Chapitre 26

Déterminant

Hugo Salou MP2I

Dernière mise à jour le 14 juin 2022

TABLE DES MATIÈRES

I Motivation **2**

II Définitions **5**

III Déterminant d'un endomorphisme **10**

IV Déterminant d'une matrice carrée **13**

V Développement suivant une ligne ou une colonne **18**

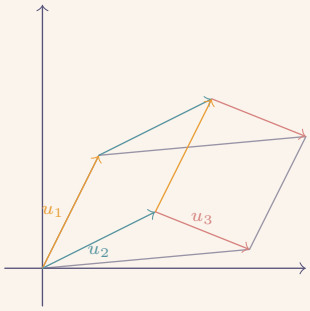
Première partie

Motivation

Soit E un espace vectoriel de dimension n, $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.

Soit $\mathscr{C} = (u_1, \dots, u_n)$ une famille de E. On souhaite trouver un "calcul" sur les coordonées des vecteurs de $\mathscr{C}$ qui nous dira si $\mathscr{C}$ est un base ou non de E.

Exemple:
Avec $E = \mathbb{R}^2$, $\mathscr{B} = (e_1, e_2)$ base canonique de $\mathbb{R}^2$, $\mathscr{C} = (u_1, u_2)$ avec $u_1 = (x, y)$ et $u_2 = (x', y')$.



On note A l'aire orientée (ou algébrique) du parallélogramme engendré par u_1 et u_2.

Cette aire vérifie :

$$\begin{cases} A(u_1 + u_3, u_2) = A(u_1, u_2) + A(u_3, u_2) \\ A(\lambda u_1, u_2) = \lambda A(u_1, u_2) \\ A(u_2, u_1) = -A(u_1, u_2) \\ A(e_1, e_2) = 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} A(u_1, u_2) &= A(xe_1 + ye_2, u_2) \\ &= xA(e_1, u_2) + yA(e_2, u_2) \\ &= xA(e_1, x'e_1 + y'e_2) + yA(e_2, x'e_1 + y'e_2) \\ &= xx'A(e_1, e_1) + xy'A(e_1, e_2) + yx'A(e_2, e_1) + yy'A(e_2, e_2) \\ &= xy' - yx' \end{aligned}$$

$$(u_1, u_2) \text{ base de } \mathbb{R}^2 \iff xy' - yx' \neq 0$$

Remarque:

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{C}) = \begin{pmatrix} x & x' \\ y & y' \end{pmatrix}$$

Exemple:
$E = \mathbb{R}^3$, (e_1, e_2, e_3) base canonique, $\mathscr{C} = (u_1, u_2, u_3)$ famille de E.

Soit V le volume algébrique du parallélépipède orienté engendré par u_1, u_2 et u_3.

V est trilinéaire et

$$\begin{cases} V(u_2, u_1, u_3) = -V(u_1, u_2, u_3) \\ V(u_3, u_1, u_2) = V(u_1, u_2, u_3) \\ V(e_1, e_2, e_3) = 1 \end{cases}$$

On pose $\begin{cases} u_1 = (x_1, y_1, z_1) \\ u_2 = (x_2, y_2, z_2) \\ u_3 = (x_3, y_3, z_3). \end{cases}$

$$\begin{aligned}
V(u_1,u_2,u_3) &= V(x_1e_1+y_1e_2+z_1e_3,u_2,u_3)\\
&= x_1V(e_1,u_2,u_3)+y_1V(e_2,u_2,u_3)+z_1V(e_3,u_2,u_3)\\
&= \quad x_1y_2z_3V(e_1,e_2,e_3)+x_1z_2y_3V(e_1,e_3,e_2)+y_1x_2z_3V(e_2,e_1,e_3)\\
&\quad + y_1z_2x_3V(e_2,e_3,e_1)+z_1x_2y_3V(e_3,e_1,e_2)+z_1y_2x_3V(e_3,e_2,e_1)\\
&= x_1y_2z_3+y_1z_2x_3+z_1x_2y_3-x_1z_2y_3-y_1x_2z_3-z_1y_2x_3
\end{aligned}$$

C'est la formule de Sarrus (hors-programme).

