Chapitre 23

# Dénombrement

Hugo Salou MP2I

Dernière mise à jour le 14 juin 2022

# TABLE DES MATIÈRES

Première partie

# Cardinal d'un ensemble

**Lemme:** Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geqslant 2$, et $X \subsetneq [\![1, n]\!]$ avec $X \neq \varnothing$ ($\subsetneq$ signifie inclus et différent).
Alors

$$\exists\, 0 < p < n, \exists f : X \to [\![1, p]\!] \text{ bijective .}$$

*Preuve* (par récurrence sur $n$):
On pose, pour $n \geqslant 2$,

$$\mathscr{P}(n) : \text{“}\forall X \subsetneq [\![1, n]\!] \text{ tel que } X \neq \varnothing, \exists\, 0 < p < n, \exists f : X \to [\![1, p]\!] \text{ bijective”}$$

— Soit $X \subsetneq [\![1, 2]\!]$ avec $X \neq \varnothing$. Par définition d'une inclusion,

$$X = \{1\} \text{ ou } X = \{2\}.$$

On pose $p = 1$.
Si $X = \{1\}$, alors on pose

$$\begin{aligned} f : X &\longrightarrow [\![1, 1]\!] = \{1\} \\ 1 &\longmapsto 1 \end{aligned}$$

$f$ est bien bijective.
Si $X = \{2\}$, alors on pose

$$\begin{aligned} f : X &\longrightarrow \{1\} \\ 2 &\longmapsto 1 \end{aligned}$$

De nouveau, $f$ est bijective.
Ainsi, $\mathscr{P}(2)$ est vraie.

— Soit $n \geqslant 2$. On suppose $\mathscr{P}(n)$ vraie. Soit $X \subsetneq [\![1, n+1]\!]$ avex $X \neq \varnothing$.
<u>Cas 1</u> On suppose que $n + 1 \notin X$.
Alors $X \subset [\![1, n]\!]$.
 — Si $X = [\![1, n]\!]$, alors on pose $p = n < n + 1$ et $f : \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & [\![1, p]\!] = X \\ i & \longmapsto & i \end{array}$ est bijective.
 — Si $X \subsetneq [\![1, n]\!]$, d'après $\mathscr{P}(n)$, il existe $p \in [\![1, n-1]\!]$ et une bijection $f : X \to [\![1, p]\!]$.
 On a bien $p < n + 1$.

<u>Cas 2</u> $n + 1 \in X$. On pose $Y = X \setminus \{n + 1\}$. Ainsi $Y \subset [\![1, n + 1]\!]$.
 — Si $Y = [\![1, n]\!]$, alors $X = [\![1, n]\!] \cup \{n + 1\}$ : $\lightning$
 — Si $Y = \varnothing$, alors $X = \{n + 1\}$. On pose donc $p = 1 < n + 1$ et $f : \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & [\![1, p]\!] = \{1\} \\ n+1 & \longmapsto & 1 \end{array}$ est bijective.
 — On suppose $Y \neq \varnothing$. D'après $\mathscr{P}(n)$, il existe $q \in [\![1, n-1]\!]$ et $g : Y \to [\![1, q]\!]$ bijective.
 On pose $f : \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & [\![1, q+1]\!] \\ x & \longmapsto & \begin{cases} g(x) & \text{si } x \neq n+1, \\ q+1 & \text{si } x = n+1. \end{cases} \end{array}$
 On pose aussi $p = q + 1 \leqslant n < n + 1$. $f$ est bijective.
 On pose

$$\begin{aligned} h : [\![1, q+1]\!] &\longrightarrow X \\ i &\longmapsto \begin{cases} g^{-1}(i) & \text{si } i \leqslant q, \\ n+1 & \text{si } i = q+1. \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\forall i \in \llbracket 1, q+1 \rrbracket, f\big(h(i)\big) &= \begin{cases} f\big(g^{-1}(i)\big) & \text{si } i \leqslant q \\ f(n+1) & \text{si } i = q+1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} g\big(g^{-1}(i)\big) & \text{si } i \leqslant q \\ q+1 & \text{si } i = q+1 \end{cases} \\ &= i\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\forall x \in X, h\big(f(x)\big) &= \begin{cases} h\big(g(x)\big) & \text{si } x \neq n+1 \\ h(q+1) & \text{si } x = n+1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} g^{-1}\big(g(x)\big) & \text{si } x \neq n+1 \\ n+1 & \text{si } x = n+1 \end{cases} \\ &= x\end{aligned}$$

