Chapitre 23

TD

Hugo Salou MP2I

Dernière mise à jour le 14 juin 2022

Table des matières

Exercice 1

Cours : $\#(E^n) = (\#E)^n$

On peut représenter un octet par un élément de $\{0, 1\}^8$. Il y a donc $2^8 = 256$ octets.

Exercice 2

0. On peut représenter un nombre de 4 chiffres comme un élément de $[\![0,9]\!]^4$; il y en a donc $10^4 = 10\,000$.
   On peut aussi représenter un tel nombre par un entier de $[\![0, 9\,999]\!]$; il y en a donc $10\,000$.
1. On représente un tel nombre par un élément de $[\![1,9]\!] \times [\![0,9]\!]^3$; il y en a $9 \times 10^3 = 9\,000$.
2. <u>Cours</u> :

$$\begin{aligned} A^n_{\#E} = \#\{(x_1,\ldots,x_n) \in E^n \mid \forall i \neq j, x_i \neq x_j\} &= (\#E)(\#E-1)\cdots(\#E-n+1) \\ &= \frac{(\#E)!}{(\#E-n)!} \end{aligned}$$

$$\dot{\bigcup_{x_1=1}^{9}} \underbrace{\{(x_1,x_2,x_3,x_4) \mid (x_2,x_3,x_4) \in \mathscr{A}_3([\![0,9]\!] \setminus \{x_1\})\}}_{F_{x_1}}$$

On a $\#F = \sum\limits_{x_1=1}^{9} \#F_{x_1}$.

Soit $\varphi : \begin{array}{ccc} F_{x_1} & \longrightarrow & \mathscr{A}_3([\![0,9]\!] \setminus \{x_1\}) \\ (x_1,x_2,x_3,x_4) & \longmapsto & (x_2,x_3,x_4), \end{array}$

et sa réciproque $\psi : \begin{array}{ccc} \mathscr{A}_3([\![0,9]\!] \setminus \{x_1\}) & \longrightarrow & F_{x_1} \\ (x_2,x_3,x_4) & \longmapsto & (x_1,x_2,x_3,x_4). \end{array}$

Donc

$$\#F_1 = A^3_9 = \frac{9!}{6!} = 7 \times 8 \times 9$$

et donc

$$\#F = \sum_{x_1=1}^{9} 504 = 9 \times 504 = 4\,536.$$

3. <u>Méthode 1</u> On note

$$F_1 = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in [\![1,9]\!] \times [\![0,9]\!]^3 \mid \text{ parmi } (x_1,x_2,x_3,x_4), \text{ il y a 2 valeurs identiques exactement}\}$$
$$F_2 = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in [\![1,9]\!] \times [\![0,9]\!]^3 \mid \text{ parmi } (x_1,x_2,x_3,x_4), \text{ il y a 3 valeurs identiques exactement}\}$$
$$F_3 = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in [\![1,9]\!] \times [\![0,9]\!]^3 \mid \text{ parmi } (x_1,x_2,x_3,x_4), \text{ il y a 4 valeurs identiques exactement}\}.$$

$\begin{array}{ccc} F_3 & \longrightarrow & [\![1,9]\!] \\ (x_1,x_2,x_3,x_4) & \longmapsto & x_1 \end{array}$ est une bijection donc $\#F_3 = 9$.

$$\begin{aligned} F_2 = &\{(x_1,x_1,x_1,x_4) \mid x_1 \in [\![1,9]\!] \text{ et } x_4 \in [\![0,9]\!] \text{ avec } x_1 \neq x_4\} \\ &\cup \{(x_1,x_1,x_3,x_1) \mid x_1 \in [\![1,9]\!] \text{ et } x_3 \in [\![0,9]\!] \text{ avec } x_1 \neq x_3\} \\ &\cup \{(x_1,x_2,x_1,x_1) \mid x_1 \in [\![1,9]\!] \text{ et } x_2 \in [\![0,9]\!] \text{ avec } x_1 \neq x_2\} \\ &\cup \{(x_1,x_2,x_2,x_2) \mid x_1 \in [\![1,9]\!] \text{ et } x_2 \in [\![0,9]\!] \text{ avec } x_1 \neq x_2\} \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} \#F_2 &= 9 \times 9 + 9 \times 9 + 9 \times 9 + 9 \times 9 \\ &= 4 \times 9 \times 9 = 324. \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned} \#F_1 &= 6 \times 9 \times 9 \times 8 + 3 \times 9 \times 9 \\ &= 4\,131? \end{aligned}$$

Il y en a 4464.

