

CHAPITRE 26

Déterminant

Hugo SALOU MP2I

Dernière mise à jour le 14 juin 2022

TABLE DES MATIÈRES

I	Motivation	2
II	Définitions	4
III	Déterminant d'un endomorphisme	7
IV	Déterminant d'une matrice carrée	9
V	Développement suivant une ligne ou une colonne	12

Première partie

Motivation

Soit E un espace vectoriel de dimension n , $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E .

Soit $\mathcal{C} = (u_1, \dots, u_n)$ une famille de E . On souhaite trouver un “calcul” sur les coordonnées des vecteurs de $\mathcal{C}$ qui nous dira si $\mathcal{C}$ est une base ou non de E .

REMARQUE:

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C}) = \begin{pmatrix} x & x' \\ y & y' \end{pmatrix}$$

Deuxième partie

Définitions

Définition: Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension $n < +\infty$ et $f : E^n \rightarrow \mathbb{K}$. On dit que f est multilinéaire si

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \forall (u_1, \dots, u_{i-1}, u_{i+1}, \dots, u_n) \in E^{n-1},$$

$$\text{l'application } \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ u & \longmapsto & f(u_1, \dots, u_{i-1}, u, u_{i+1}, \dots, u_n) \end{array} \text{ est linéaire.}$$

On dit que f est antisymétrique si

$$\forall i < j, \forall (u_1, \dots, u_n) \in E^n,$$

$$f(u_1, \dots, u_{i-1}, u_j, u_{i+1}, \dots, u_{j-1}, u_i, u_{j+1}, \dots, u_n) = -f(u_1, \dots, u_{i-1}, u_i, u_{i+1}, \dots, u_{j-1}, u_j, u_{j+1}, \dots, u_n).$$

On dit que f est alternée si

$$\forall (u_1, \dots, u_n) \in E^n, (\exists i < j, u_i = u_j \implies f(u_1, \dots, u_n) = 0).$$

Proposition: Soit $\mathbb{K}$ un corps tel que $1+1 \neq 0$, E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n et $f : E^n \rightarrow \mathbb{K}$ une forme multilinéaire.

Alors,

$$f \text{ alternée} \iff f \text{ antisymétrique.}$$

■

Dans le reste du chapitre, $\mathbb{K}$ est un corps avec $1+1 \neq 0$.

Théorème: Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n . L'ensemble des formes multilinéaires alternées de E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{(E^n)}$ de dimension 1.

■

Définition: Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E .

Il existe une unique forme f multilinéaire alternée sur E telle que $f(e_1, \dots, e_n) = 1$. Elle est donnée par la formule

$$\forall (u_1, \dots, u_n) \in E^n, f(u_1, \dots, u_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^n a_{\sigma(j), j}$$

où

$$\forall i, j, a_{i, j} \text{ est la } i\text{-ème coordonnée de } u_j \text{ dans la base } \mathcal{B}.$$

Cette application est appelée déterminant dans la base $\mathcal{B}$ et noté $\det_{\mathcal{B}}$.

Proposition: Soient $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathcal{C} = (u_1, \dots, u_n)$ deux bases de E . Alors

$$\det_{\mathcal{C}} = \det_{\mathcal{C}}(e_1, \dots, e_n) \det_{\mathcal{B}}$$

i.e.

$$\forall (v_1, \dots, v_n) \in E^n, \det_{\mathcal{C}}(v_1, \dots, v_n) = \det_{\mathcal{C}}(e_1, \dots, e_n) \det_{\mathcal{B}}(v_1, \dots, v_n).$$

■

REMARQUE (notation):

Avec les notations précédentes, on note $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{C})$ au lieu de $\det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n)$.

Corollaire: Avec les notations précédentes, $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{C}) \neq 0$ et

$$\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{C}) = (\det_{\mathcal{C}}(\mathcal{B}))^{-1}$$

■

Théorème: Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E , $\mathcal{C} = (u_1, \dots, u_n)$ une famille liée (i.e. $\mathcal{C}$ n'est pas libre). Alors $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{C}) = 0$.

■

Troisième partie

Déterminant d'un endomorphisme

Proposition: Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . Alors,

$$\exists! \lambda \in \mathbb{K}, \forall (u_1, \dots, u_n) \in E, \det_{\mathcal{B}}(f(u_1), \dots, f(u_n)) = \lambda \det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n).$$

■

Proposition: Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ deux bases de E . Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ tel que

$$\forall (u_1, \dots, u_n) \in E^n, \begin{cases} \det_{\mathcal{B}}(f(u_1), \dots, f(u_n)) = \lambda \det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n), \\ \det_{\mathcal{C}}(f(u_1), \dots, f(u_n)) = \mu \det_{\mathcal{C}}(u_1, \dots, u_n). \end{cases}$$

Alors, $\lambda = \mu$.

