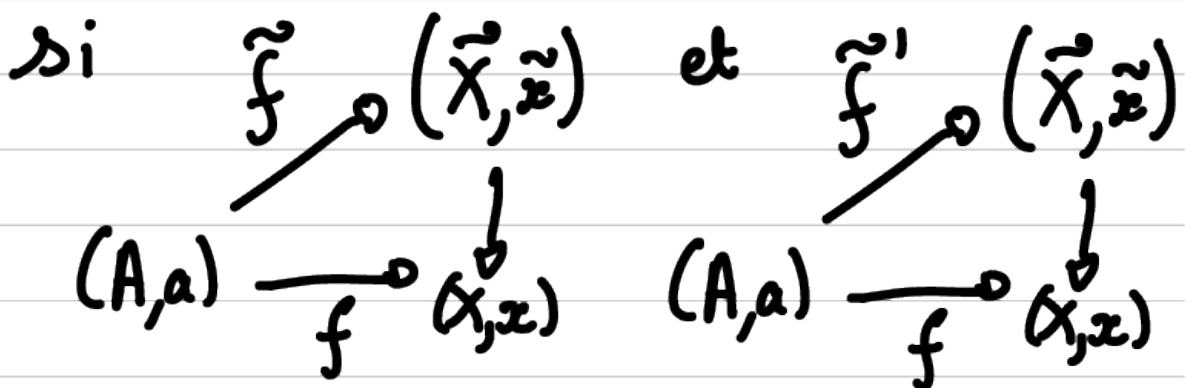
LEMME: Si  $\tilde{X}$  est un revêtement connexe de  $X$ ,  
 et  $f, \tilde{f}, \tilde{f}'$  font commuter les triangles



Et, si  $\tilde{f}'(\tilde{x}) = \tilde{f}(\tilde{x})$  pour un certain  $\tilde{x} \in \tilde{X}$ .

Alors  $\tilde{f}' = \tilde{f}$ .

Avec des revêtements et des fonctions pointées, on a directement l'unicité :



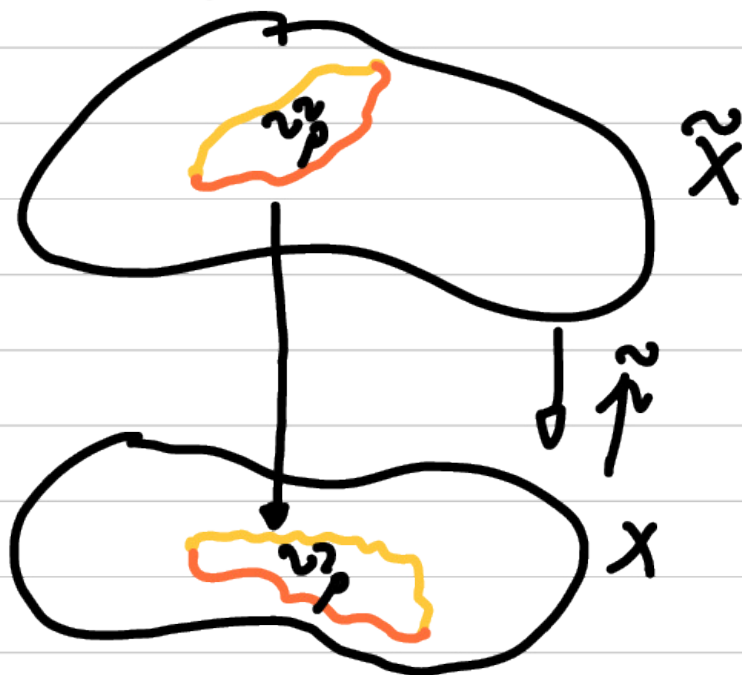
alors  $\tilde{f} = \tilde{f}'$ .

Gm peut toujours relever les chemins  
et homotopies:

LEMME: Si  $q: x \rightsquigarrow y$  et soit  $\tilde{x} \in \tilde{X}$ ,

alors il existe un unique chemin  $\tilde{q}: \tilde{x} \rightsquigarrow \tilde{y}$   
pour un certain  $\tilde{y} \in \tilde{X}$ .

De plus, si  $q \simeq_p r$  alors  $\tilde{q} \simeq_{\tilde{p}} \tilde{r}$ .



### III.B $\text{Cov}(X, x)$ est posétale.

⚠ C'est inhabituel!

Notons  $(\tilde{X}, \tilde{x}) \leq (\bar{X}, \bar{x})$  s'il existe  
un morphisme  $f: (\tilde{X}, \tilde{x}) \rightarrow (\bar{X}, \bar{x})$  de  
revêtements (pointés commes) de  $(X, x)$ .