Méthode 2 On passe au complémentaire :

$$9\,000 - 4\,536 = 4\,464.$$

Méthode 3 (fausse)

$$6 \times 9 \times 10 \times 10 = 5\,400 \neq 4\,464.$$

4.

$$7 \times 7 \times 6 \times 5 = 1470.$$

Exercice 4

simultanément = on ne tient pas compte de l'ordre

1. Il y en a

$$\begin{aligned}\binom{32}{5} &= \frac{32!}{5!27!} \\ &= \frac{23 \times 29 \times 30 \times 31 \times 32}{2 \times 3 \times 4 \times 5} \\ &= 14 \times 29 \times 2 \times 31 \times 8 \\ &= 201\,376.\end{aligned}$$

2. (a) On en a $8 \times 28 = 224$.
   (b) On en a $\binom{8}{2} \times \binom{4}{2} \times \binom{4}{2} \times 6 \times 4 = 24\,192$.
   (c) On en a $8 \times \binom{4}{3} \times 7 \times \binom{4}{2} = 8 \times 4 \times 7 \times 6 = 1\,344$.
   (d) On en a $8 \times \binom{4}{3} \times \binom{7}{2} \times 4 \times 4 = 8 \times 4 \times 21 \times 16 = 10\,752$.
   (e) On en a $4 \times 4 = 16$.

Exercice 8

$$A = \{(X, Y) \in \mathscr{P}(E)^2 \mid X \subset Y\}.$$

Méthode 1 $A = \bigcup^{n}_{y=0} \!\!\!\cdot\;\, A_y$ où

$$\forall y \in [\![0, n]\!]\,, A_y = \{(X, Y) \in \mathscr{P}(E)^2 \mid X \subset Y \text{ et } \#Y = y\}.$$

Soit $y \in [\![0, n]\!]$.
On note C_y l'ensemble

$$C_y = \{Y \in \mathscr{P}(E) \mid \#Y = y\}.$$

On a $\#C_y = \binom{n}{y}$. Soit $Y \in C_y$. On pose

$$B_Y = \{X \in \mathscr{P}(E) \mid X \subset Y\}.$$

Donc,

$$A_y = \bigcupdot_{Y \in C_y} B_Y.$$

Soit $f : \begin{array}{ccc} B_Y & \longrightarrow & \mathscr{P}(Y) \\ (X,Y) & \longmapsto & X. \end{array}$

Donc,

$$\#B_y = \#\mathscr{P}(Y) = 2^y.$$

D'où,

$$\begin{aligned} \#A &= \sum_{y=0}^{n} \sum_{Y \in C_y} 2^y \\ &= \sum_{y=0}^{n} \binom{n}{y} 2^y = 3^n. \end{aligned}$$

<u>Méthode 2</u>

$$A = \bigcupdot_{X \in \mathscr{P}(E)} \underbrace{\{(X,Y) \mid Y \supset X\}}_{B_X}.$$

On pose $f : \begin{array}{ccc} B_X & \longrightarrow & \{Y \in \mathscr{P}(E) \mid Y \supset X\} = C_X \\ (X,Y) & \longmapsto & Y, \end{array}$

$g : \begin{array}{ccc} C_X & \longrightarrow & \mathscr{P}(E \setminus X) \\ Y & \longmapsto & Y \setminus X, \end{array}$

et $h : \begin{array}{ccc} \mathscr{P}(E \setminus X) & \longrightarrow & C_X \\ Z & \longmapsto & Z \cup X. \end{array}$

Les applications g et h sont réciproques donc

$$\begin{aligned} \#C_X &= \#\mathscr{P}(E \setminus X) \\ &= 2^{\#(E \setminus X)} \\ &= 2^{n - \#X}. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \#A &= \sum_{X \in \mathscr{P}(E)} 2^{n-\#X} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \sum_{\substack{X \in \mathscr{P}(E) \\ \#X = k}} 2^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} 2^{n-k} \binom{n}{k} = 3^n. \end{aligned}$$

<u>Méthode 3</u> On note $x_1, \dots, x_n$ les élements de E. Soit $(X,Y) \in A$. On pose

$$\forall i \in [\![1,n]\!], a_i^{(X,Y)} = \begin{cases} 0 & \text{si } x_i \in X, \\ 1 & \text{si } x_i \in Y \setminus X, \\ 2 & \text{si } x_i \notin Y. \end{cases}$$

On dispose donc de

$$\begin{aligned} f : A &\longrightarrow [\![0,2]\!]^n \\ (X,Y) &\longmapsto \big(a_1(X,Y), a_2(X,Y), \dots, a_n(X,Y)\big). \end{aligned}$$

