Ordres partiels et treillis.

1 Ordres partiels.

Définition 1. Un *ordre partiel* (ou *poset* en anglais) est une paire $(P, \leq)$ où $\leq$ est une relation binaire sur P telle que

- (*reflexivité*) $\forall x \in P, x \leq x$;
- (*transitivité*) $\forall x, y \in P, x \leq y \implies y \leq z \implies x \leq z$;
- (*antisymétrie*) $\forall x, y \in P, x \leq y \implies y \leq x \implies x = y$.

Un préodre est une relation binaire reflexive et transitive.

Exemple 1. On donne quelques exemples de poset :

1. $(\wp(X), \subseteq)$, l'inclusion dans les parties de X
2. $(\Omega X, \subseteq)$, l'inclusion dans les ouverts de X
3. $(\Sigma^\star, \subseteq)$, la relation préfixe dans les mots sur Σ

Attention, dans les trois exemples, il existe deux éléments u, v où

$$u \not\leq v \quad \text{et} \quad v \not\leq u.$$

Définition 2 (Dual). Soit $(P, \leq)$ un poset. Le *dual* de P est $(P, \leq)^{\mathrm{op}} := (P, \geq)$ où

$$a \geq b \iff b \leq a.$$

Définition 3 (Fonction (anti)monotone). Soit $(P, \leq_P)$ et $(L, \leq_L)$ deux posets. Une fonction $f : P \to L$ est *monotone* si pour tout $a, b \in P$ on a

$$a \leq_P b \implies f(a) \leq_L f(b).$$

On dit que $f : (P, \leq) \to (L, \leq)$ est *antimonotone* si $f : (P, {}_{\reflectbox{$\scriptstyle P$}}\geq) = (P, \leq_P)^{\text{op}} \to (L, \leq_L)$ est monotone, autrement dit pour tout $a, b \in P$ on a

$$a \leq_P b \implies f(a) \geq_L f(b).$$

2 Treillis complet.

Définition 4. Soit $(A, \leq)$ un poset et $S \subseteq A$.

- ▷ Un *upper bound* de S est un élément $a \in A$ tel que $\forall s \in S$, $s \leq a$.
- ▷ Un *least upper bound* (*lub* ou *sup*) de S est un upper bound $a \in A$ de S tel que, pour tout upper bound $b \in A$ de S, on a $a \leq b$.

Par dualité, on a les définitions suivantes.

- ▷ Un élément $a \in A$ est un *lower bound* de S ssi a est un upper bound de S dans A^{op}.
- ▷ Un élément $a \in A$ est un *greatest lower bound* (*glb*, *inf*) de S ssi a est un least upper bound de S dans A^{op}.

Exemple 2. Soit $S \subseteq \wp(X)$ alors le least upper bound de S dans $(\wp(X), \subseteq)$ est $\bigcup S \in \wp(X)$. Le greatest lower bound de S dans $(\wp(X), \subseteq)$ est $\bigcap S \in \wp(X)$.

Exemple 3. Soit $S \subseteq \Omega X$ alors le least upper bound dans $(\Omega X, \subseteq)$ est $\bigcup S \in \Omega X$. Le greatest lower bound dans $(\Omega X, \subseteq)$ n'existe pas forcément.

Exemple 4.