*Je vais arrêter de le préciser*

On sait que  $\leq$  forme un préordre sur  
les revêtements de  $(X, x)$ .

Mais, on peut faire bien mieux!

Si on a :

$$f: (\tilde{X}, \tilde{x}) \rightarrow (\bar{X}, \bar{x})$$

$$\text{et } g: (\bar{X}, \bar{x}) \rightarrow (\tilde{X}, \tilde{x})$$

$$\text{alors } (\tilde{X}, \tilde{x}) \xrightarrow{f} (\bar{X}, \bar{x}) \xrightarrow{g} (\tilde{X}, \tilde{x})$$

$$\begin{array}{ccccc} \tilde{\pi} & & & & \tilde{\pi} \\ & \searrow & & \nearrow & \searrow \\ & & (X, x) & & \end{array}$$

(de même dans l'autre sens).

D'où

$$\begin{array}{ccc}
 & g \circ f & \circ (\tilde{X}, \tilde{x}) \\
 (\tilde{X}, \tilde{x}) & \xrightarrow{\tilde{f}} & (X, x)
 \end{array}$$

commute

ou

$$\begin{array}{ccc}
 & id & \circ (\tilde{X}, \tilde{x}) \\
 (\tilde{X}, \tilde{x}) & \xrightarrow{\tilde{f}} & (X, x)
 \end{array}$$

commute aussi.

On en conclut  $g \circ f = id$  et, de même,  $f \circ g = id$ .  
ce sont deux relèvements de  $\tilde{f}$

Autrement dit, si  $(\tilde{X}, \tilde{x}) \leq (\bar{X}, \bar{x})$   
 et  $(\bar{X}, \bar{x}) \leq (\tilde{X}, \tilde{x})$

alors  $(\tilde{X}, \tilde{x}) \cong (\bar{X}, \bar{x})$ .

D'où  $\leq$  est, à iso près, une relation d'ordre.

Encore mieux!

$$\left( \frac{\text{Relevements de } (X, x)}{\text{Iso de revêtement}}, \leq \right)$$

est un treillis complet!

La correspondance de Galois est  
un isomorphisme de treillis complet

$$\left( \frac{\text{Relevements de } (X, x)}{\text{Iso de revêtement}}, \leq \right)$$



Correspondance  
de  
Galois

$$\left( \text{Sous-groupes de } \pi_1(X, x), \leq \right)$$

## IV Foncteurs $\pi_1$ et $\pi$

On définit la catégorie  $\text{Top}_*$  par:

- objets : espaces topologiques pointés
- morphismes : fonctions continues

$$f: (X, x) \rightarrow (Y, y)$$

- composition : composition usuelle.

(C'est aussi la coslice  $\text{Top} \setminus 1$ .)

Regardez l'annexe de la semaine dernière si vous n'êtes pas à jour sur catégories et foncteurs.

Et, posez des questions !

Si  $f: (X, x) \rightarrow (Y, y)$  est continue alors  $f$  induit un homomorphisme de

$$\begin{array}{ccc} \text{groupes noté } \pi_1(f): \pi_1(X, x) & \rightarrow & \pi_1(Y, y) \\ [l] & \longmapsto & [f \circ l] \end{array}$$

On a que  $\pi_1$  est un foncteur :

$$\pi_1 : \text{Top}_* \longrightarrow \text{Group}$$

$$\text{objets } (X, x) \longmapsto \pi_1(X, x)$$

$$\text{morphisms } f \longmapsto \pi_1(f).$$

En effet,

$$\begin{aligned}\pi_1(f) \circ \pi_1(g) [l] &= \pi_1(f) [g \circ l] \\ &= [f \circ \widetilde{g \circ l}] \\ &= \pi_1(f \circ g) [l]\end{aligned}$$

Et,

$$\pi_1(\text{id}) : [l] \longmapsto [\text{id} \circ l] = [l].$$

De même, si

$f: X \rightarrow Y$   
est continue alors  $f$  induit un foncteur

$$\Pi(f): \Pi(X) \longrightarrow \Pi(Y)$$

objets  $x \in X \longrightarrow f(x) \in Y$

morphismes  $p: x \rightsquigarrow y \longrightarrow f \circ p: \underbrace{f(x)}_{f(y)}$ .

Et là c'est le moment à la

INCEPTION<sup>TM</sup> probablement :

$\Pi$  est un foncteur

$$\Pi: \mathbf{Top} \longrightarrow \mathbf{Groupoid}!$$

En résumé:

$$\pi_1 : \text{Top}_* \longrightarrow \text{Group}$$

et

$$\Pi : \text{Top} \longrightarrow \text{Groupoïde}$$

sont deux foncteurs.

La fin, c'est un peu abstrait...

Mais ça risque de s'empirer...