L'approche topologique.

Définition 1. Un *espace topologique* est une paire $(X, \Omega X)$ où X est un ensemble et $\Omega X \subseteq \wp(X)$ que l'on appelle *ensemble des ouverts* telle que

- si $\mathcal{S} \subseteq_{\text{fin}} \Omega X$ alors $\bigcap \mathcal{S} = \bigcap_{V \in \mathcal{S}} V \in \Omega X$;
- si $\mathcal{S} \subseteq \Omega X$ alors $\bigcup \mathcal{S} = \bigcup_{V \in \mathcal{S}} V \in \Omega X$.

Remarque 1. On a toujours $\emptyset, X \in \Omega X$ avec $\emptyset = \bigcup \emptyset$ et $X = \bigcap \emptyset$.

Exemple 1 (Topologie sur Σ^ω et intuition). On peut voir les ouverts comme “analogues” aux ensembles récursivement énumérables.

On définit une topologie sur Σ^ω où les ouverts sont $\mathsf{ext}(W)$ où $W \subseteq \Sigma^\star$ et $\mathsf{ext}(W) = \bigcup_{u \in W} \mathsf{ext}(u)$ et

$$\mathsf{ext}(u) = \{\sigma \in \Sigma^\omega \mid u \subseteq \sigma\}.$$

Ainsi, si on a une manière d'énumérer W, on peut tester si $u \in \mathsf{ext}(W)$ en temps fini, mais il n'est pas forcément possible de vérifier que $u \notin \mathsf{ext}(W)$.

Définition 2. Soit $(X, \Omega X)$ un espace topologique. Alors, on appelle *fermé* un sous-ensemble $C \subseteq X$ tel que $X \setminus C \in \Omega X$.

Remarque 2. On a donc que $\emptyset$ et X sont toujours fermés.

Remarque 3. L'ensemble des fermés sur $(X, \Omega X)$ est stable par

- ▷ intersections arbitraire ;
- ▷ unions finies.

Ce sont les "duales" des propriétés de stabilité des ouverts.

Avec quelques manipulations "simples", on peut arriver à la caractérisation suivante.

Lemme 1. Soit $(X, \Omega X)$ un espace topologique.

- ▷ On a que $A \subseteq X$ est un ouvert ssi $\forall x \in X$ on a l'équivalence suivante
$$x \in A \iff \exists U \in \Omega X, \quad x \in U \subseteq A.$$
- ▷ On a que $A \subseteq X$ est un fermé ssi $\forall x \in X$ on a l'équivalence suivante
$$x \in A \iff \forall U \in \Omega X, \quad (x \in U \implies A \cap U \neq \emptyset).$$

Lemme 2 (Avec Σ^ω). ▷ Sur Σ^ω, on a que $A \subseteq \Sigma^\omega$ est ouvert ssi $\forall \sigma \in \Sigma^\omega$, on a l'équivalence suivante
$$\sigma \in A \iff \exists \hat{\sigma} \subseteq \sigma, \mathsf{ext}(\hat{\sigma}) \subseteq A.$$

- ▷ Sur Σ^ω, on a que $A \subseteq \Sigma^\omega$ est fermé ssi $\forall \sigma \in \Sigma^\omega$, on a l'équivalence suivante
$$\sigma \in A \iff \forall \hat{\sigma} \subseteq \sigma, \mathsf{ext}(\hat{\sigma}) \cap A \neq \emptyset,$$

autrement dit,

$$\sigma \in A \iff \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} \mathsf{ext}(\sigma(0)\dots\sigma(n)) \cap A \neq \emptyset \\ \Updownarrow \\ \forall \hat{\sigma} \subseteq \sigma, \exists \beta \supseteq \hat{\sigma}, \beta \in A. \end{cases}$$

Exemple 2. L'ensemble $\{\mathsf{a}\}^\omega$ est un fermé mais pas un ouvert. En effet, si $\hat{\sigma} \subseteq \mathsf{a}^\omega$ alors $\hat{\sigma} = \mathsf{a}^n$, mais, si $|\Sigma| \geq 2$,

$$\mathsf{ext}(\mathsf{a}^n) \not\subseteq \{\mathsf{a}^\omega\}.$$

Corollaire 1. Une propriété $P \subseteq (\mathbf{2}^{\mathrm{AP}})^\omega$ est de sûreté ssi P est un fermé.