Deuxième partie

Définitions

Définition: Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n < +\infty$ et $f : E^n \longrightarrow \mathbb{K}$. On dit que f est multilinéaire si

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \forall (u_1, \ldots, u_{i-1}, u_{i+1}, \ldots, u_n) \in E^{n-1},$$

$$\text{l'application } \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ u & \longmapsto & f(u_1, \ldots, u_{i-1}, u, u_{i+1}, \ldots, u_n) \end{array} \text{ est linéaire.}$$

On dit que f est antisymétrique si

$$\begin{gathered} \forall i < j, \forall (u_1, \ldots, u_n) \in E^n, \\ f(u_1, \ldots, u_{i-1}, u_j, u_{i+1}, \ldots, u_{j-1}, u_i, u_{j+1}, \ldots, u_n) \\ = -f(u_1, \ldots, u_{i-1}, u_i, u_{i+1}, \ldots, u_{j-1}, u_j, u_{j+1}, \ldots, u_n). \end{gathered}$$

On dit que f est alternée si

$$\forall (u_1, \ldots, u_n) \in E^n, \big(\exists i < j, u_i = u_j \implies f(u_1, \ldots, u_n) = 0\big).$$

Proposition: Soit $\mathbb{K}$ un corps tel que $1+1 \neq 0$, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $f : E^n \to \mathbb{K}$ une forme multilinéaire.

Alors,

$$f \text{ alternée} \iff f \text{ antisymétrique.}$$

Preuve: " $\implies$ " On suppose f alternée.
Soit $(u_1, \ldots, u_n) \in E^n$ et $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ avec $i < j$.

$$\begin{aligned} 0 &= f(u_1, \ldots, u_{i-1}, u_i + u_j, u_{i+1}, \ldots, u_{j-1}, u_i + u_j, u_{j+1}, \ldots, u_n) \\ &= \quad f(u_1, \ldots, u_{i-1}, u_i, u_{i+1}, \ldots, u_{j-1}, u_i + u_j, u_{j+1}, \ldots, u_n) \\ &\quad + f(u_1, \ldots, u_{i-1}, u_j, u_{i+1}, \ldots, u_{j-1}, u_i + u_j, u_{j+1}, \ldots, u_n) \\ &= \quad f(u_1, \ldots, u_{i-1}, u_i, u_{i+1}, \ldots, u_{j-1}, u_i, u_{j+1}, \ldots, u_n) \\ &\quad + f(u_1, \ldots, u_{i-1}, u_i, u_{i+1}, \ldots, u_{j-1}, u_j, u_{j+1}, \ldots, u_n) \\ &\quad + f(u_1, \ldots, u_{i-1}, u_j, u_{i+1}, \ldots, u_{j-1}, u_i, u_{j+1}, \ldots, u_n) \\ &\quad + f(u_1, \ldots, u_{i-1}, u_j, u_{i+1}, \ldots, u_{j-1}, u_j, u_{j+1}, \ldots, u_n) \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} &f(u_1, \ldots, u_{i-1}, u_j, u_{i+1}, u_{i+1}, \ldots, u_{j-1}, u_i, u_{j+1}, \ldots, u_n) \\ &= -f(u_1, \ldots, u_{i-1}, u_i, u_{i+1}, u_{i+1}, \ldots, u_{j-1}, u_j, u_{j+1}, \ldots, u_n). \end{aligned}$$

Donc, f est antisymétrique.
" $\impliedby$ " On suppose f antisymétrique. Soit $(u_1, \ldots, u_n) \in E^n$ et $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ tels que $i < j$ et $u_i < u_j$.

$$\begin{aligned} &f(u_1, \ldots, u_{i-1}, u_i, u_{i+1}, \ldots, u_{j-1}, u_j, u_{j+1}, \ldots, u_n) \\ =&f(u_1, \ldots, u_{i-1}, u_j, u_{i+1}, \ldots, u_{j-1}, u_i, u_{j+1}, \ldots, u_n) \\ =& -f(u_1, \ldots, u_{i-1}, u_i, u_{i+1}, \ldots, u_{j-1}, u_j, u_{j+1}, \ldots, u_n) \end{aligned}$$

D'où,

$$f(u_1,\dots,u_n)\underbrace{(1+1)}_{\neq 0}=0$$

donc $f(u_1,\dots,u_n)=0$.

□

Dans le reste du chapitre, $\mathbb{K}$ est un corps avec $1+1\neq 0$.

Théorème: Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. L'ensemble des formes multilinéaires alternées de E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{(E^n)}$ de dimension 1.

