Homotopies

homotopie, classes d'homotopies

Soient X et Y deux espaces topo. — toutes les topos seront supposées séparées

On note $\mathcal{C}(X,Y)$ l'ensemble des app. continues $f : X \to Y$.

Il est muni de la topologie "compacte-ouverte" où une sous-base sont les ouverts

$$\mathcal{U}(K,V) = \{ f \in \mathcal{C}(X,Y) \mid f(K) \subseteq V \}$$

où $K \subseteq V$ est compact et $V \subseteq Y$ un ouvert.

$A \subseteq \mathcal{C}(X,Y)$ est ouvert ssi $\forall f_0 \in A, \exists (K_i, V_i)_{i \in I}$ fini

tq $$\underbrace{\bigcap_{i \in I} \mathcal{U}(K_i, V_i)}_{\substack{\cup \\ f_0}} \subseteq A$$

On note $I = [0,1]$ $(\subseteq \mathbb{R})$ le segment.

Si $f, g \in \mathcal{C}(X,Y)$, une <u>homotopie</u> de f à g est

$$F \in \mathcal{C}(X \times I, Y)$$

telle que

$$F(\cdot, 0) = f \quad \text{et} \quad F(\cdot, 1) = g \qquad F$$

Si X est "raisonnable" alors

(F homotopie $\iff$ $x \mapsto F(x, -)$ continue.

On note alors $F : f \simeq g$. S'il existe une hom. de f à g, on dit que f est homotope à g noté $f \simeq g$. On définit une relation sur $\mathcal{C}(X,Y)$ qui est une relation d'équivalence via

. la concaténation $F : f \simeq g$, $G : g \simeq h$

$$(F * G)(x,t) = \begin{cases} F(x, 2t) & \text{si } t \leq 1/2 \\ G(x, 2t-1) & \text{si } t \geq 1/2 \end{cases}$$

$$F * G : f \simeq h.$$

On note $[X,Y]$ l'ens. des classes d'hom d'app. continues de X à Y.

$$[X,Y] := \mathcal{C}(X,Y)/\simeq$$

On note $[f]$ la classe d'hom de f.

Si f est hom à une app constante y_0, on dit que f est hom à zéro, nulhomotopique.

Si X est muni d'un point de base x_0 ((X,x_0) est un espace pointé), on définit

$$F : f \simeq g \text{ rel } x_0 \iff F : f \simeq g \text{ et } F(x_0,t) = f(x_0).$$

Si (Y, y_0) est aussi pointé, on définit

$$[X, x_0 ; Y, y_0] = \mathcal{C}(X, x_0 ; Y, y_0)/\simeq \text{ rel } x_0$$

$\hookrightarrow f(x_0) = y.$

De même, si $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$ alors on définit

$$\mathcal{C}(X, A; Y, B) = \{ f \in \mathcal{C}(X, Y) \mid f(A) \subseteq B \}.$$

et $[X, A; Y, B]$ ...

Cas des variétés différentiables

Si X et Y sont des variétés différentiables on note

$$\mathcal{C}^\infty(X, Y) \subseteq \mathcal{C}(X, Y)$$

l'ens. des app $\mathcal{C}^\infty$ de X à Y.

On définit la notion d'homotopie $\mathcal{C}^\infty$:

$$F : f \simeq_{\mathcal{C}^\infty} g \quad \text{ssi} \quad F : f \simeq g \quad \text{et} \quad F \in \mathcal{C}^\infty$$

On note alors $[X, Y]_{\mathcal{C}^\infty} = \mathcal{C}^\infty(X, Y) / \simeq_{\mathcal{C}^\infty}$

<u>Fait</u> l'appli $[X, Y]_{\mathcal{C}^\infty} \longrightarrow [X, Y]$ est bijective.

Idée de la preuve

1) Si $f_0 \in \mathcal{C}(X, Y)$, $\exists f \in \mathcal{C}^\infty(X, Y)$ arbitrairement proche de f en topologie $\mathcal{C}^0$. Si $Y \subseteq \mathbb{R}^N$ (toujours vrai par Whitney), on veut $\forall \varepsilon \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R}_+^*)$, $\exists f \in \mathcal{C}^\infty(X, Y)$

$$(*) \qquad \| f(x) - f_0(x) \| \leq \varepsilon(x)$$

2) Si Y est muni d'une métrique riemanienne complète,

$(*) \Rightarrow$ il existe un unique chemin géodésique

On pose

$$\gamma_t(x) = \text{"} (1-t)\, f_0(x) + t\, f(x) \text{"} \qquad F(-,t) = \gamma_t$$

et on a $F : f \simeq f_0$.

Espaces compactement engendrés.

Idée. On définit une classe d'espaces "raisonnables" vérifiant que quels que soient X et Z, pour Y raisonnable, l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}(X \times Y, Z) & \longrightarrow & \mathcal{C}(X, \mathcal{C}(Y, Z)) \\ f & \longmapsto & x \mapsto f(x,-) \end{array}$$

est une bijection, et même un homéomorphisme.