□

**Lemme:** Soient $n, p$ deux entiers non-nuls et $f : \llbracket 1, p \rrbracket \to \llbracket 1, n \rrbracket$ une surjection. Alors $p \geqslant n$.

*Preuve* (par récurrence sur $n$)*:*
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$\mathscr{P}(n) : \text{“ } \forall p \in \mathbb{N}^*, \forall f : \llbracket 1, p \rrbracket \to \llbracket 1, n \rrbracket, f \text{ surjective } \implies p \geqslant n.\text{”}$$

— Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $f : \llbracket 1, p \rrbracket \to \llbracket 1, 1 \rrbracket = \{1\}$. On suppose $f$ surjetive. Nécessairement, $p \geqslant 1$.
— Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose $\mathscr{P}(n)$ vraie. Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $f : \llbracket 1, p \rrbracket \to \llbracket 1, n+1 \rrbracket$. On suppose $f$ surjective. On veut montrer que $p \geqslant n+1$.
On pose
$$X = f^{-1}\big(\llbracket 1, n \rrbracket\big) = \{i \in \llbracket 1, p \rrbracket \mid f(i) \neq n+1\}.$$
Commme $f$ est surjective, $X \neq \varnothing$ et $X \neq \llbracket 1, p \rrbracket$. D'après le lemme précédent, il existe $0 < q < p$ et $g : X \to \llbracket 1, q \rrbracket$ bijective.
Ainsi $f \circ g^{-1} : \llbracket 1, q \rrbracket \to \llbracket 1, n \rrbracket$ est surjective.
D'après $\mathscr{P}(n)$, $q \geqslant n$.
Si $p \leqslant n$, alors $q < p \leqslant n$ : ↯
Donc $p > n$ et donc $p \geqslant n+1$.

□

**Lemme:** Soient $n \geqslant 1$ et $p \geqslant 1$, $f : \llbracket 1, p \rrbracket \to \llbracket 1, n \rrbracket$. Alors $p \leqslant n$.

*Preuve:*

On pose

$$\begin{aligned} g : [\![1,n]\!] &\longrightarrow [\![1,p]\!] \\ i &\longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } f^{-1}\big(\{i\}\big) = \varnothing, \\ j & \text{si } f^{-1}\big(\{i\}\big) = \{j\}. \end{cases} \end{aligned}$$

$g$ est surjective. Soit $k \in [\![1,p]\!]$, alors $g\big(f(k)\big) = k$ car $k$ est un antécédant de $f(k)$ par $f$.

D'après le lemme précédent, $n \geqslant p$. □

**Corollaire:** Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$ et $f : [\![1,n]\!] \to [\![1,p]\!]$ bijective. Alors $n = p$

**Définition:** Soit $X$ un ensemble. On dit que $X$ est <u>fini</u> si $X = \varnothing$ ou s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et une bijection $f : X \to [\![1,n]\!]$.

Soit $X$ un ensemble fini. Le <u>cardinal</u> de $X$ est
- 0 si $X = \varnothing$
- sinon, c'est le seul entier $n \in \mathbb{N}^*$ pour lequel il existe une bijection de $X$ dans $[\![1,n]\!]$.

On le note $\mathrm{Card}(X)$, $\#X$ ou $|X|$.

**Proposition:** Soit $E$ un ensemble fini et $X \in \mathscr{P}(E)$.

Alors $X$ est fini et $\#X \leqslant \#E$.

Si $\#X = \#E$, alors $X = E$.

*Preuve:* <u>Cas 1</u> Si $E = \varnothing$, alors $X = \varnothing$.

<u>Cas 2</u> $E \neq \varnothing$. On pose $n = \#E \in \mathbb{N}^*$. Soit $f : E \to [\![1,n]\!]$ une bijection.