Preuve. L'idée est que $\mathsf{ext}(P_{\mathrm{bad}})$ est un ouvert et que

$$P = (\mathbf{2}^{\mathrm{AP}})^\omega \setminus \mathsf{ext}(P_{\mathrm{bad}}).$$

□

Proposition 1 (Clôture). Soit $A \subseteq X$ où $(X, \Omega X)$ est un espace topologique. Alors,

$$\bar{A} := \bigcap_{A \subseteq C \text{ où } C \text{ fermé}} C$$

est un fermé.

Remarque 4. On a que A est un fermé ssi $\bar{A} = A$.

1 Théorème de décomposition.

Définition 3. Pour $(X, \Omega X)$ un espace topologique, on dit que $A \subseteq X$ est *dense* si

$$\forall U \in \Omega X, \quad U \neq \emptyset \implies U \cap A \neq \emptyset.$$

Exemple 3. Une partie $A \subseteq \Sigma^\omega$ est dense ssi

$$\forall u \in \Sigma^\star \quad \mathsf{ext}(u) \cap A \neq \emptyset,$$

autrement dit, pour tout mot fini $u \in \Sigma^\star$, il existe $\sigma \in \Sigma^\omega$ qui étend u (*i.e.* $u \subseteq \sigma$) et tel que $\sigma \in A$.

Lemme 3. On a que $P \subseteq (\mathbf{2}^{\mathrm{AP}})^\omega$ est une propriété de vivacité ssi P est dense.

Théorème 1 (Décomposition). Soit $(X, \Omega X)$ un espace et $A \subseteq X$. Alors il existe $C \subseteq X$ un fermé et $D \subseteq X$ dense tel que

$$A = C \cap D.$$

Preuve. On pose $C := \bar{A}$ et $D := A \cup (X \setminus \bar{A})$. Ainsi, on a bien que $A = C \cap D$. On a aussi que C est fermé. Montrons que D est dense.

Soit $U \in \Omega X$ non vide. Si $U \cap A = \emptyset$ alors $A \subseteq X \setminus U$, qui est un fermé. Donc $\bar{A} \subseteq X \setminus U$ et $U \subseteq X \setminus \bar{A}$. □

2 Bases.

Définition 4. Soit X un ensemble et $\mathscr{B} \subseteq \wp(X)$ tel que $\mathscr{B}$ est stable par intersections finies. Alors,

$$\Omega := \left\{ \bigcup_{i \in I} B_i \;\middle|\; \forall i \in I, B_i \in \mathscr{B} \right\}$$

est une topologie sur X et $\mathscr{B}$ est appelée *base* de Ω. Autrement dit, on a défini

$$\Omega := \left\{ \bigcup \mathscr{F} \;\middle|\; \mathscr{F} \subseteq \mathscr{B} \right\}.$$

Lemme 4 (Quelques propriétés).

- Si $u \subseteq v$ alors $\mathsf{ext}(v) \subseteq \mathsf{ext}(u)$.
- Si $|\Sigma| \geq 2$ et $\mathsf{ext}(v) \subseteq \mathsf{ext}(u)$ alors $u \subseteq v$.

(Attention à la contravariance !)

- Pour $u, v \in \Sigma^\star$, on a

$$\mathsf{ext}(u) \cap \mathsf{ext}(v) = \begin{cases} \mathsf{ext}(v) & \text{si } u \subseteq v \\ \mathsf{ext}(u) & \text{si } v \subseteq u \\ \emptyset & \text{sinon.} \end{cases}$$

Remarque 5. Sur Σ^ω, on a que pour tout ouvert U, il existe $W \subseteq \Sigma^\star$ tel que $U = \bigcup_{v \in W} \mathsf{ext}(v)$. Avec le lemme précédent, on a que $\Omega\Sigma^\omega$ a pour base

$$\{\mathsf{ext}(u) \mid u \in \Sigma^\star\} \cup \{\emptyset\}.$$

Remarque 6. On a $\mathsf{ext}(\varepsilon) = \Sigma^\omega$.

Remarque 7. L'ensemble Σ^ω est un *espace métrique complet* pour la distance

$$\begin{aligned} d : \Sigma^\omega \times \Sigma^\omega &\longrightarrow [0, 1] \\ \alpha, \beta &\longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha = \beta \\ 1/2^{\min n \mid \alpha(n) \neq \beta(n)} & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

On a que $d(\alpha, \gamma) \leq \max\big(d(\alpha, \beta), d(\beta, \gamma)\big)$.