<u>Corollaire</u> Si X est raisonnable $\mathcal{C}(X \times I, Y) \equiv \mathcal{C}(I, \mathcal{C}(X, Y))$

<u>Def.</u> Un espace topologique X est compactement engendré si $\forall A \subseteq X$,

A ouvert $\Leftrightarrow$ $A \cap K$ est ouvert dans K $\forall K \subseteq X$ compact

$\Big($ A fermé $\iff$ $A \cap K$ est fermé dans K
$\forall K \subseteq X$ compact

Exemples

1) Si X est métrisable (ou plus généralement à base dénombrable), X est compactement engendré : en effet, si $x_n \to x_\infty$

$K = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{x_\infty\}$ est compact.

2) Si X est localement compact, X est compactement engendré.

Remarque X compactement engendré $\iff$ X est un quotient séparé d'un espace localement compact.

3) Tout espace cellulaire (ou CW-complexes) est compactement engendré.

Prop Si Y est compactement engendré, $\forall X, \forall Z$,

$$\mathcal{C}(X \times Y, Z) \equiv \mathcal{C}(X, \mathcal{C}(Y, Z))$$

$\hookrightarrow$ homéomorphisme

Exemples d'espaces non compactement engendrés

1) $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R}) \subseteq (0,1)^{\mathbb{R}}$ muni de la convergence simple

2) $X = \left(\bigvee_{n \in \mathbb{N}} S^1_n\right) \times \left(\bigvee_{t \in \mathbb{R}} S^1_t\right)$

Exemples d'ensembles de classes d'homotopie

1) Si X est quelconque et $\{*\}$ un espace réduit à un point,

$$[\{*\}, X] = \pi_0(X) = \{\text{comp. connexes}_{\wedge\,\text{par arcs}} \text{ de } X\}.$$

Si $n \in \mathbb{N}$, on note $S^n = \{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum x_i^2 = 1\}$.

$p_n = (1, 0, \dots, 0) \in S^n$

$S^0 =$

$S^1 =$

Si (X, x_0) est pointé, on a

$$[S^0, p_0 ; X, x_0] = \pi_0(X, x_0)$$

↳ ensemble $\pi_0(X)$ pointé avec la comp. connexe de x_0.

2) Si (X, x_0) est connexe par arcs, on a

$$[S^1, p_1 ; X, x_0] = \pi_1(X, x_0)$$

c'est le groupe fondamental de X en x_0.

Rappelons que si $x_1 \in X$ (même comp connexe par arc que celle de x_0), on a un isomorphisme

$$\pi_1(X, x_0) \xrightarrow{\sim} \pi_1(X, x_1)$$

par conjugaison. On a $[S^1, X] = \pi_1(X, x_0)/_{\text{conj}} = \pi_1(X)/_{\text{conj}}$.

(classes d'homotopie libre de lacets)

Avec $X = \infty$, on a $\pi_1(X) = \mathbb{F}_2$
↳ groupe libre à 2 générateurs

3) Si X est raisonnable,

$$[X, Y] = \pi_0(\mathcal{C}(X,Y))$$

en effet,

$$f \simeq g \iff \exists\, c \in \mathcal{C}(I, \mathcal{C}(X,Y)) \text{ tq } \begin{array}{l} c(0) = f \\ c(1) = g \end{array}$$

Type d'homotopie, invariants d'homotopie.

<u>Déf.</u> Si X et Y sont deux espaces, une application $f \in \mathcal{C}(X,Y)$ est une <u>équivalence d'homotopie</u> (<u>homéotopie</u>) s'il existe $g \in \mathcal{C}(Y,X)$ telles que

$$g \circ f \simeq id_X \qquad f \circ g \simeq id_Y.$$

On dit que g (qui est aussi une éq. d'hom.) est un inverse homotopique à f.

La relation "il existe une équivalence d'homotopie de X à Y" note $X \simeq Y$ est une relation d'équivalence. Une classe d'homotopie est un type d'homotopie

$$X \simeq Y \iff X \text{ et } Y \text{ ont le même type d'homotopie.}$$

On obtient ainsi un foncteur

$$\mathcal{T}op \longrightarrow \mathcal{T}yp$$

$$\mathcal{C}(X,Y) = \mathrm{Hom}(X,Y) \longmapsto \mathrm{Hom}([X],[Y]) = [X,Y]$$

$$\mathcal{C}(X,Y) \times \mathcal{C}(Y,Z) \to \mathcal{C}(X,Z) \longmapsto \begin{array}{l} [X,Y] \times [Y,Z] \longrightarrow [X,Z] \\ [f],\ [g] \longmapsto [g \circ f]. \end{array}$$

Un invariant d'homotopie est un foncteur $\begin{aligned} \mathrm{Top} &\longrightarrow \mathcal{C} \\ X &\longmapsto i(X) \end{aligned}$ où

$\mathcal{C}$ est une catégorie, par exemple, de groupes, de modules, de modules gradués) qui factorise à travers Typ:

$$X \longmapsto i(X)$$

$$X \simeq Y \longmapsto i(X) \cong i(Y)$$

$$[X,Y] \xrightarrow{i} \mathrm{Hom}(i(X), i(Y))$$

$$i(g \circ f) = i(g) \circ i(f).$$

Rétraction, rétraction par déformation

__Def__ Soit $A \subseteq X$ un fermé dans un espace X. Une rétraction de X sur A est $r \in \mathcal{C}(X,A)$ telle que $r|_A = id_A$.