■

Définition: Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Le déterminant de f est le seul scalaire vérifiant,

$$\forall \mathcal{B} \text{ base de } E, \forall (u_1, \dots, u_n), \det_{\mathcal{B}}(f(u_1), \dots, f(u_n)) = \lambda \det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n)$$

et on le note $\lambda = \det(f)$.

REMARQUE:

Si $n = 2$,

$$\text{Aire}(f(u_1), f(u_2)) = \det(f) \text{Aire}(u_1, u_2).$$

Proposition: Soient f et g deux endomorphismes de E . Alors,

$$\det(f \circ g) = \det f \times \det g.$$

■

Corollaire: Si $f \in \text{GL}(E)$, alors $\det(f) \neq 0$ et $\det(f^{-1}) = \det(f)^{-1}$.

■

Proposition: Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose $f \notin \text{GL}(E)$. Alors $\det(f) = 0$.

■

Quatrième partie

Déterminant d'une matrice carrée

Définition: Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Le déterminant de A est

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^n a_{\sigma(j),j}$$

Proposition: Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n , $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E , $(u_1, \dots, u_n) \in E^n$ et $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n)$.

Alors,

$$\det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n) = \det(A).$$

Proposition: Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n , $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E , $f \in \mathcal{L}(E)$ et $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$. Alors, $\det(A) = \det(f)$. ■

Proposition: Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$.

$$\det(AB) = \det(A) \det(B).$$

Proposition: Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

$$A \in \text{GL}_n(\mathbb{K}) \iff \det(A) \neq 0$$

Dans ce cas, $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$. □

Proposition:

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \det({}^t A) = \det(A).$$

Proposition: Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, C une opération sur les colonnes et A' la matrice obtenue en appliquant C sur les colonnes A .

1. Si $C = c_i \longleftrightarrow c_j$ (avec $i \neq j$), alors $\det(A') = -\det(A)$.
2. Si $C = c_i \longleftrightarrow \lambda c_i$, alors $\det(A') = \lambda \det(A)$.
3. Si $C = c_i \longleftrightarrow c_i + \lambda c_j$ (avec $i \neq j$), alors $\det(A') = \det(A)$.

Corollaire: Le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit de ses coefficients diagonaux.

■

Proposition: Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, L une opération sur les lignes, A' la matrice obtenue en appliquant L sur les lignes de A .

1. Si $L = \ell_i \longleftrightarrow \ell_j$ (avec $i \neq j$), $\det(A') = -\det(A)$.
2. Si $L = \ell_i \longleftrightarrow \lambda \ell_i$, $\det(A') = \lambda \det(A)$.
3. Si $L = \ell_i \longleftrightarrow \ell_i + \lambda \ell_j$ (avec $i \neq j$), $\det(A') = \det(A)$.

□

Cinquième partie

Développement suivant une ligne ou une colonne

Proposition (Laplace): Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{i,j} m_{i,j}$$

où $m_{i,j}$ est le mineur d'indices (i, j) , i.e. le déterminant de la matrice obtenue en supprimant la ligne i et la colonne j de la matrice A .

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{i,j} m_{i,j}.$$

□

Proposition (Vandermonde): Soient $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$.

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{j < i} (a_j - a_i)$$

■

Proposition – Définition: Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et $\text{com}(A)$ la comatrice de A : c'est la matrice

$$((-1)^{i+j} m_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$$

où $m_{i,j}$ est le mineur d'indices (i, j) de A .

On a

$$A {}^t\text{com}(A) = {}^t\text{com}(A) A = \det(A) I_n.$$

Si $\det A \neq 0$, alors

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} {}^t\text{com}(A).$$

■

REMARQUE:

En pratique, on n'utilise jamais cette formule pour trouver A^{-1} (sauf si $n = 2$).

Retour sur la diagonalisation

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On cherche $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que

$$P A P^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & (0) \\ & \ddots & & \\ & & (0) & \\ & & & \ddots \\ & & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = A$ où $\mathcal{B}$ est la base canonique de $\mathbb{K}^n$. On cherche $\mathcal{C} = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{K}^n$ telle que

$$\exists \lambda_i, f(u_i) = \lambda_i u_i$$

$$\begin{aligned}
& \exists \lambda \in \mathbb{K}, \exists u \neq 0, f(u) = \lambda u \\
\iff & \exists \lambda \in \mathbb{K}, \exists u \neq 0, u \in \text{Ker}(f - \lambda \text{id}_{\mathbb{K}^n}) \\
\iff & \exists \lambda \in \mathbb{K}, f - \lambda \text{id}_{\mathbb{K}^n} \text{ n'est pas injective} \\
\iff & \exists \lambda \in \mathbb{K}, f - \lambda \text{id}_{\mathbb{K}^n} \notin \text{GL}(\mathbb{K}^n) \\
\iff & \exists \lambda \in \mathbb{K}, \det(\lambda - \text{id}_{\mathbb{K}^n}) = 0 \\
\iff & \exists \lambda \in \mathbb{K}, \underbrace{\det(A - \lambda I_n)}_{\text{polynôme caractéristique de } A} = 0
\end{aligned}$$