On suppose $X \neq \varnothing$. On pose $Y = f(X) \subset [\![1,n]\!]$
- Si $Y = [\![1,n]\!]$, alors $X = E$ et donc $\#X = n \leqslant \#E$.
- Si $Y \subsetneq [\![1,n]\!]$, comme $Y \neq \varnothing$, il existe $p \in [\![1,n-1]\!]$ et $g : Y \to [\![1,p]\!]$ : une bijection.

$$\begin{aligned} g : X &\longrightarrow [\![1,p]\!] \\ x &\longmapsto g\big(f(x)\big) \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, dashed, "h"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ & {[\![1,p]\!]} \end{tikzcd}$$

Montrons que $h$ est bijective. On pose

$$\begin{aligned} k : [\![1,p]\!] &\longrightarrow X \\ i &\longmapsto f^{-1}\big(g^{-1}(i)\big). \end{aligned}$$

$h$ et $k$ sont réciproques l'une de l'autre, donc $\#X = p \leqslant n$.

On suppose $X = \varnothing$, alors $\#X = 0 < n$.

□

**Proposition:** Soit $E$ un ensemble fini, $(A, B) \in \mathscr{P}(E)^2$ tel que $A \cap B = \varnothing$.
Alors
$$\#(A \cup B) = \#A + \#B.$$

*Preuve:*
Le résultat est évident si $A = \varnothing$ et $B = \varnothing$.

On suppose $A \neq \varnothing$ et $B \neq \varnothing$. On pose $a = \#A$ et $\#B$. Soient
$$\begin{cases} f : A \to [\![1, a]\!] & \text{une bijection} \\ g : B \to [\![1, b]\!] & \text{une bijection} \end{cases}$$

On pose
$$\begin{aligned} h : A \cup B &\longrightarrow [\![a + b]\!] \\ x &\longmapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in A, \\ a + g(x) & \text{si } x \in B. \end{cases} \end{aligned}$$

Comme $A \cap B = \varnothing$, $h$ est bien définie.

Soit
$$\begin{aligned} k : [\![1, a + b]\!] &\longrightarrow A \cup B \\ i &\longmapsto \begin{cases} f^{-1}(i) & \text{si } i \leqslant a \\ g^{-1}(i - a) & \text{si } i > a. \end{cases} \end{aligned}$$

On vérifie que $h$ et $k$ sont réciproques l'une de l'autre.

Donc $\#(A \cup B) = a + b$. $\square$

**Proposition:** Soient $E$ un ensemble fini, $n \in \mathbb{N}^*$, $(A_1, \dots, A_n) \in \mathscr{P}(E)^n$ telles que
$$\forall i \neq j, A_i \cap A_j = \varnothing.$$
Alors
$$\#\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \#A_i$$

*Preuve* (par récurrence sur $n$)*:*
On a traité le cas $n = 2$ précédemment.

Soit $n \geqslant 2$ pour lequel le résultat est vrai. Soit $(A_1, \dots, A_{n+1}) \in \mathscr{P}(E)^{n+1}$ telles que
$$\forall i \neq j, A_i \cap A_j = \varnothing.$$

On pose $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$. Alors

$$\begin{aligned} A \cap A_{n+1} &= \left( \bigcup_{i=1}^{n} A_i \right) \cap A_{n+1} \\ &= \bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap A_{n+1}) \\ &= \bigcup_{i=1}^{n} \varnothing \\ &= \varnothing. \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned} \#(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i) &= \#(A \cup A_{n+1}) \\ &= \#A = \#A_{n+1} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \#A_i + \#A_{n+1} \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} \#A. \end{aligned}$$

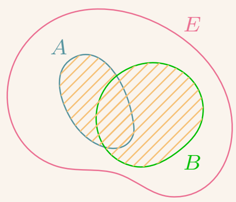
□

**Proposition:** Soient $E$ un ensemble fini, $(A, B) \in \mathscr{P}(E)^2$. Alors

$$\#(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cap B).$$

*Preuve:*

On pose $\begin{cases} C = A \cap B \\ A' = A \setminus C \\ B' = B \setminus C. \end{cases}$