Preuve (pas exigible)*:*
Soit $\mathscr{B}=(e_1,\dots,e_n)$ une base de E. Soit f une forme multilinéaire alternée. Soit $(u_1,\dots,u_n)\in E^n$.

$$\forall j\in[\![1,n]\!],\ \exists (a_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant n},\ u_j=\sum_{i=1}^{n}a_{i,j}e_i$$

$$\begin{aligned}
f(u_1,\dots,u_n)&=f\left(\sum_{i=1}^{n}a_{i,1}e_i,u_2,\dots,u_n\right)\\
&=\sum_{i=1}^{n}a_{i,1}f(e_i,u_2,\dots,u_n)\\
&=\sum_{i_1=1}^{n}a_{i_1,1}f\left(e_{i_1},\sum_{i_2=1}^{n}a_{i_2,2}e_{i_2},u_3,\dots,u_n\right)\\
&=\sum_{i_1=1}^{n}\sum_{i_2=1}^{n}a_{i_1,1}a_{i_2,2},f(e_{i_1},e_{i_2},u_3,\dots,u_n)\\
&\ \ \vdots\\
&=\sum_{i_1=1}^{n}\sum_{i_2=1}^{n}\cdots\sum_{i_n=1}^{n}a_{i_1,1}a_{i_2,2}\cdots a_{i_n,n}f(e_{i_1},e_{i_2},\dots,e_{i_n})\\
&=\sum_{\sigma\in S_n}a_{\sigma(1),1}a_{\sigma(2),2}\cdots a_{\sigma(n),n}f(e_{\sigma(1)},e_{\sigma(2)},\dots,e_{\sigma(n)})\\
&=\underbrace{\sum_{\sigma\in S_n}\left(\varepsilon(\sigma)\prod_{j=1}^{n}a_{\sigma(j),j}\right)}_{A(u_1,\dots,u_n)}\underbrace{f(e_1,\dots,e_n)}_{\in\mathbb{K}}
\end{aligned}$$

D'où, $f=f(e_1,\dots,e_n)\,A$.

Donc, l'ensemble des formes multilinéaires alternées est $\mathrm{Vect}(A)$. De plus,

$$\begin{aligned} A(e_1,\dots,e_n) &= \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} \delta_{\sigma(j),j} \\ &= \varepsilon(\mathrm{id}) \prod_{j=1}^{n} 1 = 1 \neq 0. \end{aligned}$$

□

Définition: Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $\mathscr{B} = (e_1,\dots,e_n)$ une base de E.

Il existe une unique forme f multilinéaire alternée sur E telle que $f(e_1,\dots,e_n) = 1$. Elle est donnée par la formule

$$\forall (u_1,\dots,u_n) \in E^n, f(u_1,\dots,u_n) = \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} a_{\sigma(j),j}$$

où

$$\forall i,j,\ a_{i,j} \text{ est la } i\text{-ème coordonnée de } u_j \text{ dans la base } \mathscr{B}.$$

Cette application est appelée déterminant dans la base $\mathscr{B}$ et noté $\det_{\mathscr{B}}$.

Proposition: Soient $\mathscr{B} = (e_1,\dots,e_n)$ et $\mathscr{C} = (u_1,\dots,u_n)$ deux bases de E. Alors

$$\det\nolimits_{\mathscr{C}} = \det\nolimits_{\mathscr{C}}(e_1,\dots,e_n)\ \det\nolimits_{\mathscr{B}}$$

i.e.

$$\forall (v_1,\dots,v_n) \in E^n, \det\nolimits_{\mathscr{C}}(v_1,\dots,v_n) = \det\nolimits_{\mathscr{C}}(e_1,\dots,e_n)\ \det\nolimits_{\mathscr{B}}(v_1,\dots,v_n).$$

Preuve:
On sait que $\det_{\mathscr{B}}$ et $\det_{\mathscr{C}}$ sont colinéaires :

$$\exists \lambda \in \mathbb{K},\ \forall (v_1,\dots,v_n) \in E^n,\ \det\nolimits_{\mathscr{C}}(v_1,\dots,v_n) = \lambda \det\nolimits_{\mathscr{B}}(v_1,\dots,v_n).$$

En particulier,

$$\det\nolimits_{\mathscr{C}}(e_1,\dots,e_n) = \lambda \det\nolimits_{\mathscr{B}}(e_1,\dots,e_n) = \lambda.$$

□

Remarque (notation):
Avec les notations précédentes, on note $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{C})$ au lieu de $\det_{\mathscr{B}}(u_1,\dots,u_n)$.