Soit

$$\begin{aligned} g : [\![0,2]\!]^n &\longrightarrow A \\ (a_1, \dots, a_n) &\longmapsto \big(\{x_i \mid i \in [\![1,n]\!] \text{ et } a_i = 0\}, \{x_i \mid i \in [\![1,n]\!] \text{ et } a_i \neq 2\}\big) \end{aligned}$$

Les applications f et g sont réciproques donc

$$\#A = \#\big([\![0,2]\!]\big)^n = 3^n.$$

Exercice 13

1. $f \circ f = \mathrm{id}_{\mathscr{P}(E)}$.
2. $g : \begin{array}{ccc} \mathscr{P}_0 & \longrightarrow & \mathscr{P}_1 \\ X & \longmapsto & f(X) \end{array}$ bijective donc $\#\mathscr{P}_0 = \#\mathscr{P}_1$.
3. On en déduit que si $n > 0$

$$\#\mathscr{P}_0 = \frac{1}{2}\#\mathscr{P}(E) = \frac{2^n}{2} = 2^{n-1}.$$

On a

$$\#\mathscr{P}_0 = \sum_{\substack{0 \leqslant i \leqslant n \\ i \text{ pair}}} \binom{n}{i}$$

et

$$\#\mathscr{P}_1 = \sum_{\substack{0 \leqslant i \leqslant n \\ i \text{ impair}}} \binom{n}{i}.$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} &= \sum_{\substack{0 \leqslant k \leqslant n \\ k \text{ pair}}} \binom{n}{k} + \sum_{\substack{0 \leqslant k \leqslant n \\ k \text{ impair}}} \left(-\binom{n}{k}\right) \\ &= \#\mathscr{P}_0 - \#\mathscr{P}_1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Exercice 10

<u>Cas particulier</u> : $p = 2$, $n = 15$ donc $x_1 + x_2 = 15$.

$$\left.\begin{array}{ccc} 0 & + & 15 \\ 1 & + & 14 \\ & \vdots & \\ 15 & + & 0 \end{array}\right\} 16$$

Avec $p = 3$ et $n = 15$, on a donc $x_1 + x_2 + x_3 = 15$.

$$\begin{aligned} 15 &= 1+1+1+1+1 \not+ 1+1+1+1+1+1+1 \not+ 1+1+1 \\ &= 5+7+3 \end{aligned}$$

Avec $(x_1, x_2, \ldots, x_p) \in (\mathbb{N}^*)^p$, on en a $\binom{n-1}{p-1}$.

$$15 = 12 + 0 + 3$$

$$\uparrow$$

$$18 = 13 + 1 + 4$$

On a donc $\binom{n+p-1}{p-1}$.

Exercice 14

Partie I. Les nombres de Bell

1. On a $b_3 = 1+3+1 = 5$.
2. (a) par définition d'une partition !

   (b) On pose $B(E)$ l'ensemble des partitions de E. Donc,

$$B(\llbracket 1, n+1 \rrbracket) = \bigcup_{\substack{P \in \mathscr{P}(\llbracket 1,n+1 \rrbracket) \\ n+1 \in P}}^{\cdot} \Big(\underbrace{\big\{ \{P_1, \ldots, P_s\} \in B_n \mid \exists i, P = P_i \big\}}_{A_p^{n+1}} \Big)$$

L'application $\begin{array}{ccc} A_p^{n+1} & \longrightarrow & B\big(\llbracket 1, n+1 \rrbracket \setminus P\big) \\ \{P_1, \ldots, P_s\} & \longmapsto & \{P_i \mid P_i \neq P\} \end{array}$ est une bijection.

On a donc

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= \sum_{\substack{P \in \mathscr{P}(\llbracket 1,n+1 \rrbracket) \\ n+1 \in P}} b_{n+1-\#P} \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{\substack{P \in \mathscr{P}(\llbracket 1,n+1 \rrbracket) \\ n+1 \in P \\ \#P = i}} b_{n+1-i} \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} \binom{n}{i-1} b_{n+1-i} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k} b_{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_k. \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} b_3 &= \sum_{k=0}^{2} \binom{2}{k} b_k \\ &= b_0 + 2b_1 + b_2 \\ &= 1 + 2 \times 1 + 2 = 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_4 &= \sum_{k=0}^{3} \binom{3}{k} b_k = b_0 + 3b_1 + 3b_2 + b_3 \\ &= 1 + 3 + 3 \times 2 + 5 \\ &= 15 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_5 &= \sum_{k=0}^{4} \binom{4}{k} b_k \\ &= b_0 + 4b_1 + 6b_2 + 4b_3 + b_4 \\ &= 1 + 4 + 12 + 20 + 15 \\ &= 52. \end{aligned}$$

