Chapitre 6

Équations différentielle linéaire

Hugo Salou MP2I

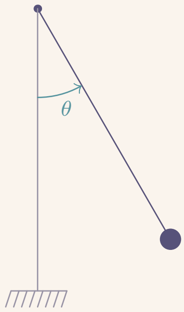
Dernière mise à jour le 14 juin 2022

TABLE DES MATIÈRES

Définition: Une équation différentielle est une égalité faisant intervenir une fonction inconnue y ainsi que ses dérivées successives $y', y'', y^{(3)}, \dots, y^{(n)}$.

Exemple: 1. $y^{(3)} + \ln\left(y'\right) = e^y$

2.



On a $\ddot{\theta} + \sin(\theta) = 0$ i.e. $\dfrac{d^2\theta}{dt^2} + \sin(\theta) = 0$

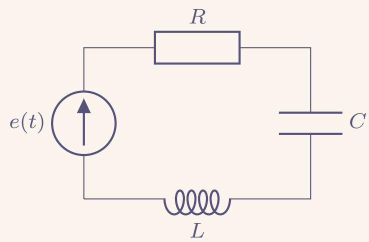
Pour les "petits angles", $\sin(\theta) \simeq 0$. On résout donc

$$\ddot{\theta} = -\theta$$

3.

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = e(t)$$

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q = e(t)$$



4. Modèle de population : $\dfrac{dN}{dt} = \lambda N(1-N)$

Définition: Une équation différentielle linéaire d'ordre n est de la forme

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_0 y = b(t)$$

où $b, a_0, a_1, \dots, a_n$ sont des fonctions connues et continues sur un intervalle I. On dit que b est le second membre de l'équation.

Exemple $(\cos(t)y'' + \sin(t)y' = \tan(t))$:

Proposition (Principe de superposition)**:** Soient b_1 et b_2 continues sur I. Soient $a_0, a_1, \dots, a_n$ également continues sur I.

$$(E_1) : \quad \sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)} = b_1$$

$$(E_2) : \quad \sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)} = b_2$$

Soient $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2$.

$$(E) : \quad \sum_{k=1}^{n} a_k y^{(k)} = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2$$

$$\left.\begin{array}{l} y_1 \text{ solution de } (E_1) \\ y_2 \text{ solution de } (E_2) \end{array}\right\} \implies \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 \text{ solution de } (E)$$

Preuve:
On pose $y = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$ dérivable n fois car c'est le cas de y_1 et y_2 Donc,

$$\forall k \in [\![0, n]\!]\,, y^{(k)} = \lambda_1 y_1^{(k)} + \lambda_2 y_2^{(k)}$$

D'où,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)} &= \sum_{k=0}^{n} a_k \left(\lambda_1 y_1^{(k)} + \lambda_2 y_2^{(k)}\right) \\ &= \lambda_1 \sum_{k=1}^{n} a_k y_1^{(k)} + \lambda_2 \sum_{k=1}^{n} a_k y_2^{(k)} \\ &= \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2\end{aligned}$$

□

Proposition: Soit (E) l'équation différentielle $\sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)} = b$ où $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sont des fonctions homogènes. L'équation homogène associée à (E) est

$$(H) : \sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)} = 0$$

Les solutions de (E) sont toutes de la forme $h + y_0$ où h est solution de (H) et y_0 solution de (E).

Preuve:
Soit y une solution de (E) et y_0 une solution particulière de (E). On pose $h = y - y_0$.
D'après le principe de superposition, h est une solution de (H).
Réciproquement, si h est une solution de (H) et y_0 une solution de (E) alors $h + y_0$ est aussi solution de (E). □

Théorème (Théorème de Cauchy)**:** Soit (E) une équation linéaire différentielle.

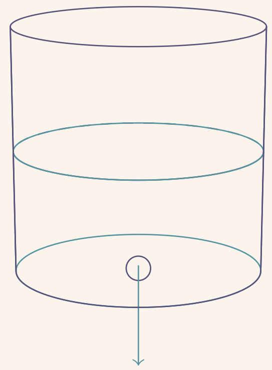
$$(E) : \quad y^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k y^{(k)} = b$$

où $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sont continues sur un intervalle I.
Soit $t_0 \in I$ et $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{C}^n$.
Il existe **une et une seule** fonction y telle que

$$\begin{cases} y \text{ solution de } (E) \\ \forall i \in [\![0, n-1]\!]\,, y^{(i)}(t_0) = \alpha_i \end{cases}$$

Exemple:
On ne peut pas déduire le passé d'un sceau percé, son équation est non-linéaire.

$$h' = -c\sqrt{h} \text{ avec } c \in \mathbb{R}_*^+$$



Première partie

Soit (E) l'équation $y' + ay = b$ où a et b sont continues sur un intervalle I.

Proposition: Soit A une primitive de a sur un intervalle I.

$$(H): \quad y' + ay = 0$$

Les solutions de (H) sont $t \mapsto \lambda e^{-A(t)}$ avec $\lambda \in \mathbb{C}$

Preuve:
Soit y une fonction dérivable sur I. On pose

$$z : t \mapsto y(t)e^{A(t)}$$

dérivable sur I et

$$\begin{aligned}\forall t \in I, z'(t) &= y'(t)e^{A(t)} + y(t)A'(t)e^{A(t)} \\ &= \big(y'(t) + a(t)y(t)\big)\, e^{A(t)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y \text{ solution de } (H) &\iff \forall t \in I, y'(t) + a(t)y(t) = 0 \\ &\iff \forall t \in I, z'(t) = 0 \\ &\iff \exists \lambda \in \mathbb{C}, \forall t \in I, z(t) = \lambda \\ &\iff \exists \lambda \in \mathbb{C}, \forall t \in I, y(t) = \lambda e^{-A(t)} \end{aligned}$$

□

Remarque (pseudo preuve):

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} + a(t)y = 0 &\iff \frac{dy}{y} = -a(t)dt \\ &\iff \int \frac{dy}{y} = \int -a(t)dt \\ &\iff \ln(y) = -A(t) + K \\ &\iff y = e^{-A(t)+K} \\ &\iff y = \lambda e^{-A(t)} \text{ avec } \lambda = e^K \end{aligned}$$

Deuxième partie

Annexe

$y : I \to E$ où E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

$$\begin{aligned}(*) : \quad & y' + a(x)y = 0 \text{ et } y(x_0) = 0 \\ \iff & \forall x \in I, y(x) = -\int_{x_0}^{x} a(u)y(u)\ du\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}T : E^I &\longrightarrow E^I \\ y &\longmapsto \left(x \mapsto -\int_{x_0}^{x} a(u)y(u)\ du\right)\end{aligned}$$

donc $(*) \iff T(y) = y$