Corollaire: Avec les notations précédentes, $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{C}) \neq 0$ et

$$\det\nolimits_{\mathscr{B}}(\mathscr{C}) = (\det\nolimits_{\mathscr{C}}(\mathscr{B}))^{-1}$$

Preuve:

On sait que

$$\forall (v_1, \dots, v_n) \in E^n, \det_{\mathscr{C}}(v_1, \dots, v_n) = \det_{\mathscr{B}}(\mathscr{C}) \ \det_{\mathscr{B}}(v_1, \dots, v_n).$$

En particulier,

$$1 = \det_{\mathscr{C}}(\mathscr{C}) = \det_{\mathscr{C}}(\mathscr{B}) \ \det_{\mathscr{B}}(\mathscr{C}).$$

□

Théorème: Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E, $\mathscr{C} = (u_1, \dots, u_n)$ une famille liée (i.e. $\mathscr{C}$ n'est pas libre). Alors $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{C}) = 0$.

Preuve:
Sans perte de généralité, on peut supposer que $u_n \in \text{Vect}(u_1, \dots, u_{n-1})$:

$$u_n = \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k u_k \text{ où } \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{K}.$$

$$\begin{aligned} \det_{\mathscr{B}}(u_1, \dots, u_{n-1}, u_n) &= \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k \underbrace{\det_{\mathscr{B}}(u_1, \dots, u_{n-1}, u_k)}_{=0} \\ &= 0 \end{aligned}$$

□

Troisième partie

Déterminant d'un endomorphisme

Proposition: Soit $f \in \mathscr{L}(E)$, $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Alors,

$$\exists! \lambda \in \mathbb{K},\ \forall (u_1, \dots, u_n) \in E,\ \det_{\mathscr{B}}\big(f(u_1), \dots, f(u_n)\big) = \lambda \det_{\mathscr{B}}(u_1, \dots, u_n).$$

Preuve:
Soit $g : \begin{array}{ccc} E^n & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (u_1, \dots, u_n) & \longmapsto & \det_{\mathscr{B}}\big(f(u_1), \dots, f(u_n)\big) \end{array}$. g est clairement alternée.

Soit $i \in [\![1, n]\!]$, $(u_1, \dots, u_i, u_{i+1}, \dots, u_n) \in E^{n-1}$. L'application $u \mapsto g(u_1, \dots, u_{i-1}, u, u_{i+1}, \dots, u_n)$ est la composée de f et de $v \mapsto \det_{\mathscr{B}}\big(f(u_1), \dots, f(u_{i-1}), v, f(u_{i+1}), \dots, f(u_n)\big)$ donc elle est linéaire.

Donc, g est une forme multilinéaire alternée donc colinéaire à $\det_{\mathscr{B}}$. □

Proposition: Soit $f \in \mathscr{L}(E)$, $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ deux bases de E. Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ tel que

$$\forall (u_1, \dots, u_n) \in E^n,\ \begin{cases} \det_{\mathscr{B}}\big(f(u_1), \dots, f(u_n)\big) = \lambda \det_{\mathscr{B}}(u_1, \dots, u_n), \\ \det_{\mathscr{C}}\big(f(u_1), \dots, f(u_n)\big) = \mu \det_{\mathscr{C}}(u_1, \dots, u_n). \end{cases}$$

Alors, $\lambda = \mu$.

Preuve:
On pose $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$.

$$\begin{aligned} \det_{\mathscr{C}}\big(f(e_1), \dots, f(e_n)\big) = \mu \det_{\mathscr{C}}(e_1, \dots, e_n) &= \mu \det_{\mathscr{C}}(\mathscr{B}) \\ \| & \\ \det_{\mathscr{C}}(\mathscr{B}) \det_{\mathscr{B}}\big(f(e_1), \dots, f(e_n)\big) & \\ \| & \\ \lambda \underbrace{\det_{\mathscr{C}}(\mathscr{B})}_{\neq 0} \underbrace{\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B})}_{=1} & \end{aligned}$$

donc $\lambda = \mu$. □

Définition: Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Le déterminant de f est le seul scalaire vérifiant,

$$\forall \mathscr{B} \text{ base de } E,\ \forall (u_1, \dots, u_n), \det_{\mathscr{B}}\big(f(u_1),\ \dots, f(u_n)\big) = \lambda \det_{\mathscr{B}}(u_1, \dots, u_n)$$

et on le note $\lambda = \det(f)$.

