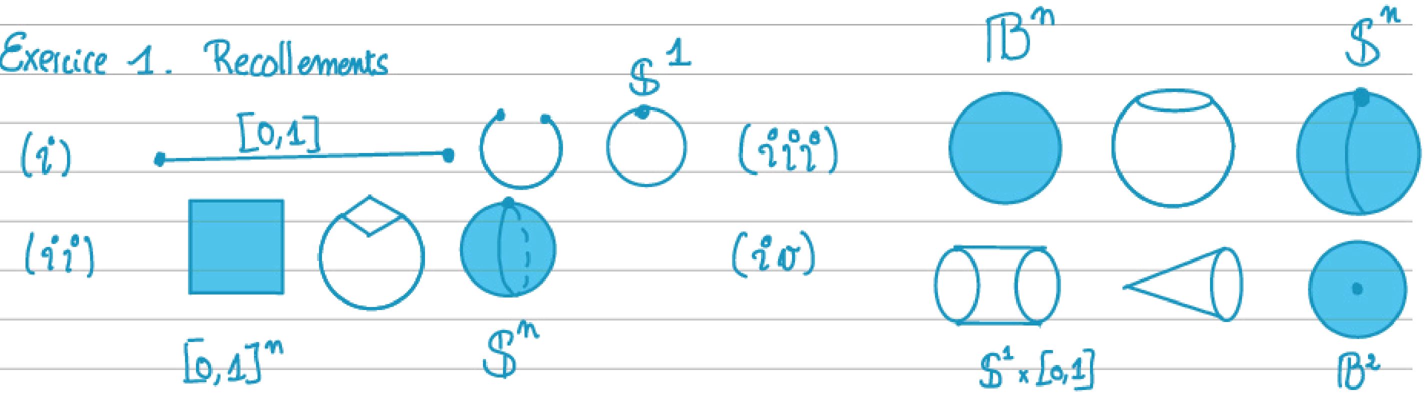
Chargé de TD
Antoine VELUT
MGN1 – 413

TD n° 1.

Homotopie & groupe fondamental.

Exercice 1. Recollements



Exercice 2. Equivalences d'homotopie

1) Soient $f, g, h \in \mathcal{C}(X,Y)$ et $F : f \simeq g$ et $G : g \simeq h$.

- Soit $H : X \times I \longrightarrow Y$, $(x, i) \longmapsto f(x)$. On a $H : f \simeq f$.

- Soit $\bar{F} : X \times I \longrightarrow Y$, $(x, i) \longmapsto F(x, 1-i)$. On a $\bar{F} : g \simeq f$.

- Soit $F \cdot G : X \times I \longrightarrow Y$
$$(x,t) \longmapsto \begin{cases} F(x, 2i) & \text{si } i \leq 1/2 \\ G(x, 2i-1) & \text{sinon} \end{cases}$$

On a $F \cdot G : f \simeq h$.

2) Soient $F_Y : f \circ \bar{f} \simeq id_Y$, $F_X : \bar{f} \circ f \simeq id_X$ et $G_Y : \bar{g} \circ g \simeq id_Y$, $G_Z : g \circ \bar{g} \simeq id_Z$. On pose $\overline{g \circ f} := \bar{f} \circ \bar{g}$. Notons $h := g \circ f$.

On pose $H_X := H'_X \cdot F_X$ où $H'_X : (x, i) \longmapsto \bar{f}(G_Y(f(x), i))$.

On a $H_X : \underset{\bar{f} \circ \bar{g} \circ g \circ f}{\underset{\shortparallel}{\bar{h} \circ h}} \simeq id_X$

$H_1 : \bar{f} \circ \bar{g} \circ g \circ f \simeq \bar{f} \circ f$

De même pour $h \circ \bar{h}$.

3). Soit $F : f \simeq g$ et g est une équivalence homotopique.

Soient $G_X : \bar{g}\circ g \simeq id_X$ et $G_Y : g\circ\bar{g} \simeq id_Y$.