Alors

$$\begin{cases} A' \cup B' \cup C = A \cup B, \\ A' \cap B' = A' \cap C = B' \cap C = \varnothing. \end{cases}$$

D'où

$$\begin{aligned} \#(A \cup B) &= \#(A' \cup B' \cup C) \\ &= \#A' + \#B' + \#C. \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{cases} A = A' \cup C \\ A' \cap C = \varnothing \end{cases}$$

donc

$$\#A = \#A' + \#C$$

donc
$$\#A' = \#A - \#C.$$
De même,
$$\#B' = \#B - \#C.$$
D'où
$$\begin{aligned}\#(A \cup B) &= \#A - \#C + \#B - \#C + \#C \\ &= \#A + \#B - \#C\end{aligned}$$

□

Au passage, on a prouvé la proposition suivante :

**Proposition:** Soient $E$ un ensemble fini, $(A, B) \in \mathscr{P}(E)^2$ avec $B \subset A$. Alors
$$\#(A \setminus B) = \#A - \#B.$$

□

Exemple:
Soit $E$ un ensemble fini, $(A, B, C) \in \mathscr{P}(E)^3$.
$$\begin{aligned}\#(A \cup B \cup C) = \#A &+ \#B + \#C \\ &- \#(A \cap B) - \#(B \cap C) - \#(A \cap C) \\ &+ \#(A \cap B \cap C).\end{aligned}$$

Soit $(A, B, C, D) \in \mathscr{P}(E)^4$.
$$\begin{aligned}\#(A \cup B \cup C \cup D) = \#A &+ \#B + \#C + \#D \\ &- \#(A \cap B) - \#(A \cap C) - \#(A \cap D) - \#(B \cap C) - \#(B \cap D) - \#(C \cap D) \\ &+ \#(A \cap B \cap C) + \#(A \cap B \cap D) + \#(B \cap C \cap D) + \#(A \cap C \cap D) \\ &- \#(A \cap B \cap C \cap D).\end{aligned}$$

En généralisant, on obtient la formule du crible :
$$\#\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \leqslant i_1 \leqslant \cdots \leqslant i_k \leqslant n} \#(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}).$$

**Proposition:** Soient $E$ et $F$ deux ensembles finis et $f : E \to F$.

1. Si $f$ est injective, alors $\#E \leqslant \#F$,
2. Si $f$ est surjective, alors $\#E \geqslant \#F$,
3. Si $f$ est bijective, alors $\#E = \#F$,

*Preuve:* 1.
$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] & F \arrow[d, "bij"] \\ \llbracket 1, n \rrbracket \arrow[u, "bij"] \arrow[r, dashed, "inj"] & \llbracket 1, p \rrbracket \end{tikzcd}$$

2. $$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "surj"] & F \arrow[d, "bij"] \\ \llbracket 1, n \rrbracket \arrow[u, "bij"] \arrow[r, dashed, "surj"] & \llbracket 1, p \rrbracket \end{tikzcd}$$

□

**Proposition** (principe des tiroirs – pigeonhole principle)**:** Soit $f : E \to F$ telle que $\#E > \#F$. Alors

$$\exists (x, y) \in E^2, \begin{cases} x \neq y, \\ f(x) = f(y) \end{cases}$$

*Preuve:*
C'est la contraposée du point 1. de la proposition précédente. □

**Proposition:** Soit $E \to F$ où $E$ et $F$ sont finis et $\#E = \#F$.

$$f \text{ injective} \iff f \text{ surjective} \iff f \text{ bijective} .$$

*Preuve:*
— On suppose $f$ injective. Soit

$$\begin{aligned} g : E &\longrightarrow \operatorname{Im}(f) \\ x &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

$g$ est bijective donc $\#E = \#\operatorname{Im} f$. Or, $\#E = \#F$ donc $\operatorname{Im} f = F$ et donc $f$ est surjective.
— On suppose $f$ surjective. Alors

$$E = \dot{\bigcup_{y \in F}} f^{-1}(\{y\})$$

donc

$$\#E = \sum_{y \in F} \#f^{-1}(\{y\}) \geqslant \sum_{y \in F} 1 = \#F$$

donc

$$\forall y \in F, \#f^{-1}(\{y\}) = 1$$

donc $f$ est bijective.