Remarque:
Si $n = 2$,

$$\mathrm{Aire}\big(f(u_1), f(u_2)\big) = \det(f)\, \mathrm{Aire}(u_1, u_2).$$

Proposition: Soient f et g deux endomorphismes de E. Alors,

$$\det(f \circ g) = \det f \times \det g.$$

Preuve:
Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.

$$\det_{\mathscr{B}}\big(f\circ g(e_1), \dots, f\circ g(e_n)\big) = \det(f\circ g)\det_{\mathscr{B}}(e_1,\dots,e_n) = \det(f\circ g)$$

$$\| $$

$$\det_{\mathscr{B}}\Big(f\big(g(e_1)\big), \dots, f\big(g(e_n)\big)\Big)$$

$$\| $$

$$(\det f)\ \det_{\mathscr{B}}\big(g(e_1), \dots, g(e_n)\big)$$

$$\| $$

$$(\det f)\,(\det g)\ \underbrace{\det_{\mathscr{B}}(e_1,\dots,e_n)}_{=1}.$$

□

Corollaire: Si $f \in \mathrm{GL}(E)$, alors $\det(f) \neq 0$ et $\det(f^{-1}) = \det(f)^{-1}$.

Preuve:
On suppose $f \in \mathrm{GL}(E)$:

$$f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_E\,.$$

Donc,

$$\det(f)\ \det(f^{-1}) = \det(f\circ f^{-1}) = \det(\mathrm{id}_E).$$

Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.

$$\det_{\mathscr{B}}\big(\mathrm{id}_E(e_1), \dots, \mathrm{id}_E(e_n)\big) = \det(id_E)\times 1$$

$$\|$$

$$\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}) = 1$$

□

Proposition: Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. On suppose $f \notin \mathrm{GL}(E)$. Alors $\det(f) = 0$.

Preuve:
Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.

$$\det(f) = \det_{\mathscr{B}}\big(f(e_1), \dots, f(e_n)\big).$$

f n'est pas surjective donc $\mathrm{rg}\big(f(e_1), \dots, f(e_n)\big) < n$ donc $\big(f(e_1), \dots, f(e_n)\big)$ est liée donc $\det_{\mathscr{B}}\big(f(e_1), \dots, f(e_n)\big) = 0$. □

Quatrième partie

Déterminant d'une matrice carrée

Définition: Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Le déterminant de A est

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} = \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} a_{\sigma(j),j}$$

Proposition: Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E, $(u_1, \ldots, u_n) \in E^n$ et $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u_1, \ldots, u_n)$.

Alors,

$$\det_{\mathscr{B}}(u_1, \ldots, u_n) = \det(A).$$

Proposition: Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E, $f \in \mathscr{L}(E)$ et $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$. Alors, $\det(A) = \det(f)$.

Preuve:
$\det(f) = \det_{\mathscr{B}}\big(f(e_1), \ldots, f(e_n)\big)$, $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\big(f(e_1), \ldots, f(e_n)\big)$.

$$\begin{aligned} \det A &= \det_{\mathscr{B}}\big(f(e_1), \ldots, f(e_n)\big) \\ &= \det(f). \end{aligned}$$

□

Proposition: Soit $(A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2$.

$$\det(AB) = \det(A)\,\det(B).$$

Preuve:
Soit $E = \mathbb{K}^n$, $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de E, $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ et $g \in \mathscr{L}(E)$ tel que $B = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(g)$.

$$\begin{aligned} \det(AB) = \det(f \circ g) &= (\det f)\,(\deg g) \\ &= \det(A)\,\det(B). \end{aligned}$$

□

Proposition: Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

$$A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \iff \det(A) \neq 0$$

Dans ce cas, $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$. □

Proposition:

$$\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}), \det({}^tA) = \det(A).$$

Preuve:
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

$$\begin{aligned}
\det({}^tA) &= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} a_{j,\sigma(j)} \\
&= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{k=1}^{n} a_{\sigma^{-1}(k),k} \\
&= \sum_{\sigma' \in S_n} \varepsilon\left(\sigma'^{-1}\right) \prod_{k=1}^{n} a_{\sigma'(k),k} \\
&= \sum_{\sigma' \in S_n} \varepsilon(\sigma') \prod_{k=1}^{n} a_{\sigma'(k),k} \\
&= \det(A)
\end{aligned}$$

car

$$\begin{aligned}
\forall \sigma' \in S_n, \varepsilon\left(\sigma'^{-1}\right) = \varepsilon(\sigma')^{-1} &= \begin{cases} 1 & \text{si } \varepsilon(\sigma') = 1 \\ -1 & \text{si } \varepsilon(\sigma') = -1 \end{cases} \\
&= \varepsilon(\sigma').
\end{aligned}$$

□

Proposition: Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, C une opération sur les colonnes et A' la matrice obtenue en appliquant C sur les colonnes A.