Une rétraction par déformation de X sur A est $R \in \mathcal{C}(X \times I, X)$ telle que

$$R(-,0) = id_X \qquad R(x,1) \in A \quad \forall x \in X,$$

$$R(a,t) = a \quad \forall a \in A, \ \forall t \in I.$$

Une rétraction par déformation faible de X sur A est $R \in \mathcal{C}(X \times I, X)$ tq

$$R(-,0) = id_X \qquad R(x,1) \in A \quad \forall x \in X,$$

$$R(a,1) = a$$

Autrement dit, une restriction par déformation faible est une hom. de id_X à une rétraction de X en A.

C'est une retraction par déformation si elle est relative à A.

On dit que A est un rétrat (par deformation) de X.

En particulier, un rétract par deformation faible est une équivalence d'homotopie de X à A dont l'inclusion $A \hookrightarrow X$ est un inverse homotopique.

<u>Exemple</u>

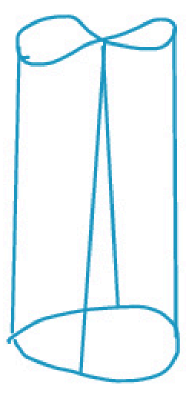
(i) Tout point $x \in X$ est un rétract de X.

(ii) Tout sous-espace $X \times \{y\} \subseteq X \times Y$ est un retract de $X \times Y$.
C'est un rétract par deformation si $Y = \mathbb{R}^n$.

(iii) En particulier $S^{n-1} \subseteq \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ est un rétract par déformation de $\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \equiv S^{n-1} \times (0, +\infty)$.

(iv) Le cylindre $M_f = ((X \times I) \sqcup Y) / (x,1) \sim f(x)$
où $f : X \to Y$

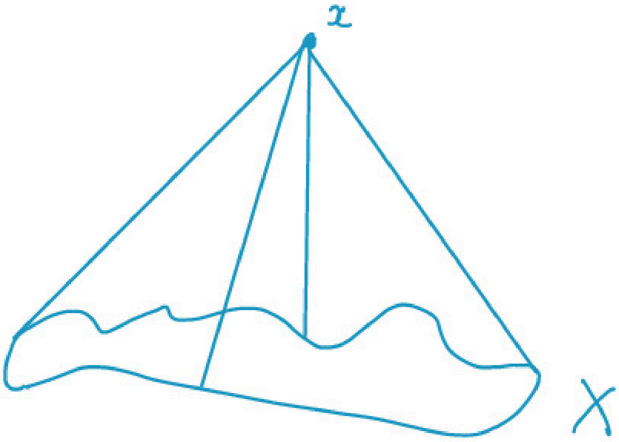
se rétracte par deformation sur Y



$$R([x,t], y) = [x, t + y(1-t)]$$
$$R(y,y) = y$$

En particulier, si $Y = \{*\}$, on obtient le cône CX

$$CX = (X \times I) / (x,1) \sim (x',1).$$



Espaces contractibles

Def. On dit que X est contractible s'il a le type d'homotopie d'un point. Autrement dit $x_0 \simeq \mathrm{id}_X$.

Def Un espace topologique X est fortement contractile si

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad [S^n, X] = \{*\}.$$

Si $n = 0$, ça veut dire X connexe par arcs.
Pour $n = 1$ on a $\pi_1(X) = \{1\}$. $\}$ simplement connexe.

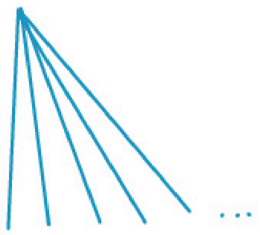
Exemples.

1) Tout convexe dans un ev contractible, il se retracte par def sur tout point.

2) Si X est un arbre, il se rétracte par déformation

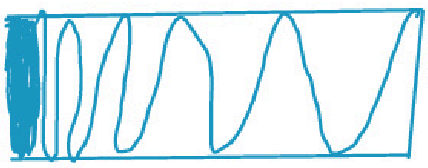
Inversement, si X est un graphe non-arbre, alors il n'est pas contractile car $\pi_1(X) \neq \{*\}$.

3) le cône CX se retract par déformation sur son sommet.

$X =$ 

<u>Fait</u> CX ne retract pas par déformation sur $(0, y)$ pour $y \in]0,1[$.

Exemple d'espace faiblement contractile mais non contractile



graphe de $\overbrace{\sin x / x}^{f : x \downarrow}$.

$$f(\mathbb{R}_+) = [0,1]$$

compact