(d)

$$b_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_k \geqslant \binom{n}{n-1} b_{n-1} = n b_{n-1}$$

$b_{2k+1}^2 \geqslant b_{2k} b_{2k+1} \geqslant (2k)!$
$b_{2k+1} = \sqrt{(2k)!}$

Exercice 3

$$\underbrace{\frac{13!}{2!\,11!}}_{M} \times \underbrace{\frac{11!}{2!\,9!}}_{A} \times \underbrace{\frac{9!}{2!\,7!}}_{T} \times \underbrace{\frac{7!}{1!\,6!}}_{H} \times \underbrace{\frac{6!}{1!\,5!}}_{I} \times \underbrace{\frac{5!}{1!\,4!}}_{Q} \times \underbrace{\frac{4!}{1!\,3!}}_{U} \times \underbrace{\frac{3!}{2!\,1!}}_{E} \times \underbrace{\frac{1!}{1!\,1!}}_{S} = \frac{13!}{2^4}.$$

Coefficient multinomial :

$$\frac{n!}{k_1!\,k_2!\,k_3!\,\cdots\,k_p!} = \binom{n}{k_1}\binom{n-k_1}{k_2}\binom{n-k_1-k_2}{k_3}\cdots\binom{k_p}{k_p}$$

avec $k_1 + k_2 + \cdots + k_p = n$.

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_p)^n = \sum_{k_1,\cdots,k_p} \frac{n!}{k_1!\,\cdots\,k_p!} a_1^{k_1}\, a_2^{k_2}\, \cdots\, a_p^{k_p}.$$

Exercice 5

1. $\binom{45}{2}$
2. 11×34
3. $\binom{34}{2}$

Exercice 6

On numérote les pays de 1 à N. On pose

$$\begin{aligned} f : [\![1, N]\!] &\longrightarrow [\![0, N-1]\!] \\ p &\longmapsto \text{ le nombre de voisins du pays numéro } p \end{aligned}$$

On suppose f injective. Alors f est surjective : $\exists p, f(p) = 0$ et $\exists q, f(q) = N - 1$. Donc p est isolé est q est voisin de tous les pays. Donc p et q sont voisins. $\lightning$.

Donc f n'est pas injective donc

$$\exists p \neq q, f(p) = f(q).$$

Exercice 7

$$\begin{aligned} \sum_{X \in \mathscr{P}(E)} (\#E) &= \sum_{k=0}^{n} \sum_{\substack{X \in \mathscr{P}(E) \\ \#X = k}} \#X \\ &= \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!} \\ &= n \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} \\ &= n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \\ &= n 2^{n-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{X,Y\in\mathscr{P}(E)} \#(X\cap Y) &= \sum_{X\in\mathscr{P}(E)} \sum_{Y\in\mathscr{P}(E)} \#(X\cap Y)\\
&= \sum_{X\in\mathscr{P}(E)} \sum_{(Z,T)\in\mathscr{P}(X)\times\mathscr{P}(E\setminus X)} \#Z\\
&= \sum_{X\in\mathscr{P}(E)} \sum_{T\in\mathscr{P}(E\setminus X)} \sum_{Z\in\mathscr{P}(X)} \#Z\\
&= \sum_{X\in\mathscr{P}(E)} \sum_{T\in\mathscr{P}(E)} \#X2^{\#X-1}\\
&= \sum_{X\in\mathscr{P}(E)} \#X2^{\#X-1}2^{n-\#X}\\
&= \sum_{X\in\mathscr{P}(E)} \#X2^{n-1}\\
&= n\left(2^{n-1}\right)^2\\
&= n2^{2n-2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{X,Y\in\mathscr{P}(E)} \#(X\cup Y) &= \sum_{X,Y\in\mathscr{P}(E)} \big(\#X+\#Y-\#(X\cap Y)\big)\\
&= 2\sum_{Y\in\mathscr{P}(E)} \sum_{X\in\mathscr{P}(E)} \#X - \sum_{X,Y\in\mathscr{P}(E)} \#(X\cap Y)\\
&= 2\times 2^n \times n2^{n-1} - n2^{2n-2}\\
&= 3n2^{2n-2}
\end{aligned}$$