1. Si $C = c_i \longleftrightarrow c_j$ (avec $i \neq j$), alors $\det(A') = -\det(A)$.
2. Si $C = c_i \longleftrightarrow \lambda c_i$, alors $\det(A') = \lambda \det(A)$.
3. Si $C = c_i \longleftrightarrow c_i + \lambda c_j$ (avec $i \neq j$), alors $\det(A') = \det(A)$.

Preuve:
Soit $(u_1, \ldots, u_n) \in (\mathbb{K}^n)^n$ tel que

$$\forall i \in [\![1, n]\!], c_i = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u_i)$$

où $\mathscr{B}$ est la base canonique de $\mathbb{K}^n$ et c_i la i-ème colonne de A.

1.
$$\begin{array}{rl} -\det(A) = -\det_{\mathscr{B}}(u_1,\dots,u_n) & \\ & \| \\ \det(A') = \det_{\mathscr{B}}(u_1,\dots,u_{i-1},u_j,u_{i+1},\dots,u_{j-1},u_i,u_{j+1},\dots,u_n). & \end{array}$$

2.
$$\begin{aligned} \det(A') &= \det_{\mathscr{B}}(u_1,\dots,u_{i-1},\lambda u_i,u_{i+1},\dots,u_n) \\ &= \lambda \det_{\mathscr{B}}(u_1,\dots,u_{i-1},u_i,u_{i+1},\dots,u_n) \\ &= \lambda \ \det(A). \end{aligned}$$

3.
$$\begin{aligned} \det(A') &= \det_{\mathscr{B}}(u_1,\dots,u_{i-1},u_i+\lambda u_j,u_{i+1},\dots,u_n) \\ &= \det_{\mathscr{B}}(u_1,\dots,u_{i-1},u_i,u_{i+1},\dots,u_n) + \lambda \det_{\mathscr{B}}(u_1,\dots,u_{i-1},u_j,u_{i+1},\dots,u_n) \\ &= \det(A) \end{aligned}$$

car, comme u_j apparaît deux fois dans le second détermiant, il vaut 0.

□

Corollaire: Le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit de ses coefficients diagonaux.

Preuve:

Soit $T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ (0) & & & * \\ & & \lambda_n & \end{pmatrix}$. S'il existe $i \in [\![1,n]\!]$, avec $\lambda_i = 0$, alors $\mathrm{rg}(T) < n$ et donc $T \notin \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et donc $\det(T) = 0 = \prod_{k=1}^{n} \lambda_k$.

On suppose que $\forall i, \lambda_i \neq 0$. On a

$$\frac{1}{\lambda_1}\det(T) = \det\begin{pmatrix} 1 & * & \cdots & * \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

et

$$\frac{1}{\lambda_1\lambda_2}\det(T) = \det\begin{pmatrix} 1 & * & \cdots & \cdots & * \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & 0 & \lambda_3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

D'où

$$\begin{aligned}\frac{1}{\lambda_1 \cdots \lambda_n} \det(T) &= \begin{vmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ (0) & & 1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & 1 \end{vmatrix} \\ &= 1\end{aligned}$$

donc $\det(T) = \lambda_1 \cdots \lambda_n$. □

Proposition: Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, L une opération sur les lignes, A' la matrice obtenue en appliquant L sur les lignes de A.

1. Si $L = \ell_i \longleftrightarrow \ell_j$ (avec $i \neq j$), $\det(A') = -\det(A)$.
2. Si $L = \ell_i \longleftrightarrow \lambda\ell_i$, $\det(A') = \lambda \det(A)$.
3. Si $L = \ell_i \longleftrightarrow \ell_i + \lambda\ell_j$ (avec $i \neq j$), $\det(A') = \det(A)$.

□

Exemple:
$(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & a & c \\ c & a & b \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} a+b+c & b & c \\ a+b+c & a & c \\ a+b+c & a & b \end{vmatrix} \\ &= (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & a & c \\ 1 & a & b \end{vmatrix} \\ &= (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 0 & a-b & 0 \\ 0 & 0 & b-c \end{vmatrix} \\ &= (a+b+c)(a-b)(b-c)\end{aligned}$$

Cinquième partie

Développement suivant une ligne ou une colonne

Exemple:

$$\begin{vmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & \boxed{2} & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & -1 \\ 7 & 8 & 9 & -2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 4 & 6 & -1 \\ 7 & 9 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 7 & 9 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} - 8\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 4 & 6 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 4 & 6 & -1 \\ 7 & 9 & -2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \boxed{0} \\ 4 & 5 & 6 & -1 \\ 7 & 8 & 9 & -2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & -1 \\ 7 & 8 & 9 & -2 \\ \boxed{3} & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -3\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 5 & 6 & -1 \\ 8 & 9 & -1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 4 & 6 & -1 \\ 7 & 9 & -2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & -1 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

$E = \mathbb{C}^4$ et $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ base canonique de E.