On pose $\bar{f} := \bar{g}$. On a : $f\circ\bar{f} = f\circ\bar{g} \simeq g\circ\bar{g} \simeq id_Y$
$\bar{f}\circ f = \bar{g}\circ f \simeq \bar{g}\circ g \simeq id_X$.

Exercice 3. Espaces contractiles.

1) Supposons $X \simeq \{x_0\}$ où $x_0 \in X$. Soient $F : \bar{i}\circ i \simeq id_{\{x_0\}}$ et $G : i\circ\bar{i} \simeq id_X$ où i est l'inclusion et $\bar{i}$ la fonction constante x_0.

Alors $id_X \simeq i\circ\bar{i} = x \mapsto x_0$.

Réciproquement, si $id_X \simeq x \mapsto x_0$. On pose $i : x_0 \longmapsto x_0 \in X$.
$\bar{i} : x \longmapsto x_0$.

On a $\bar{i}\circ i = x_0 \longmapsto x_0 = id_{\{x_0\}}$ et $id_X \simeq i\circ\bar{i}$.

2) Supposons $id_X \simeq x \mapsto x_0 \in X$.

On a $f = f\circ id_X \simeq x \mapsto f(x_0) \underset{F}{\simeq} x \mapsto g(x_0) \simeq g\circ id_X = g$.

où $F : Y\times I \longrightarrow Y$
$(-, t) \longmapsto p(t)$

où $p : f(x_0) \rightsquigarrow g(x_0)$.

3) Soient $x, y \in X$. Les fonctions constantes x et y sont homotopes d'où on a un chemin de x à y.

4) Posons $i : \underset{\{c_0\}}{\overset{\cap}{c_0}} \longmapsto \underset{C}{\overset{\cap}{c_0}}$ et $\bar{i} : x \longmapsto c_0$.

On a $\bar{i}\circ i = id_{\{c_0\}}$ et définissons $F : C\times I \longrightarrow C$
$(c, t) \longmapsto \underbrace{c_0(1-t) + ct}_{\in [c_0, c] \subseteq C}$.

On a $F : id_C \simeq c \mapsto c_0 = i\circ\bar{i}$.

D'où $C \simeq \{c_0\}$.

5) Considérons X une partie convexe non-vide de $\mathbb{R}^n$. C'est une partie étoilée de $\mathbb{R}^n$ d'où contractile.

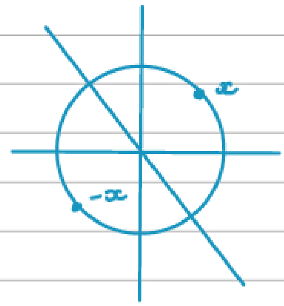
6) Supposons X non vide. Soit $x \in X$.

Considérons $i : \{*\} \longrightarrow CX$ et $\bar{i} : CX \longrightarrow \{*\}$.
$* \longmapsto (x, 0)$ $\qquad$ $- \longmapsto *$

On a $\bar{i} \circ i \simeq id_{\{*\}}$. Construisons $i \circ \bar{i} = \_ \mapsto (x,0) \simeq id_{CX}$.

$$F : CX \times I \longrightarrow CX$$
$$(x,u,v) \longmapsto (x, \min(u,v))$$

On a $F(-,0) = - \mapsto (x,0) = i \circ \bar{i}$.
$F(-,1) = id_X$



Exercice 4. Supposons n impair.

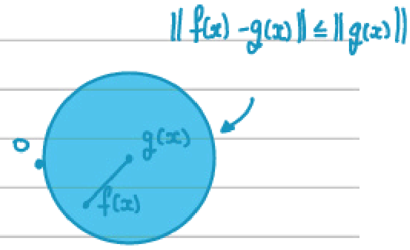
Soit $F : S^n \times I \longrightarrow S^n$
$(x,t) \longmapsto$

Exercice 5. Exemples d'homotopie

1) Soient x et y deux points de X.
Montrons que $f(x)$ et $g(y)$ sont dans la même comp connexe de Y.