□

# Deuxième partie

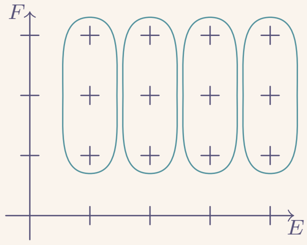
# Dénombrement

**Proposition:** Soient $E$ et $F$ deux ensembles finis. Alors $E \times F$ est fini et

$$\#(E \times F) = \#E \times \#F.$$

*Preuve:*

$$E \times F = \bigcup_{x \in E}^{\cdot} \underbrace{\{(x,y) \mid y \in F\}}_{F_x}.$$




Donc,

$$\#(E \times F) = \sum_{x \in E} (\#F_x)$$

Pour $x \in E$, soit

$$\begin{aligned} \varphi_x : F_x &\longrightarrow F \\ (x,y) &\longmapsto y. \end{aligned}$$

$\varphi_x$ est bijective donc $\#F_x = \#F$. D'où

$$\#(E \times F) = \sum_{x \in E} (\#F) = \#(E) \times (\#F).$$

□

**Proposition:** Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $E_1, \ldots, E_n$ des ensembles finis. Alors $\prod_{i=1}^{n} E_i$ est fini et

$$\#\left(\prod_{i=1}^{n} E_i\right) = \prod_{i=1}^{n} (\#E_i).$$

*Preuve:*
par récurrence sur $n$. □

**Corollaire:** Soit $E$ un ensemble fini de cardinal $n$ et $p \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$\#(E^p) = n^p.$$

En d'autres termes, il y a $n^p$ p-listes de $E$, où une $p$-lise de $E$ est un $(x_1, \ldots, x_p)$ de $E^p$.

**Définition:** Soit $E$ un ensemble fini et $p \in \mathbb{N}^*$. Un <u>$p$-arrangement</u> de $E$ est une $p$-liste de $E$ d'éléments deux à deux distincts :

$$(x_1, \ldots, x_p) \in E^p \text{ est un } p\text{-arrangement} \iff \forall i \neq j, x_i \neq x_j.$$

**Proposition:** Soit $E$ un ensemble fini de cardinal $n$ et $p \in \mathbb{N}^*$. Il y a exactement $\dfrac{n!}{(n-p)!}$ $p$-arrangements si $p \leqslant n$ et 0 si $p > n$.

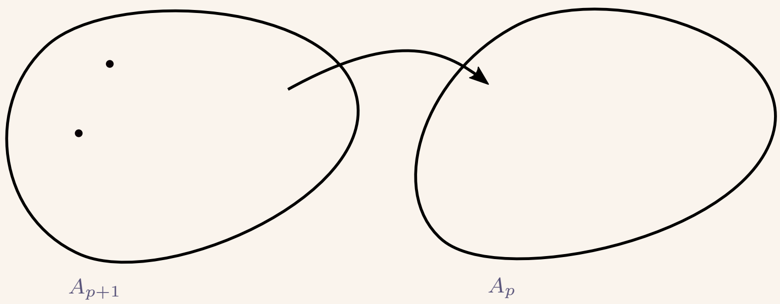
*Preuve* (par récurrence sur $p$):

— Il y a $n$ 1-arrangements de $E$. Or, $\dfrac{n!}{(n-1)!} = n$.

— Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On suppose qu'il y a $\dfrac{n!}{(n-p)!}$ $p$-arrangements.
Soit

$$\begin{aligned} f : \mathscr{A}_{p+1} &\longrightarrow \mathscr{A}_p \\ (x_1, \ldots, x_{p+1}) &\longmapsto (x_1, \ldots, x_p) \end{aligned}$$

où $\mathscr{A}_{p+1}$ est l'ensemble des $(p+1)$-arrangements et $\mathscr{A}_p$ est l'ensemble des $p$-arrangements.
Soit $x = (x_1, \ldots, x_p) \in \mathscr{A}_p$. $x$ a exactement $n - p$ antécédants par $f$.




