Chapitre 26

TD

Hugo Salou MP2I

Dernière mise à jour le 14 juin 2022

Table des matières

Exercice 2

Fait à l'oral.

Exercice 4

$$\Delta_{n+2} = \begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 \\ c & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & b \\ 0 & \cdots & 0 & c & a \end{vmatrix}$$

$$= a\Delta_{n+1} - c \begin{vmatrix} b & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ c & a & b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & b & \\ 0 & \cdots & 0 & c & a & \end{vmatrix}$$

$$= a\Delta_{n+1} - bc\Delta_n$$

L'équation caractéristique est

$$z^2 = az - bc$$

Son discriminant vaut

$$a^2 - 4bc = 0$$

L'unique racine est $z = \dfrac{a}{2}$.

$$\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ \Delta_n(\alpha n + \beta)\left(\frac{a}{2}\right)^n$$

Cas 1 $a \neq 0$.

$$\Delta_1 = \det\big((a)\big) = a = (\alpha + \beta)\frac{a}{2}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a & b \\ c & a \end{vmatrix} = \frac{3}{4}a^2 = (2\alpha + \beta)\frac{a^2}{4}$$

Cas 2 $a = 0$.

$$\forall n, \Delta_n = 0 = (n+1)\frac{a^n}{2^n}$$

Exercice 8

1. On a :

$$\det u = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} f(1) & f(X) & f(X^2) & \cdots & f(X^{n-1}) & f(X^n) \end{array} \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ 1 \\ X \\ X^2 \\ \vdots \\ X^{n-1} \\ X^n \end{array} = 1.$$

2. On a $\det u = 0$ car $\operatorname{Ker} u \ni 1$.

3. On a

$$\det u = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & n \end{vmatrix} = n!.$$

Exercice 10

$\mathscr{B} = (E_{11}, E_{12}, E_{13}, \dots, E_{1n}, E_{21}, E_{22}, \dots, E_{2n}, \dots, E_{nn})$

$$\det u = ❀ = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

Exercice 7

On a

$$\begin{cases} P = \sum_{i=0}^{p} a_i X^i \; a_p \neq 0 \\ Q = \sum_{i=0}^{q} b_i X^i \; b_p \neq 0 \end{cases}$$

et

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{C}_{q-1}[X] \times \mathbb{C}_{p-1}[X] &\longrightarrow \mathbb{C}_{p+q-1}[X] \\ (U, V) &\longmapsto UP + VQ. \end{aligned}$$

4. $P = X^3 + aX + b$, $p = 3$; $Q = P' = 3X^2 + a$, $q = 2$.

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{C}_1[X] \times \mathbb{C}_2[X] &\longrightarrow \mathbb{C}_4[X] \\ (U, V) &\longmapsto UP + VP'. \end{aligned}$$

La base canonique de $\mathbb{C}_4[X]$ est $\big(1, X, X^2, X^3, X^4\big)$. Une base de $\mathbb{C}_1[X] \times \mathbb{C}_2[X]$ est $\Big(\big(1,0\big), \big(X,0\big), \big(0,1\big), \big(0,X\big), \big(0,X^2\big)\Big)$.

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(\varphi) = \begin{pmatrix} b & 0 & a & 0 & 0 \\ a & b & 0 & a & 0 \\ 0 & a & 3 & 0 & a \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

car

$$\begin{cases} \varphi\big((1,0)\big) &= 1 \times P + 0 \times P' = b + aX + X^3, \\ \varphi\big((X,0)\big) &= XP = bX + aX^2 + X^4, \\ & \vdots \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} b & 0 & a & 0 & 0 \\ a & b & 0 & a & 0 \\ 0 & a & 3 & 0 & a \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} b & 0 & a & 0 & 0 \\ a & b & 0 & a & -3b \\ 0 & a & 3 & 0 & -2a \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\
&= - \begin{vmatrix} b & a & 0 & 0 \\ a & 0 & a & -3b \\ 0 & 3 & 0 & -2a \\ 1 & 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} \\
&= - \begin{vmatrix} b & a & -3b & 0 \\ a & 0 & -2a & -3b \\ 0 & 3 & 0 & -2a \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} a & -3b & 0 \\ 0 & -2a & -3b \\ 3 & 0 & -2a \end{vmatrix} \\
&= a \begin{vmatrix} -2a & -3b \\ 0 & -2a \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} -3b & 0 \\ -2a & -3b \end{vmatrix} \\
&= 4a^3 + 27b^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P \text{ a une racine multiple } &\iff P \text{ et } P' \text{ ont une racine commune} \\
&\iff \text{le resultant de } P \text{ et } P' \text{ est nul} \\
&\iff 4a^3 + 27b^2 = 0.
\end{aligned}$$