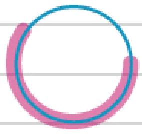
Soit $p : x \rightsquigarrow y$ un chemin et soit $F : f \simeq g$.

On a $\underset{f \circ p}{f(x) \rightsquigarrow f(y)} \underset{F(y,-)}{\rightsquigarrow} g(y)$.



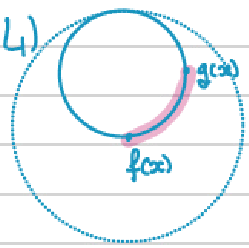
2) On a $Y = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et $\forall x \in X$, $\|f(x) - g(x)\| < \|g(x)\|$.
On a, pour tout $x \in X$, $[f(x), g(x)] \subseteq \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.
D'où on a $F : f \simeq g$ avec
$F : (x,t) \longmapsto (1-t) f(x) + t\, g(x)$.

3) Supposons $Y = S^n$ et qu'il existe $y \in S^n$ tel que $y \notin f(X)$.



On a donc que $f(X)$ est contractile, d'où $f \simeq \_ \mapsto f(x_0)$ où $x_0 \in X$.
(car $S^n \setminus \{y\}$ l'est car $S^n \setminus \{y\} \equiv \mathbb{R}^n$ par projection stéréographique).

4)



Les points $f(x)$ et $g(x)$ ne sont pas antipodaux. On considère

$$H : (x,t) \longmapsto \frac{(1-t) f(x) + t\, g(x)}{\|(1-t) f(x) + t\, g(x)\|} \in S^1$$

et on a $H : f \simeq g$.

On pose $g(x) := -x$. On a $\|f(x) - g(x)\| = \|\underbrace{f(x)+x}_{\neq x}\| < 2$ d'où $f \simeq id_{\mathbb{S}^n}$.

Exercice 6. Retracts par déformation.

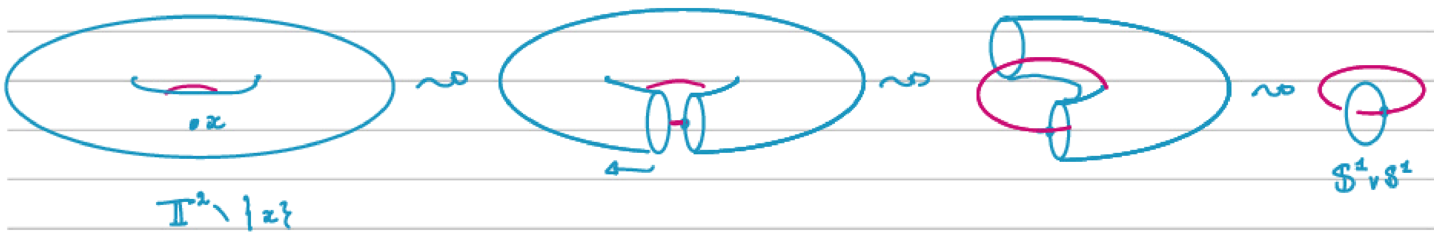
1) Soit $r : X \longrightarrow A$ une rétraction et $F : r \simeq id_X$ rel A.
On pose $i : A \hookrightarrow X$ l'inclusion
et $\bar{\imath} = r : X \longrightarrow A$.
On a bien :
$$\bar{\imath} \circ i = r_{|A} = id_A \quad \text{et} \quad i \circ \bar{\imath} = r \simeq id_X$$

2) Définissons $r : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{S}^{n-1}$.
$$x \longmapsto x / \|x\|_2$$