D'après le principe des bergers,

$$\begin{aligned} \#\mathscr{A}_{p+1} &= (n-p)\#\mathscr{A}_p \\ &= (n-p) \times \frac{n!}{(n-p)!} \\ &= \frac{n!}{(n-p-1)!} \\ &= \frac{n!}{(n-(p+1))!} \end{aligned}$$

□

Dans la preuve précédente, on a utilisé principe des bergers :

**Lemme** (principe des bergers)**:** Soit $f : E \to F$ surjective telle que

$$\exists k, \forall y \in F, \#\big(f^{-1}(\{-1\})\big) = k$$

En d'autres termes, tous les éléments de $F$ ont le même nombre d'antécédants.

Si $F$ est fini, alors

$$\#E = k\,\#F.$$

*Preuve:*
On définit $\sim$ sur $E$ :

$$x \sim y \iff f(x) = f(y).$$

"$\sim$" est une relation d'équivalence sur $E$. Soit $\mathscr{R}$ un système de représentants :

$$E = \bigcup_{x\in\mathscr{R}}^{\cdot} \mathscr{C}\ell(x).$$

On a donc

$$\forall x \in E, \exists! u \in \mathscr{R}, x \sim u.$$

L'application $\begin{array}{ccc} \mathscr{R} & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$ est bijective donc $\#\mathscr{R} = \#F$.

Soit $x \in \mathscr{R}$.

$$\begin{aligned} \forall y \in E, y \in \mathscr{C}\ell(x) &\iff f(y) = f(x) \\ &\iff y \text{ est un antécédant de } f(x) \end{aligned}$$

donc $\#\mathscr{C}\ell(x) = k$.

Finalement,

$$\begin{aligned} \#E &= \sum_{x\in\mathscr{R}} \#\big(\mathscr{C}\ell(x)\big) \\ &= \sum_{x\in\mathscr{R}} k \\ &= k(\#\mathscr{R}) \\ &= k(\#F). \end{aligned}$$

□

**Proposition:** Soit $E$ un ensemble fini de cardinal $n$. Il y a $n!$ permutations de $E$.

*Preuve:*
On note $S(E)$ l'ensemble des permutations de $E$, $\mathscr{A}_n(E)$ l'ensemble des $n$ arrangements de $E$. On pose $E = \{a_1, \ldots, a_n\}$ et

$$\begin{aligned} f : S(E) &\longrightarrow \mathscr{A}_n(E) \\ \sigma &\longmapsto \big(\sigma(a_1), \ldots, \sigma(a_n)\big). \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} g : \mathscr{A}_n(E) &\longrightarrow S(E) \\ (b_1, \dots, b_n) &\longmapsto \left(\sigma : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ a_i & \longmapsto & b_i \end{array}\right). \end{aligned}$$

$f$ et $g$ sont réciproques l'une de l'autre donc

$$\#S(E) = \#\mathscr{A}_n(E) = \frac{n!}{0!} = n!.$$

□

Exemple:
On pose $E = \left\{\pi, e, \sqrt{2}\right\}$. Alors,

$$S(E) = \left\{ \mathrm{id}, \begin{pmatrix} \pi \mapsto e \\ e \mapsto \pi \\ \sqrt{2} \mapsto \sqrt{2} \end{pmatrix}, \dots \right\}$$

Donc,

$$f(\sigma) = \left(e, \pi, \sqrt{2}\right).$$

et alors

$$\begin{aligned} g\left(\sqrt{2}, \pi, e\right) : E &\longrightarrow E \\ \pi &\longmapsto \sqrt{2} \\ e &\longmapsto \pi \\ \sqrt{2} &\longmapsto e. \end{aligned}$$

**Définition:** Soit $E$ un ensemble fini et $p \in \mathbb{N}^*$. Une <u>$p$-combinaison</u> de $E$ est une partie de $E$ de cardinal $p$.

