Chapitre 23

Dénombrement

Hugo Salou MP2I

Dernière mise à jour le 14 juin 2022

TABLE DES MATIÈRES

Première partie

Cardinal d'un ensemble

Lemme: Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geqslant 2$, et $X \subsetneq [\![1,n]\!]$ avec $X \neq \varnothing$ ($\subsetneq$ signifie inclus et différent).

Alors
$$\exists\, 0 < p < n, \exists f : X \to [\![1,p]\!] \text{ bijective }.$$

■

Lemme: Soient n, p deux entiers non-nuls et $f : [\![1,p]\!] \to [\![1,n]\!]$ une surjection. Alors $p \geqslant n$.

■

Lemme: Soient $n \geqslant 1$ et $p \geqslant 1$, $f : [\![1,p]\!] \to [\![1,n]\!]$. Alors $p \leqslant n$.

■

Corollaire: Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$ et $f : [\![1,n]\!] \to [\![1,p]\!]$ bijective. Alors $n = p$

Définition: Soit X un ensemble. On dit que X est <u>fini</u> si $X = \varnothing$ ou s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et une bijection $f : X \to [\![1,n]\!]$.

Soit X un ensemble fini. Le <u>cardinal</u> de X est

- 0 si $X = \varnothing$
- sinon, c'est le seul entier $n \in \mathbb{N}^*$ pour lequel il existe une bijection de X dans $[\![1,n]\!]$.

On le note $\text{Card}(X)$, $\#X$ ou $|X|$.

Proposition: Soit E un ensemble fini et $X \in \mathscr{P}(E)$.

Alors X est fini et $\#X \leqslant \#E$.

Si $\#X = \#E$, alors $X = E$.

■

Proposition: Soit E un ensemble fini, $(A,B) \in \mathscr{P}(E)^2$ tel que $A \cap B = \varnothing$.

Alors
$$\#(A \cup B) = \#A + \#B.$$

■

Proposition: Soient E un ensemble fini, $n \in \mathbb{N}^*$, $(A_1, \dots, A_n) \in \mathscr{P}(E)^n$ telles que
$$\forall i \neq j, A_i \cap A_j = \varnothing.$$

Alors
$$\#\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \#A_i$$

■

Proposition: Soient E un ensemble fini, $(A,B) \in \mathscr{P}(E)^2$. Alors

$$\#(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cap B).$$

■

Proposition: Soient E un ensemble fini, $(A,B) \in \mathscr{P}(E)^2$ avec $B \subset A$. Alors

$$\#(A \setminus B) = \#A - \#B.$$

□

Proposition: Soient E et F deux ensembles finis et $f : E \to F$.

1. Si f est injective, alors $\#E \leqslant \#F$,
2. Si f est surjective, alors $\#E \geqslant \#F$,
3. Si f est bijective, alors $\#E = \#F$,

■

Proposition (principe des tiroirs – pigeonhole principle)**:** Soit $f : E \to F$ telle que $\#E > \#F$. Alors

$$\exists (x,y) \in E^2, \begin{cases} x \neq y, \\ f(x) = f(y) \end{cases}$$

■

Proposition: Soit $E \to F$ où E et F sont finis et $\#E = \#F$.

$$f \text{ injective } \iff f \text{ surjective } \iff f \text{ bijective }.$$

■

Deuxième partie

Dénombrement

Proposition: Soient E et F deux ensembles finis. Alors $E \times F$ est fini et

$$\#(E \times F) = \#E \times \#F.$$

■

Proposition: Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $E_1, \ldots, E_n$ des ensembles finis. Alors $\prod_{i=1}^{n} E_i$ est fini et

$$\#\left(\prod_{i=1}^{n} E_i\right) = \prod_{i=1}^{n} (\#E_i).$$

■

Corollaire: Soit E un ensemble fini de cardinal n et $p \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$\#(E^p) = n^p.$$

En d'autres termes, il y a n^p p-listes de E, où une p-lise de E est un $(x_1, \ldots, x_p)$ de E^p.

Définition: Soit E un ensemble fini et $p \in \mathbb{N}^*$. Un p-arrangement de E est une p-liste de E d'éléments deux à deux distincts :

$$(x_1, \ldots, x_p) \in E^p \text{ est un } p\text{-arrangement} \iff \forall i \neq j, x_i \neq x_j.$$

Proposition: Soit E un ensemble fini de cardinal n et $p \in \mathbb{N}^*$. Il y a exactement $\dfrac{n!}{(n-p)!}$ p-arrangements si $p \leqslant n$ et 0 si $p > n$.

■

Dans la preuve précédente, on a utilisé principe des bergers :

Lemme (principe des bergers)**:** Soit $f : E \to F$ surjective telle que

$$\exists k, \forall y \in F, \#\big(f^{-1}(\{-1\})\big) = k$$

En d'autres termes, tous les éléments de F ont le même nombre d'antécédants.

Si F est fini, alors

$$\#E = k\,\#F.$$

■

Proposition: Soit E un ensemble fini de cardinal n. Il y a $n!$ permutations de E.

■

Définition: Soit E un ensemble fini et $p \in \mathbb{N}^*$. Une <u>p-combinaison</u> de E est une partie de E de cardinal p.

Proposition: Soit E fini de cardinal n et $p \in \mathbb{N}^*$. Il y a exactement $\binom{n}{p}$ parties de E de cardinal p.

■

Corollaire:

$$\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2, \binom{n}{p} \in \mathbb{N}.$$

□

Proposition: Soit E et F deux ensembles finis. Alors F^E est fini et

$$\#(F^E) = (\#F)^{\#E}.$$

■

Proposition: Soit E fini de cardinal n. Alors $\#\mathscr{P}(E) = 2^n$.

■

Troisième partie

Preuves combinatoires

Proposition:

$$\forall k \leqslant n \in \mathbb{N}, \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

■

Proposition:

$$\forall k \leqslant n, \quad \binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}.$$

■

Proposition: Soit $(A, +, \times)$ un anneau, $(a, b) \in A^2$ tel que $a \times b = b \times a$. Alors

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

■