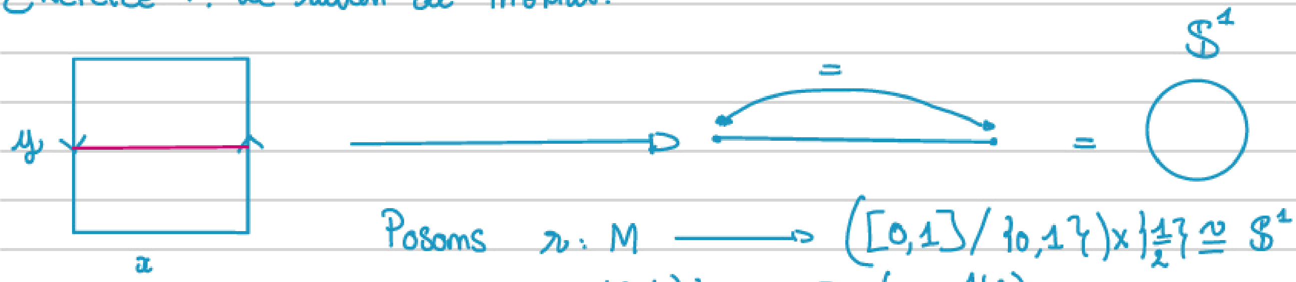
On a bien $r_{|\mathbb{S}^{n-1}} = id$ et on a aussi $F : r \simeq id_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}}$ rel $\mathbb{S}^{n-1}$

avec
$$F : (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \times \mathbb{I} \longrightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$
$$(x, t) \longmapsto x\,(1 - t + t/\|x\|)$$

3).



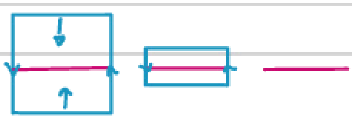
Exercice 7. Le ruban de Möbius.



Posons $r : M \longrightarrow ([0,1]/\{0,1\}) \times \{\frac{1}{2}\} \simeq \mathbb{S}^1$
$$(x,y) \longmapsto (x, 1/2)$$

avec $r(0, s) = (0, 1/2)$ et $r(1, 1-s) = (1, 1/2)$
qui sont identifiés.

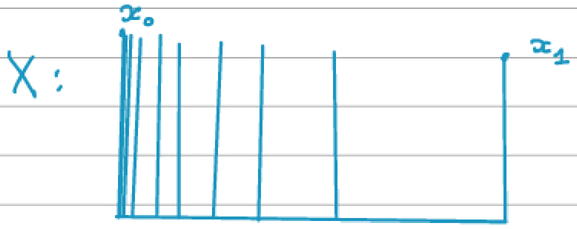
Posons $F : M \times \mathbb{I} \longrightarrow M$
$$(x, y, t) \longmapsto (x, (y - \tfrac{1}{2}) \times t + \tfrac{1}{2})$$



On a bien $F : r \simeq id_M$ rel A.

Exercice 8. Exemple pathologique : Le peigne

1) X :



2) Montrons que $id_X \simeq (1,0)$

Pour cela, montrons $id_X \simeq \overbrace{(a,b) \mapsto (a,0)}^{p_1}$ puis $p_1 \simeq (1,0)$.

Soit

$$F : X \times I \longrightarrow X$$
$$(a,b,t) \longmapsto (a, tb)$$

et on a $F : p_1 \simeq id_X$ (rel $[0,1]\times\{0\}$).

Puis,

$$G : X \times I \longrightarrow X$$
$$(a,b,t) \longmapsto (a-ta+t,\ b)$$

et on a $G : p_1 \simeq (1,0)$.