On pose $\begin{cases} u_1 = (1,4,7,3), \\ u_2 = (2,5,8,2), \\ u_3 = (3,6,9,1), \\ u_4 = (0,-1,-2,0). \end{cases}$ et $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u_1,u_2,u_3,u_4) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u_1, 2e_1 + 5e_2 + 8e_3 + 2e_4, u_3, u_4)$.

Donc,

$$\begin{aligned} \det A &= \det_{\mathscr{B}}(u_1, 2e_1 + 5e_2 + 8e_3 + 2e_4, u_3, u_4) \\ &= \quad 2\det_{\mathscr{B}}(u_1, e_1, u_3, u_4) \\ &\quad + 5\det_{\mathscr{B}}(u_1, e_2, u_3, u_4) \\ &\quad + 9\det_{\mathscr{B}}(u_1, e_3, u_3, u_4) \\ &\quad + 2\det_{\mathscr{B}}(u_1, e_4, u_3, u_4). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \det_{\mathscr{B}}(u_1, e_1, u_3, u_4) &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 6 & -1 \\ 7 & 0 & 9 & -2 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \\ &= -\begin{vmatrix} \boxed{1} & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 6 & -1 \\ 0 & 7 & 9 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} \\ &= -\left|\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 4 & 6 & -1 \\ 0 & 7 & 9 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right| \\ &= \dots \\ &= -\left|\begin{array}{c|ccc} 1 & \multicolumn{3}{c}{0} \\ \hline 0 & \multicolumn{3}{c}{\multirow{3}{*}{$*$}} \\ & & & \\ & \multicolumn{3}{c}{(0)} \end{array}\right| \end{aligned}$$

Idem pour e_2, e_3, e_4.

Proposition (Laplace)**:** Soit $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

$$\forall j \in [\![1, n]\!], \det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} m_{i,j}$$

où $m_{i,j}$ est le mineur d'indices (i, j), i.e. le déterminant de la matrice obtenue en supprimant la ligne i et la colonne j de la matrice A.

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} m_{i,j}.$$

□

Proposition (Vandermonde)**:** Soient $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^n$.

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{j<i} (a_j - a_i)$$

Preuve (par récurrence sur n)*:* — Soit $n \in \mathbb{N}$. Soient $a_1, \ldots, a_{n+1} \in \mathbb{K}$. On pose

$$\Delta_{n+1} = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & \cdots & a_1^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_{n+1} & \cdots & a_{n+1}^n \end{vmatrix}$$

On développe Δ_{n+1} suivant la dernière ligne et on obtient une expression polynomial en a_{n+1} :

$$\Delta_{n+1} = P(a_{n+1}) \text{ avec } P \in \mathbb{K}_n[X]$$

et le coefficent devant X^n est Δ_n.

Cas 1 On suppose $\Delta_n \neq 0$. D'après l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{cases} \forall i, j \in [\![1, n]\!], i \neq j \implies a_i \neq a_j \\ \mathrm{dom}(P_n) = \Delta_n = \displaystyle\prod_{n \geqslant j > i \geqslant 1} (a_j - a_i) \\ \deg(P_n) = n \\ \forall i \in [\![1, n]\!], P(a_i) = 0 \end{cases}$$

donc

$$P = \Delta_n (X - a_1) \cdots (X - a_n)$$

donc

$$\begin{aligned} \Delta_{n+1} &= \prod_{n \geqslant j > i \geqslant 1} (a_j - a_i) \, (a_{n+1} - a_1) \cdots (a_{n+1} - a_n) \\ &= \prod_{n+1 \geqslant j > i \geqslant 1} (a_j - a_i) \end{aligned}$$

Cas 2 On suppose $\Delta_n = 0$:

$$\exists i, j \in [\![1, n]\!] \,,\, i \neq j \;\text{ et }\; a_i = a_j .$$

Alors,

$$\Delta_{n+1} = 0 = \prod_{n+1 \geqslant j > i \geqslant 1} (a_j - a_i).$$

□

Proposition – Définition: Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, et $\mathrm{com}(A)$ la comatrice de A : c'est la matrice

$$\left((-1)^{i+j}\, m_{i,j}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$$

où $m_{i,j}$ est le mineur d'indices (i, j) de A.