**Proposition:** Soit $E$ fini de cardinal $n$ et $p \in \mathbb{N}^*$. Il y a exactement $\binom{n}{p}$ parties de $E$ de cardinal $p$.

*Preuve:*
On note $\mathscr{A}_p(E)$ l'ensemble des $p$-arrangements et $\mathscr{C}_p(E)$ l'ensemble des $p$-combinaisons de $E$.

Soit

$$\begin{aligned} f : \mathscr{A}_p(E) &\longrightarrow \mathscr{C}_p(E) \\ (x_1, \dots, x_p) &\longmapsto \{x_1, \dots, x_p\}. \end{aligned}$$

$f$ est surjective et

$$\forall X \in \mathscr{C}_p(E),\ X \text{ a } p! \text{ antécédants.}$$

D'après le lemme des bergers :

$$\#\mathscr{A}_p(E) = p!\,\#\mathscr{C}_p(E)$$

et donc
$$\#\mathscr{C}_p(E) = \frac{n!}{(n-p)!\,p!} = \binom{n}{p}.$$
□

**Corollaire:**
$$\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2, \binom{n}{p} \in \mathbb{N}.$$
□

**Proposition:** Soit $E$ et $F$ deux ensembles finis. Alors $F^E$ est fini et
$$\#(F^E) = (\#F)^{\#E}.$$

*Preuve:*
Soit
$$\begin{aligned} \varphi : F^E &\longrightarrow F^n \\ f &\longmapsto \big(f(x_1), \dots, f(x_n)\big) \end{aligned}$$
où $E = \{x_1, \dots, x_n\}$ et $n = \#E$.

Soit
$$\begin{aligned} \psi : F^n &\longrightarrow F^E \\ (y_1, \dots, y_n) &\longmapsto \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x_i & \longmapsto & y_i. \end{array} \end{aligned}$$

On a $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_{F^n}$ et $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_{F^E}$.

Donc
$$\#(F^E) = (\#F)^n.$$
□

**Proposition:** Soit $E$ fini de cardinal $n$. Alors $\#\mathscr{P}(E) = 2^n$.

*Preuve:* <u>Méthode 1</u> Soit
$$\begin{aligned} \varphi : \mathscr{P}(E) &\longrightarrow \{0,1\}^E \\ A &\longmapsto \mathbb{1}_A : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \{0,1\} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{array} \end{aligned}$$

$\varphi$ est bijective :
$$\begin{aligned} \varphi^{-1} : \{0,1\}^E &\longrightarrow \mathscr{P}(E) \\ f &\longmapsto \{x \in E \mid f(x) = 1\}. \end{aligned}$$

On a donc $\#\mathscr{P}(E) = 2^n$.

<u>Méthode 2</u>

$$\mathscr{P}(E) = \dot{\bigcup_{p=0}^{n}} \mathscr{C}_p(E)$$

donc

$$\#\mathscr{P}(E) = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} = (1+1)^n = 2^n$$

<u>Méthode 3</u> (par récurrence sur $n$).

— $n = 0$ donc $E = \varnothing$ et $\mathscr{P}(\varnothing) = \{\varnothing\}$. donc $\#\mathscr{P}(E) = 1 = 2^n$.

— Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que

$$\forall E \text{ de cardinal } n,\ \#\mathscr{P}(E) = 2^n$$

Soit $E$ de cardinal $n+1 > 0$. Soit $a \in E$ et $F = E \setminus \{a\}$.

— Les parties de $E$ qui ne contienent pas $a$ sont des parties de $F$ et réciproquement : il y en a $2^n$.

— A chaque partie de $E$ contenant $a$, on peut faire correspondre une partie de $F$ en supprimant $a$ de la partie, et réciproquement : il y en a $2^n$.

Donc,

$$\#\mathscr{P}(E) = 2^n + 2^n = 2 \times 2^n = 2^{n+1}.$$

□

# Troisième partie

# Preuves combinatoires

**Proposition:**

$$\forall k \leqslant n \in \mathbb{N}, \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

*Preuve:*
Il y a autant de façons de choisir $k$ éléments parmi $n$ que d'en choisir $n-k$ à exclure.