3) On a que X se rétracte par déformation en $[0,1] \times \{0\} \cup \{1\} \times [0,1] = A$

avec $r : X \longrightarrow A$

$$(1,b) \longmapsto (1,b)$$
$$\underset{a \neq 1}{(a,b)} \longmapsto (a,0).$$

On a $r_{|A} = id_A$ et on peut définir $F : r \simeq id_X$ rel A

$$F(a,b,t) := \begin{cases} (1,b) & \text{si } a = 1 \\ (a, tb) & \text{sinon.} \end{cases}$$

De plus, A se rétracte par déformation en $\{1\} \times [0,1] = B$:

$$r' : X \longrightarrow B$$
$$(a,b) \longmapsto (1,b)$$

et

$$F' : A \times I \longrightarrow A$$
$$(a,b,t) \longmapsto ((1-t)a + t,\ b).$$

Supposons avoir $F : (0,1) \simeq id_X$ rel $(0,1)$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$\gamma_n := F(\frac{1}{n}, 1, -) : (0,1) \rightsquigarrow (\frac{1}{n}, 1)$

et cette suite de chemin doit converger uniformément vers le chemin constant.

Absurde par

$$\lim \ell(\gamma_n) = 2 \neq \ell(\lim \gamma_n) = 0.$$

Exercice 9. Composantes connexes.

On pose

$$f : \pi_0(X) \longrightarrow \{\text{Comp. connexes de } X\}$$
$$[u] \longmapsto \text{Comp. connexe de } u(1).$$

Injectivité : si x et y sont dans la même comp. connexe, alors il existe $p : x \rightsquigarrow y$ et on a

$$F : \{1\} \times I \longrightarrow X$$
$$(1,t) \longmapsto p(t)$$

qui vérifie $(1 \mapsto x) \simeq (1 \mapsto y)$.

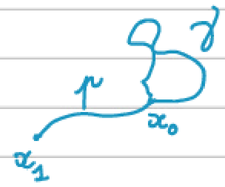
Surjectivité. Si $x \in X$ alors considérons
la fonction $1 \longmapsto x$
et on a bien la surjectivité

On a $[S^0, 1; X, x_0] \cong [\{1\}, 1; X, x_0]$.

Exercice 10. Groupe fondamental.

1) On a que
$$(p \cdot q) \cdot r \simeq p \cdot (q \cdot r)$$
$$p \cdot \bar{p} \simeq \varepsilon_{p(0)}$$
$$\bar{p} \cdot p \simeq \varepsilon_{p(1)}$$
$$p \cdot \varepsilon_{p(1)} \simeq p$$
$$\varepsilon_{p(0)} \cdot p \simeq p$$
d'où $\pi_1(X, x_0)$ est un groupe.

2) Soit $p : x_1 \rightsquigarrow x_0$. On a que



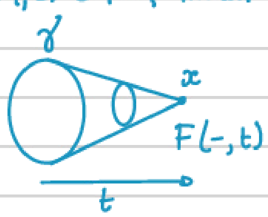
$$\begin{array}{ccc} [\gamma] & \longmapsto & [p \cdot \gamma \cdot \bar{p}] \\ \pi_1(X, x_0) & \longrightarrow & \pi_1(X, x_1) \end{array}$$
est un isomorphisme de groupes.

3) On pose $f_*([\gamma]) := [f \circ \gamma]$.

Si f est une équivalence d'homotopie, alors f_* est un iso : sa réciproque est $\bar{f}_*$ car
$$[f \circ \bar{f} \circ \gamma] = [\gamma] \quad \text{et} \quad [\bar{f} \circ f \circ \gamma] = [\gamma].$$

4) Si $X \simeq \{1\}$ alors $\pi_1(X, x) \cong \pi_1(\{1\}, 1) \cong \{1\}$ trivial.

5) Soit $\gamma : S^1 \longrightarrow X$.



$$[\gamma] = 1 \iff \exists F : \gamma \simeq x$$
$$\overset{(*)}{\iff} \exists G : \mathbb{B}^2 \longrightarrow X, \quad G|_{S^1} = \gamma$$

$(*) \Rightarrow$ Si $F : \gamma \simeq x$ alors
$G(r, \theta) := F(\theta, r)$ avec $\theta \in [0,1]/_{\{0,1\}}$
et $G(1, \theta) = F(\theta, 1) = \gamma(\theta)$

$\Leftarrow$ Si $G : \mathbb{B}^2 \longrightarrow X$ tq $G|_{S^1} = \gamma$
alors
$F : (\theta, t) \longmapsto G(t, \theta)$
est $F : \gamma \simeq x$.