1. Soit $(U, V) \in \mathbb{C}_{q-1}[X] \times \mathbb{C}_{p-1}[X]$.

$$\begin{aligned}
\deg(U) &\leqslant q - 1 \\
\text{donc} \deg(UP) &= \deg(U) + \deg(P) \\
&\leqslant q - 1 + p
\end{aligned}$$

   De même, $\deg(V) \leqslant p - 1$ et donc $\deg(VQ) = \deg(V) + \deg(Q) \leqslant p - 1 + q$. On en déduit que $\deg(UP + VQ) \leqslant p - 1 + q$. Ainsi, φ est bien définie.
   Soient $(U_1, V_1) \in \mathbb{C}_{q-1}[X] \times \mathbb{C}_{p-1}[X]$, $(U_2, V_2) \in \mathbb{C}_{q-1}[X] \times \mathbb{C}_{p-1}[X]$, et $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2$.

$$\begin{aligned}
\varphi\big(\lambda(U_1, V_1) + \lambda_2(U_2, V_2)\big) &= \varphi\big((\lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2), (\lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2)\big) \\
&= (\lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2)\, P + (\lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2)\, Q \\
&= \lambda_1 U_1 P + \lambda_2 V_2 P + \lambda_1 V_1 Q + \lambda_2 V_2 Q \\
&= \lambda_1 (U_1 P + V_1 Q) + \lambda_2 (U_2 P + V_2 Q) \\
&= \lambda_1 \varphi(U_1, V_1) + \lambda_2 \varphi(U_2, V_2)
\end{aligned}$$

   Ainsi φ est linéaire.
   On pose, pour $k \in [\![0, p + q - 1]\!]$,

$$P_k = \begin{cases} \left(X^k, 0\right) & \text{si } k < q, \\ \left(0, X^{k-q}\right) & \text{si } k \geqslant q. \end{cases}$$

   Soit $k \in [\![0, p + q - 1]\!]$.

$$
\begin{aligned}
\varphi(P_k) &= \begin{cases} X^k P & \text{si } k < q \\ X^{k-q} Q & \text{si } k \geqslant q \end{cases} \\
&= \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=0}^{p} a_i X^{k+i} & \text{si } k < q \\ \displaystyle\sum_{i=0}^{q} b_i X^{k-q+i} & \text{si } k \geqslant q \end{cases} \\
&= \begin{cases} \displaystyle\sum_{j=k}^{k+q} a_{j-k} X^j & \text{si } k < q \\ \displaystyle\sum_{j=k-q}^{k} b_{j-k+q} X^j & \text{si } k \geqslant q. \end{cases}
\end{aligned}
$$

Donc,

$$
\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2}(\varphi) = \begin{pmatrix}
a_0 & 0 & \cdots & 0 & b_0 & 0 & \cdots & 0\\
a_1 & a_0 & \ddots & \vdots & b_1 & \vdots & \ddots & \vdots\\
\vdots & \vdots & \ddots & 0 & \vdots & \vdots & & b_0\\
a_p & a_{p-1} & \cdots & a_0 & b_q & \vdots & & \\
0 & a_q & \ddots & \vdots & 0 & \vdots & & \\
\vdots & 0 & \ddots & \vdots & & \vdots & & \\
0 & 0 & \cdots\, 0 \,\cdots & a_p & & \vdots & b_q &
\end{pmatrix}
$$

2. On sait que $P(a) = Q(a) = 0$. Supposons φ surjective. $1 \in \mathbb{C}_{p+q-1}[X]$. Soit (U, V) un antécédent de 1 par φ. Ainsi
$$1 = UP + VQ$$
En évaluant en a l'égalité précédente fournit
$$
\begin{aligned}
1 &= U(A)P(A + V(a)Q(a) \\
&= U(a) \times 0 + V(a) \times 0 \\
&= 0.
\end{aligned}
$$
Donc $1 \notin \mathrm{Im}(\varphi)$ et donc φ n'est pas surjective.
Enfin,
$$
\begin{aligned}
\dim\left(\mathbb{C}_{q-1}[X] \times \mathbb{C}_{p-1}[X]\right) &= \dim\left(\mathbb{C}_{q-1}[X]\right) + \dim\left(\mathbb{C}_{p-1}[X]\right) \\
&= q - 1 + 1 + p - 1 + 1 \\
&= p + q \\
&= \dim\left(\mathbb{C}_{p+q-1}[X]\right)
\end{aligned}
$$
Ainsi $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2}(\varphi)$ est carrée.
Comme φ n'est pas bijective, $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2}(\varphi) \notin \mathrm{GL}_{p+q}(\mathbb{C})$ et donc $\det\left(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2}(\varphi)\right) = 0$.
3. On suppose que le résultant de P et Q est nul. Donc φ n'est pas injective et donc $\mathrm{Ker}(\varphi) \neq \{(0, 0)\}$.
Soit $(U, V) \in \mathrm{Ker}(\varphi) \setminus \{(0, 0)\}$. Ainsi
$$UP + VQ = 0$$