$\boxed{\text{Formellement}}$ :
L'application

$$\begin{aligned} f : \mathscr{C}_k(\llbracket 1, n \rrbracket) &\longrightarrow \mathscr{C}_{n-k}(\llbracket 1, n \rrbracket) \\ X &\longmapsto \llbracket 1, n \rrbracket \setminus X \end{aligned}$$

est bijective. □

**Proposition:**

$$\forall k \leqslant n, \quad \binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}.$$

*Preuve:*
On pose

$$A_{n+1} = \left\{ X \in \mathscr{C}_{k+1}\big(\llbracket 1, n+1 \rrbracket\big) \mid n{+}1 \in X \right\}, B_{n+1} = \left\{ X \in \mathscr{C}_{k+1}\big(\llbracket 1, n+1 \rrbracket\big) \mid n{+}1 \notin X \right\}.$$

donc

$$\mathscr{C}_{k+1}\big(\llbracket 1, n+1 \rrbracket\big) = A_{n+1} \uplus B_{n+1}.$$

L'application $f : \begin{array}{ccc} A_{n+1} & \longrightarrow & \mathscr{C}_k\big(\llbracket 1, n \rrbracket\big) \\ X & \longmapsto & X \setminus \{n+1\} \end{array}$ est bijective

Donc

$$B_{n+1} = \mathscr{C}_{k+1}\big(\llbracket 1, n \rrbracket\big)$$

et donc

$$\begin{aligned} \binom{n+1}{k+1} &= \# A_{n+1} + \# B_{n+1} \\ &= \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}. \end{aligned}$$

□

**Proposition:** Soit $(A, +, \times)$ un anneau, $(a, b) \in A^2$ tel que $a \times b = b \times a$. Alors

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

*Preuve:*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $a_1 = a$ et $a_2 = b$. Alors

$$\begin{aligned}
(a+b)^n &= (a_1+a_2)(a_1+a_2)\cdots(a_1+a_2) \\
&= \sum_{i_1=1}^{2} a_{i_1} \sum_{i_2=1}^{2} a_{i_2} \cdots \sum_{i_n=1}^{2} a_{i_n} \\
&= \sum_{(i_1,\ldots,i_n)\in\{1,2\}^n} a_{i_1} a_{i_2} \cdots a_{i_n} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \sum_{\substack{(i_1,\ldots,i_n)\in\{1,2\}^n \\ \#\{j\in[\![1,n]\!] \mid i_j=1\}=k}} a^k b^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \sum_{\substack{(i_1,\ldots,i_n)\in\{1,2\}^n \\ \#\{j\in[\![1,n]\!] \mid i_j=1\}=k}} a^k b^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.
\end{aligned}$$

$\square$

# Quatrième partie

# Bilan

**Principe des tiroirs**

Soit $f : E \to F$ avec $\#E > \#F$. Alors $\exists x \neq y \in E,\ f(x) = f(y)$.

Soit $f : E \to F$ avec $\#E = \#F$. Alors

$$f \text{ injective} \iff f \text{ surjective} \iff f \text{ bijective.}$$

$$\#\left(\prod_{i=1}^{n} E_i\right) = \prod_{i=1}^{n} (\#E_i).$$

$$\#(E^n) = (\#E)^n.$$

Une $p$-liste est de la forme $(x_1, \ldots, x_p) \in E^p$.

Un $p$-arrangement est une $p$-liste d'éléments de $E$ distincts. Il y en a, avec $n = \#E$,

$$\frac{n!}{(n-p)!}.$$

**Principe des bergers**

Soit $f : E \to F$ telle que chaque élément $y \in F$ ait exactement $k$ antécédants dans $F$. Alors,

$$\#E = k\#F.$$

Une permutation est une bijection de $E$ dans $E$. Il y en a $n!$ si $\#E = n$.

Une $p$-combinaison de $E$ est une partie de $E$ de cardinal $p$. Il y en a $\binom{n}{p}$ si $n = \#E$.

$$\#(F^E) = (\#F)^{\#E}.$$

$$\#\mathscr{P}(E) = 2^{\#E}.$$