6) c.f. Q 2.

7) $$f : \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \longrightarrow \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$$
$$[\gamma] \longmapsto ([pr_1 \circ \gamma], [pr_2 \circ \gamma]).$$

et $$g : \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0) \longrightarrow \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0))$$
$$([\gamma], [\alpha]) \longmapsto [t \longmapsto (\gamma(t), \alpha(t))] = [\langle \gamma, \alpha \rangle]$$

sont des morphismes inverses l'un de l'autre, d'où l'isomorphisme.

Si $F : p \simeq q$ où $p, q \in \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0))$ alors

$$F_1 : X \times \mathbb{I} \longrightarrow X$$
$$(x, t) \longmapsto pr_1(F(x, y_0, t))$$

et $$F_2 : Y \times \mathbb{I} \longrightarrow Y$$
$$(y, t) \longmapsto pr_2(F(x_0, y, t))$$

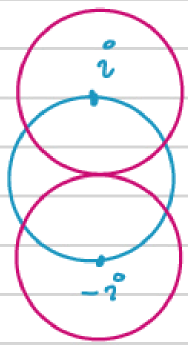
vérifient $F_1 : pr_1 \circ p \simeq pr_1 \circ q$ et $F_2 : pr_2 \circ p \simeq pr_2 \circ q$.

Inversement, si $F_1 : p_1 \simeq q_1$ et $F_2 : p_2 \simeq q_2$ alors

$$F : \langle p_1, q_1 \rangle \simeq \langle p_2, q_2 \rangle \in \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0))$$

avec $$F : X \times Y \times \mathbb{I} \longrightarrow X \times Y$$
$$(x, y, t) \longmapsto (F_1(x, t), F_2(y, t)).$$

Exercice 11. Groupe fondamental du cercle.



1) a) Par uniforme continuité de γ, il suffit de considérer $\varepsilon = 1 < 2$ pour avoir $\eta \in \mathbb{R}^+$ tel que

$$\forall t \in [0,1], \forall t' \in]t-\eta, t+\eta[\cap [0,1],$$
$$|\gamma(t) - \gamma(t')| \leq 1$$

d'où avec $n := \lfloor 1/\eta \rfloor \in \mathbb{N}^*$, on a bien la propriété demandée.

b) Par Q 1a, on a que $\gamma_{|[0, 1/n]} : [0, 1/n] \longrightarrow S^1 \setminus \{(-1)^? i\} \cong [0,1]$.

$\overset{p}{\longrightarrow} [m, m+1]$ ($\cong$)

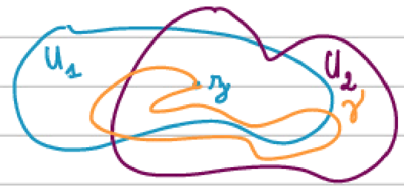
et donc il suffit de considérer $\tilde{\gamma} = p \circ \gamma_{|[0, 1/n]}$ qui vérifie bien que $e \circ \tilde{\gamma} = \gamma$ et $\tilde{\gamma}(0) = m$.

c) Par récurrence sur n, on peut construire $\tilde{\gamma}$ en choisissant $m_{n+1} = \tilde{\gamma}_n(1)$
$\cap \mathbb{Z}$.
et $m_0 = m$.

2)

...flemme...

Exercice 13. Théorème de Van Kampen.

1) 

$X = U_1 \cup U_2$

On considère $[\gamma] \in \pi_1(X, y)$.

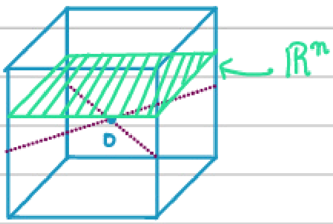
On découpe γ en $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ (par continuité de γ et compacité de I)

telle que $\gamma_i([0,1]) \subseteq U_1$ ou U_2.
et $\gamma_i(0), \gamma_i(1) \in U_1 \cap U_2$.