On a

$$A\, {}^t\mathrm{com}(A) = {}^t\mathrm{com}(A)\, A = \det(A)\, I_n.$$

Si $\det A \neq 0$, alors

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\, {}^t\mathrm{com}(A).$$

Exemple:
Avec $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$, on a $\det A = ad - bc$.

$$\mathrm{com}\, A = \begin{pmatrix} +d & -b \\ -c & +a \end{pmatrix} \text{ donc } {}^t\mathrm{com}(A) = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$$

Si $\det(A) \neq 0$,

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$$

Exemple:
Avec $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$, on a

$$\mathrm{com}\, A = \begin{pmatrix} b_2c_3 - b_3c_2 & a_3c_2 - a_2c_3 & a_2b_3 - a_3b_2 \\ c_1b_3 - b_1c_3 & a_1c_3 - a_3c_1 & a_3b_1 - a_1b_3 \\ b_1c_2 - b_2c_1 & a_2c_1 - a_1c_2 & a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$$

Preuve:
On note $C = A\, {}^t\mathrm{com}(A) = (c_{i,j})$.

$$\forall i \in [\![1, n]\!] \,, c_{ii} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j} m_{ij} = \det(A).$$

Soient $i \in [\![1, n]\!]$, $j \in [\![1, n]\!]$ avec $i \neq j$.

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(-1)^{j+k} m_{jk}.$$

C'est le déterminant de la matrice obtenue en remplaçant la j-ème ligne de A par la i-ème, qui a donc 2 lignes identiques donc $c_{ij} = 0$.

L'autre formule " ${}^t\mathrm{com}(A)\, A = \det(A) I_n$" se démontre de la même façon. □

Remarque:
En pratique, on n'utilise jamais cette formule pour trouver A^{-1} (sauf si $n = 2$).

Exercice (Formules de Cramer):

Inutiles et Hors-Programme

Soit S le système $AX = B$ avec $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $B \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

L'unique solution du système S est donnée par

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ où } \forall i,\ x_i = \frac{\det A_i}{\det A}$$

où A_i est obtenue en replaçant la i-ème colonne de A par B.

Solution : Soit $(x_1, \dots, x_n)$ l'unique solution de S.

$$\sum_{i=1}^{n} x_i C_i(A) = B$$

où $C_i(A)$ est la i-ème colonne de A.

$$\begin{aligned} \forall j, \det(A_j) &= \det\big(C_1(A), C_2(A), \dots, C_{j-1}(A), B, C_{j+1}(A), \dots, C_n(A)\big) \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i \det\big(C_1(A), \dots, C_{j-1}(A), C_i(A), C_{j+1}(A), \dots, c_n(A)\big) \\ &= x_j \det(A) \end{aligned}$$

Retour sur la diagonalisation

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On cherche $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que

$$P\,A\,P^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \ddots & (0) \\ & \ddots & \ddots \\ (0) & \ddots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^n)$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = A$ où $\mathscr{B}$ est la base canonique de $\mathbb{K}^n$. On cherche $\mathscr{C} = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{K}^n$ telle que

$$\exists \lambda_i,\ f(u_i) = \lambda_i u_i$$

$$\begin{aligned} & \exists \lambda \in \mathbb{K},\ \exists u \neq 0,\ f(u) = \lambda u \\ \iff & \exists \lambda \in \mathbb{K},\ \exists u \neq 0,\ u \in \mathrm{Ker}(f - \lambda\,\mathrm{id}_{\mathbb{K}^n}) \\ \iff & \exists \lambda \in \mathbb{K},\ f - \lambda\,\mathrm{id}_{\mathbb{K}^n} \text{ n'est pas injective} \\ \iff & \exists \lambda \in \mathbb{K},\ f - \lambda\,\mathrm{id}_{\mathbb{K}^n} \notin \mathrm{GL}(\mathbb{K}^n) \\ \iff & \exists \lambda \in \mathbb{K},\ \det(\lambda - \mathrm{id}_{\mathbb{K}^n}) = 0 \\ \iff & \exists \lambda \in \mathbb{K},\ \underbrace{\det(A - \lambda I_n)}_{\text{polynôme caractéristique de } A} = 0 \end{aligned}$$