Exercice 11

1. $S_n^1 = 1$, $S_n^n = n!$ et $p > n$ donc $S_n^p = 0$.
2. $p\,S_{n-1}^p + pS_{n-1}^{p-1}$. En effet, on note

$$A = \{f : E \to F \text{ surjective } \mid f_{|E\setminus\{a\}} \text{ surjective}\}$$

et

$$\begin{aligned}
\varphi : A &\longrightarrow F\times\{f : E\setminus\{a\} \to F \text{ surjective}\}\\
f &\longmapsto f_{|E\setminus\{a\}}
\end{aligned}$$

est bijective car

$$\begin{aligned}
\psi : F\times\{E\setminus\{a\}\to F \text{ surjective}\} &\longrightarrow A\\
(y,g) &\longmapsto \begin{pmatrix} E & \longrightarrow & F\\ x & \longmapsto & \begin{cases} y & \text{si } x=a\\ g(x) & \text{sinon}\end{cases}\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

est la réciproque de φ et donc

$$\#A = \#F\times\#\{E\setminus\{a\}\to F \text{ surjective}\} = pS_{n-1}^p.$$

3. On pose
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathscr{P}(n) : \text{“}\forall p \in \mathbb{N}^*, S_n^p = \sum_{k=0}^{p} (-1)^{p-k} \binom{p}{k} k^n\text{”}.$$

— Avec $n = 1$ et $p = 1$, On a $S_1^1 = 1$ et
$$\sum_{k=0}^{1} (-1)^{1-k} \binom{1}{k} k^1 = 0 + 1 = 1.$$

Avec $n = 1$ et $p \geqslant 2$, montrons que
$$0 = \sum_{k=0}^{p} (-1)^{p-k} \binom{p}{k} k$$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{p} (-1)^{p-k} \binom{p}{k} k &= \sum_{k=1}^{p} (-1)^{p-k} \frac{p!}{(k-1)!\,(p-k)!} \\
&= p \sum_{k=1}^{p} (-1)^{p-k} \binom{p-1}{k-1} \\
&= p \sum_{j=0}^{p-1} (-1)^{p-1-k} \binom{p-1}{j} \\
&= p(1-1)^{p-1} = 0 \text{ car } p-1 \geqslant 1.
\end{aligned}$$

— Soit $n \geqslant 1$. On suppose $\mathscr{P}(n)$. Soit $p \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
S_{n+1}^p &= p\left(S_n^p + S_n^{p-1}\right) \\
&= \left(\sum_{k=0}^{p} (-1)^{p-k} \binom{p}{k} k^n + \sum_{k=0}^{p-1} (-1)^{p-1-k} \binom{p-1}{k} k^n\right) \\
&= p\left(\sum_{k=0}^{p-1} (-1)^{p-k} \left(\binom{p}{k} - \binom{p-1}{k}\right) k^n + p^n\right) \\
&= p\left(p^n + \sum_{k=1}^{p-1} (-1)^{p-k} \binom{p-1}{k-1} k^n\right) \\
&= p^{n+1} + \sum_{k=1}^{p-1} (-1)^{p-k} \frac{p!}{(k-1)!\,(p-k)!} k^n \\
&= p^{n+1} + \sum_{k=1}^{p-1} (-1)^{p-k} \binom{p}{k} k^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{p} (-1)^{p-k} \binom{p}{k} k^{n+1}
\end{aligned}$$

Exercice 12

1. Déjà faite dans le TD du chapitre 8.

2. On prends $X = [\![1, p]\!]$, $Y = [\![p+1, p+q]\!]$. On a $\#E = p + q$.
   On a $X \cup Y = [\![1, p+q]\!]$ et on pose

$$A_r = \{Z \in \mathscr{P}(E) \mid \#Z = r\}.$$

   et

$$\begin{aligned} f : A_r &\longrightarrow \mathscr{P}(X) \times \mathscr{P}(Y) \\ Z &\longmapsto (Z \cap X, Z \cap Y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\#\big\{(X', Y') \in \mathscr{P}(X) \times \mathscr{P}(Y) \mid \#X' + \#Y' = r\big\} &= \sum_{\substack{X' \in \mathscr{P}(X) \\ \#Y' \in \mathscr{P}(Y) \\ \#X' + \#Y' = r}} 1 \\
&= \sum_{X' \in \mathscr{P}(X)} \quad \sum_{\substack{Y' \in \mathscr{P}(Y) \\ \#Y' = r - \#X'}} 1 \\
&= \sum_{k=0}^{p} \sum_{\substack{X' \in \mathscr{P}(X) \\ \#X' = k}} \quad \sum_{\substack{Y' \in \mathscr{P}(Y) \\ \#Y' = r-k}} 1 \\
&= \sum_{k=0}^{p} \sum_{\substack{X' \in \mathscr{P}(X) \\ \#' = k}} \binom{q}{r-k} \\
&= \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \binom{q}{r-k} \\
&= \sum_{\substack{i,j \\ i+j=r}} \binom{p}{i} \binom{q}{j}
\end{aligned}$$