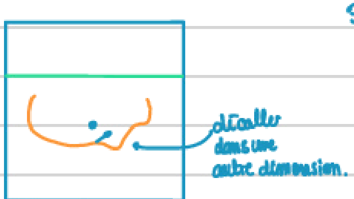
Alors on a fini.

2) On a S^n équiv. hom. à $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$.
D'où $\pi_1(S^n) \cong \pi_1(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\})$.

Si $\gamma \in \pi_1(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\})$ avec $n \geq 2$, alors $\gamma \simeq \varepsilon$.
En effet on peut projeter γ sur $\mathbb{R}^n \times \{1\}$ et c'est une homotopie. Là, $\pi_1(\mathbb{R}^n \times \{1\})$
$\cong \pi_1(\mathbb{R}^n) \cong \{1\}$



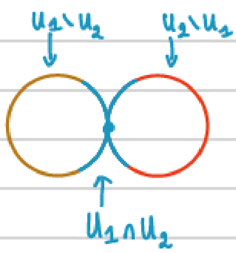
$\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$



Vue de coupe

Si $S^3 \cong S^2 \times S^1$ alors $\pi_1(S^3) \cong \pi_1(S^2) \times \pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$.
trivial trivial $\mathbb{Z}$

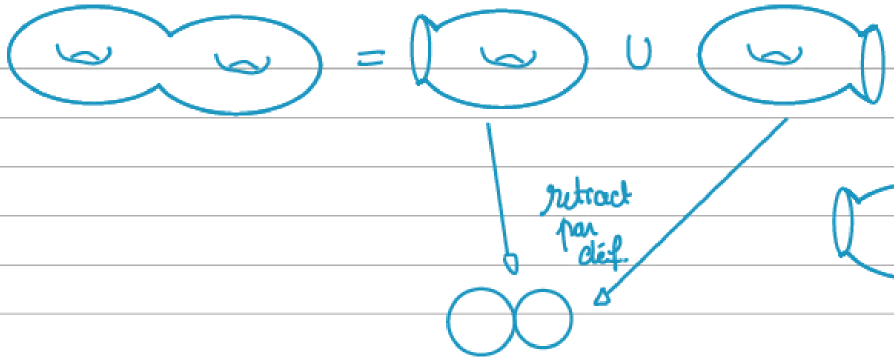
ce qui est absurde.

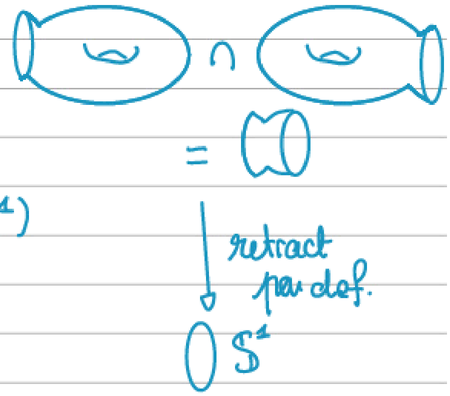
3) 

On considère ce découpage où $U_1 = \bigcirc\!\!\!\!\subset$ et $U_2 = \supset\!\!\!\!\bigcirc$.
Par Q1, on a que $\pi_1(S^1 \vee S^1) \cong \pi_1(U_1) * \pi_1(U_2)$.

