Chapitre 5

Calcul intégral

Hugo Salou MP2I

Dernière mise à jour le 14 juin 2022

TABLE DES MATIÈRES

Première partie

Généralités

Définition: Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, f une fonction continue et $a, b \in I$.
On définit l'intégrale de f de a à b par

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)$$

où F est une primitive quelconque de f.
La variable x est muette :

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = \int_a^b f(u)\ \mathrm{d}u = \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = \int_a^b f(❀)\ \mathrm{d}❀ \neq \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}t$$

Proposition (Croissance)**:** Soient f et g continues sur I, $a, b \in I^2$ tels que $\begin{cases} \forall x \in I, f(x) \leqslant g(x), \\ a \leqslant b. \end{cases}$
Alors

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x.$$

■

Proposition (Linéarité)**:** Soient f et g continues sur I, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $a, b \in \mathbb{R}$. Alors,

$$\int_a^b \big(\alpha\, f(x) + \beta\, g(x)\big)\ \mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x + \beta \int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x.$$

■

Proposition (Chasles)**:** Soit f continue sur un interval I, $a, b, c \in I$. Alors

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\ \mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\ \mathrm{d}x.$$

■

Proposition: Soit f positive et continue sur un interval I, $(a, b) \in I^2$ avec $a \leqslant b$.
Alors

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = 0 \iff \forall x \in [a, b], f(x) = 0.$$

■