et donc
$$P \mid VQ.$$
Supposons $P \wedge Q = 1$. D'après le théorème de Gauß, $P \mid V$.
Or $\deg P = p$ (car $a_p \neq 0$) et $\deg V \leqslant p-1$.
Donc $V = 0$ et donc $UP = 0$, donc $U = 0$ i.e. $(U, V) = (0, 0)$: une contradiction.
On vient de prouver que P et Q ne sont pas premiers entre eux. Soit $D = P \wedge Q$. D'après ce qui précède, $\deg(D) \geqslant 1$, et donc D a au moins une racine $a \in \mathbb{C}$ par le théorème d'Alambert–Gauß.
Comme $D \mid P$ et $D(a) = 0$, on peut conclure que $P(a) = 0$. De même $Q(a) = 0$.

Exercice 3

$$\Delta_n(x) = \begin{vmatrix} \lambda_1 + x & a+x & \cdots & a+x \\ b+x & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a+x \\ b+x & \cdots & b+x & \lambda_n + x \end{vmatrix}$$

1. On fixe $x \in \mathbb{R}$. On note $C_1, \ldots, C_n$ les colonnes de la matrice
$$\begin{pmatrix} \lambda_1 + x & a+x & \cdots & a+x \\ b+x & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a+x \\ b+x & \cdots & b+x & \lambda_n + x \end{pmatrix}.$$
Le déterminant n'est pas modifié suite aux opérations $C_i \leftarrow C_i - C_1$ pour $i \in [\![2, n]\!]$. Les colonnes 2 à n de la matrice obtenue ne font plus intervenir x. En développant le déterminant suivant la première colonne, on obtient alors une expression polynomiale en x de degré au plus 1.

2.
$$\Delta_n(-a) = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & * & \ddots & 0 \\ & & & \lambda_n - a \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n} (\lambda_i - a).$$
De même,
$$\Delta_n(-b) = \prod_{i=1}^{n} (\lambda_i - b).$$
Or,
$$\Delta_n(x) = \Delta_n(-a) + (x+a) \frac{\Delta_n(-b) - \Delta_n(-a)}{-b+a}$$
et donc
$$\begin{aligned} \Delta_n(0) &= \prod_{i=1}^{n} (\lambda_i - a) + \frac{a}{a-b} \left(\prod_{i=1}^{n} (\lambda_i - b) - \prod_{i=1}^{n} (\lambda_i - a) \right) \\ &= \frac{1}{a-b} \left(-b \prod_{i=1}^{n} (\lambda_i - a) + a \prod_{i=1}^{n} (\lambda_i - b) \right) \end{aligned}$$

Exercice

On a $2n+1$ cailloux et, à chaque fois qu'on retire un caillou quelconque, on divise le tas de cailloux en deux tas de même masse. Montrer que tous les cailloux ont la même masse.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 & -1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & -1 \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & & & & & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2n+1}(\mathbb{R}).$$

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A \begin{pmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_{2n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} \exists B \text{ extraite de } A \\ B \in \mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{R}). \end{array}\right\} \implies \operatorname{rg} A = 2n \implies \dim(\operatorname{Ker} A) = 1 \implies \begin{pmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_{2n+1} \end{pmatrix} \text{ colinéaire à } \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & & \pm 1 \\ & \ddots & \\ \pm 1 & & 0 \end{pmatrix}$$

$\det B \in \mathbb{Z}$. Montrons que $\det B \equiv 1 \ [2]$.

$$\begin{aligned} \det B &\equiv \begin{vmatrix} 0 & & 1 \\ & \ddots & \\ -1 & & 0 \end{vmatrix} \ [2] \\ &\equiv 1 \ [2]. \end{aligned}$$

Exercice 9

$\det(f)^2 = (-1)^n$ donc $\det f \in \mathbb{R} \iff n \in 2\mathbb{Z}$.

Exercice 6

$$
\begin{aligned}
C_n(a_0,\dots,a_{n-1}) &= \begin{vmatrix} -x & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & -x & \ddots & \vdots & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -x & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{n-1}-x \end{vmatrix} \\
&= -x \begin{vmatrix} -x & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 1 & -x & \ddots & \vdots & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -x & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{n-1}-x \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & -x & \ddots & \vdots & a_2 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -x & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{n-1}-x \end{vmatrix} \\
&= -xC_{n-1}(a_1,\dots,a_{n-1}) + (-1)^n a_0 \\
&= -x\big(-xC_{n-2}(a_2,\dots,a_{n-1}) + (-1)^{n-1}a_1\big) + (-1)^n a_0 \\
&= x^2 C_{n-2}(a_2,\dots,a_{n-1}) + (-1)^n a_1 x + (-1)^n a_0 \\
&= \cdots\cdots\cdots \\
&= (-1)^n x^n + (-1)^{n+1}\sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k
\end{aligned}
$$