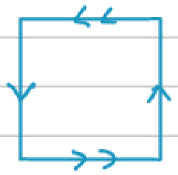
Et U_1 (resp. U_2) se déforme par retract en S^1, d'où

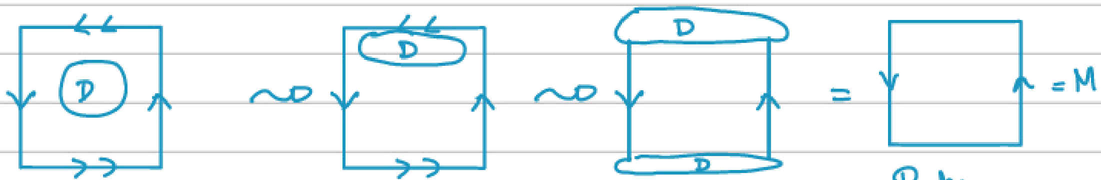
$\pi_1(S^1 \vee S^1) \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$.

4)


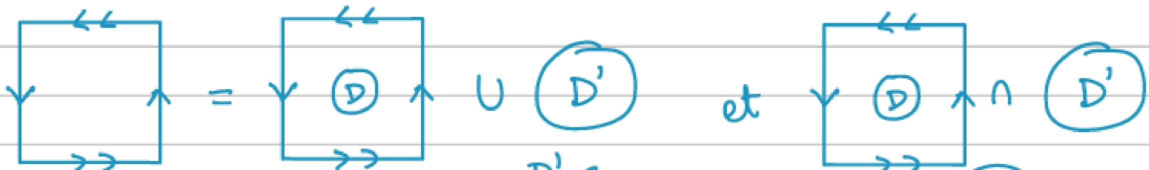


D'où $\pi_1(\Sigma_2) \cong \pi_1(S^1 \vee S^1) *_{\pi_1(S^1)} * \pi_1(S^1 \vee S^1)$
$\cong (\mathbb{Z} * \mathbb{Z}) *_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z} * \mathbb{Z})$
$\cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \mathbb{Z}.$

5) $\mathbb{R}P^2 =$


a)


$\mathbb{R}P^2 \setminus D$ Ruban de Möbius

b)


$D' \subseteq D$

On a $\pi_1(\mathbb{R}P^2) \cong \pi_1(M) *_{\pi_1(S^1)} \pi_1(D')$
$\cong \langle \ell^2 \rangle / \langle \ell \rangle$
$\cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$

Le cercle ℓ représente l'élément 1 et le bord ℓ^2 représente 0.

Exercice 14. Groupe fondamental d'un groupe.

1) Principe de Eckmann-Hilton.

$$\text{On a } (x \ \ y) = \left(\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ y \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} (x & 1) \\ (1 & y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

car les deux unités 1_a et 1_b sont égales :

$$1_a = (1_a \ \ 1_a) = \left(\begin{pmatrix} 1_a \\ 1_b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1_b \\ 1_a \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} (1_a & 1_b) \\ (1_b & 1_a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1_b \\ 1_b \end{pmatrix} = 1_b.$$

De plus $(x\ y)\cdot\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}(1\ \ x)\\(y\ \ 1)\end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix}1\\y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\end{pmatrix}\right) = (y\ \ x).$

2) Soit G muni de $\quad f \in \mathscr{C}(G\times G, G)$

$\qquad\qquad\qquad g \in \mathscr{C}(G, G)$

$\qquad\qquad\qquad 1 \in G.$

Alors f s'étend en $\underbrace{\pi_1(G,1)\times\pi_1(G,1)}_{\pi_1(G^2,(1,1))} \xrightarrow{f_*} \pi_1(G,1).$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
f_*(x,y)\cdot f_*(x',y') &= [f\circ\langle x,y\rangle]\cdot[f\circ\langle x',y'\rangle] && \text{-}\cdot\text{- passe au quotient}\\
&= [f\circ\langle x,y\rangle \cdot f\circ\langle x',y'\rangle] && \text{par def de -}\cdot\text{-}\\
&= [f\circ(\langle x,y\rangle\cdot\langle x',y'\rangle)] && \text{Q7 ex 10}\\
&= [f\circ\langle x\cdot x', y\cdot y'\rangle]\\
&= f_*(x\cdot x', y\cdot y')
\end{aligned}$$

d'où par Eckmann-Hilton, $\pi_1(G,1)$ est abélien.